

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Факультет економіки та підприємництва
Кафедра моделювання та інформаційних технологій в економіці

Волонтир Л.О., Потапова Н.А.

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання лабораторних робіт
та самостійної роботи студентів
денної та заочної форми навчання**

**з дисципліни
“ЕКОНОМЕТРІЯ”**

для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня
галузі знань 07 «Управління та адміністрування»
спеціальностей 073 «Менеджмент»,
074 «Публічне управління та адміністрування»,
073 «Менеджмент» спеціалізація «Логістика»

Вінниця – 2018

Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з дисципліни “Економетрія”. для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальностей 073 «Менеджмент», 074 «Публічне управління та адміністрування», 073 «Менеджмент» спеціалізація «Логістика». – К.т.н., доцент Волонтир Л.О., к.е.н., доцент Потапова Н.А. – Вінниця: ВНАУ, 2018 – 99 с.

Автори:

Потапова Н.А.

Волонтир Л.О.

Затверджено до видання методичною комісією ВНАУ (протокол № 7 від «28» березня 2018 р.) за поданням методичної комісії факультету економіки та підприємництва (протокол № 8 від «26» березня 2018 р.).

Викладено тематичний зміст дисципліни, загальні правила оформлення лабораторних робіт, завдання до лабораторних робіт, самостійної роботи студентів денної та заочної форми навчання, перелік запитань та типові задачі до семестрового контролю, список рекомендованих та використаних джерел. Методичні вказівки призначені для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальностей 073 «Менеджмент», 074 «Публічне управління та адміністрування», 073 «Менеджмент» спеціалізація «Логістика».

ЗМІСТ

Передмова	4
Обсяг та структура курсу	7
Організація самостійної роботи студента	8
Загальні правила оформлення лабораторних робіт	8
Завдання до лабораторних робіт та порядок виконання	9
Лабораторна робота № 1	9
Аналіз інформаційної бази побудови економетричних моделей	
Лабораторна робота № 2	22
Економетрична модель з двома змінними. Проста лінійна вибіркова економетрична модель. Криві зростання.	
Лабораторна робота № 3	31
Множинні регресивні моделі	
Лабораторна робота № 4	38
Рангова кореляція	
Лабораторна робота № 5	51
Дослідження мультиколінеарності пояснювальних змінних	
Лабораторна робота № 6	61
Гетероскедастичність. Узагальнений метод найменших квадратів	
Лабораторна робота № 7	75
Побудова економетричної моделі з автокорельованими залишками	
Перелік запитань до семестрового контролю	84
Типові задачі до семестрового контролю	86
Критерії оцінки знань студентів	90
Список рекомендованих джерел	92
Список використаних джерел	93
Додатки	94
Додаток 1	94
Додаток 2	95
Додаток 3	96
Додаток 4	97

Передмова

Методичні вказівки призначені для виконання лабораторних робіт з курсу «Економетрія» для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальностей 073 «Менеджмент», 074 «Публічне управління та адміністрування», 073 «Менеджмент» спеціалізація «Логістика» та охоплюють усі види робіт при вивченні курсу студентами і відображає основні методичні вимоги кафедри «Моделювання та інформаційних технологій в економіці».

Пропоновані методичні вказівки з дисципліни «Економетрія» складені відповідно до місця та значення дисципліни за структурно-логічною схемою, передбаченою освітньо-професійною програмою бакалавра і охоплює всі змістовні модулі, передбачені стандартом. За змістом охоплює основні підрозділи основ дисципліни «Економетрія» в її сучасному вигляді у навчальній та науковій літературі.

Основною метою викладання є формування у майбутніх менеджерів сучасного економічного мислення та спеціальних знань з використання системного та процесного аналізу, різних методів економетричного аналізу як складової підтримки прийняття рішень щодо економічних об'єктів різної складності, ієрархії та організації.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є формування у студентів певних умінь:

- правильно задати специфікацію економічної моделі; обчислити оцінки її параметрів;
- оцінити якість самої моделі;
- надавати економіко-статистичне тлумачення одержаних результатів;
- визначати мультиколінеарність та способи її усунення;
- використовувати узагальнений метод найменших квадратів;
- будувати багатофакторні лінійні економетричні моделі динаміки;
- використовувати математичні методи дослідження якісних економічних

показників;

- використовувати прикладні програми при проведенні розрахунків на ПЕОМ та розробці практичних рекомендацій з прийняття рішень.

Предметом вивчення дисципліни „Економетрія” є економіко-математичні методи та засоби для дослідження економічних явищ і процесів, що відбуваються на макро- та мікрорівнях.

Вивчивши курс, студент повинен знати:

- сутність економетричного моделювання та його етапи;
- методи тестування економічної інформації;
- методи оцінювання параметрів економетричної моделі з урахуванням особливостей конкретної економічної інформації;
- методи оцінювання достовірності моделей та її параметрів;
- методи оцінювання прогнозних властивостей моделі;
- методи економетричного прогнозування з урахуванням особливостей економетричних моделей.

Вивчивши курс, студент повинен вміти:

- ідентифікувати змінні моделі;
- специфікувати модель;
- оцінювати параметри економетричної моделі в разі:
 - нормально розподілених залишків моделі;
 - гетероскедастичності;
 - мультиколінеарності пояснюючих змінних;
 - наявності залежності залишків з пояснюючими змінними;
- визначати прогнозні властивості моделі;
- перевіряти достовірність моделі та її параметрів;
- виконувати точковий та інтервальний прогноз на основі різних економетричних моделей;
- визначати основні економічні характеристики взаємозв'язку та правильно їх тлумачити.

Для засвоєння дисципліни потрібна ґрунтовна математична база, особливо з матричної алгебри, диференціального числення, теорії ймовірностей та математичної статистики. Важливо також мати підготовку з економічної теорії, макро- та мікроекономіки, статистики, економічного аналізу.

Знання, здобуті студентами під час вивчення «Економетрія», широко застосовуються в менеджменті, маркетингу, фінансовій справі, податковому менеджменті і т.ін. З огляду на громіздкість обчислень та вимоги до точності результатів вивчається за комп'ютерної підтримки.

Важливою стадією професійної підготовки студентів, поглибленого вивчення ними теорії та практики є підготовка, написання та захист лабораторних робіт. Роботи є завершеним самостійним дослідженням. У методичних вказівках розроблені лабораторні роботи з дисципліни «Економетрія». Студенти повинні знайти розв'язання робіт відповідними методами з економічною інтерпретацією кількісних характеристик взаємозв'язків досліджуваних показників та розгорнутими висновками, що впливають з виконаних розрахунків. Для спрощення цієї роботи у методичних вказівках надано рішення одного варіанту кожної з лабораторних робіт, з докладними поясненнями та висновками.

Знання дисципліни «Економетрія» надає додаткові можливості оволодіти обчислювальною технікою, розвиває аналітичні навички та є основою економічних досліджень.

Обсяг та структура курсу

Структура навчальної дисципліни “Економетрія” для студентів галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальностей 073 «Менеджмент», 074 «Публічне управління та адміністрування», 073 «Менеджмент» спеціалізація «Логістика» денної та заочної форми навчання

Теми	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		о	л	п	лаб	інд		с.р.	л	п	лаб	інд
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Атестація 1.												
Економетричні моделі та методи їх оцінювання												
Тема 1. Математичне моделювання як метод наукового пізнання економічних явищ і процесів.	10	2				8	11	1				10
Тема 2. Інформаційна база економетрики та методи її аналізу.	10	2		2		8	11		1			10
Тема 3. Загальна лінійна економетрична модель.	11	2		2		7	11	1				10
Тема 4. Багатофакторні економетричні моделі.	11	2		2		7	11		1			10
Разом	44	8		6		30	44	2	2			40
Атестація 2.												
Економетричні методи при невиконанні припущень щодо використання методу найменших квадратів												
Тема 5. Методи дослідження якісних економічних показників.		2		2			12	1				11
Тема 6. Мультиколінеарність.		2		2			12		1			11
Тема 7. Гетероскедастичність та її прояви в економіці.		2		2			11	1				10
Тема 8. Автокореляція та її наслідки.		2		2			11		1			10
Разом	46	8		8		30	46	2	2			42
Усього годин	90	16		14		60	90	4	4			82

Організація самостійної роботи студента

Самостійна робота студента є основним засобом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових навчальних занять. Зміст самостійної роботи над дисципліною “Економетрія” визначається навчальною програмою дисципліни, завданнями та вказівками викладача, даними методичними вказівками.

Забезпечується самостійна робота студента системою навчально-методичних засобів, передбачених для вивчення дисципліни: підручники, навчальні та методичні посібники, практикум тощо.

Навчальний матеріал дисципліни “Економетрія”, передбачений робочим навчальним планом для засвоєння студентом в процесі самостійної роботи, виноситься на підсумковий контроль поряд з навчальним матеріалом, який опрацьовувався при проведенні навчальних занять.

Контроль за самостійною роботою студентів здійснюється у вигляді обговорень, опитувань, розв'язання задач, перевірки та оцінювання лабораторних робіт та їх захисту студентами.

Загальні правила оформлення лабораторних робіт

Лабораторні роботи повинні бути виконані за допомогою комп'ютерної техніки, способами на одній стороні стандартного аркуша білого однотипного паперу формату А4 (210x197 мм) з використанням шрифтів Times текстового редактора Word розміру 12-14 з полуторним міжрядковим інтервалом. Мінімальна висота шрифту 1,8 мм.

Текст роботи необхідно друкувати, залишаючи поля наступних розмірів: ліве - не менше 20 мм, праве - не менше 10 мм, верхнє - не менше 20 мм, нижнє-не менше 20 мм. Шрифт друку повинен бути чітким, щільність тексту — однаковою.

Окремі іншомовні слова, формули, умовні знаки в текст курсової роботи можна вписувати чорнилом, тушшю, пастою тільки чорного кольору, при

цьому щільність вписаного тексту повинна бути наближеною до щільності основного тексту.

Першою сторінкою лабораторної роботи є титульний аркуш, який включають до загальної нумерації сторінок роботи. Номер сторінки на титульному аркуші не ставлять.

Таблиці та ілюстрації (схеми, рисунки, графіки) необхідно подавати безпосередньо після тексту, де вони згадані вперше, або на наступній сторінці. Ілюстрації і таблиці, подані в роботі, включають до загальної нумерації сторінок.

Ілюстрації позначають словом "Рисунок" і нумерують послідовно в межах розділу.

Таблиці нумерують послідовно в межах розділу. В правому верхньому куті над відповідним заголовком таблиці розміщують напис "Таблиця" із зазначенням її номера.

Розрахункова частина роботи повинна бути виконана за допомогою програми MS Excel.

Завдання до лабораторних робіт та порядок виконання

Надалі надано приклади виконання лабораторних робіт. Варіант обирається відповідно до номера студента у списку групи.

АТЕСТАЦІЯ 1. ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ЇХ ОЦІНЮВАННЯ

Лабораторна робота №1

Тема. Аналіз інформаційної бази побудови економетричних моделей

Порядок виконання.

1. Відповідно номера варіанту (п.а), що вказується викладачем розрахувати наступні характеристики динамічного ряду економічних показників:

- середнє арифметичне значення;
- середній абсолютний приріст;
- середній коефіцієнт зростання;
- середній коефіцієнт приросту;
- дисперсія;
- середнє квадратичне відхилення;
- коефіцієнт варіації;
- побудувати оцінку динаміки за 10 років.

2. Відповідно номера варіанту (п. б), що вказується викладачем розрахувати наступні характеристики варіаційного ряду економічних показників:

- середнє арифметичне значення;
- медіана;
- мода;
- середньоквадратичне відхилення;
- коефіцієнт варіації;
- побудувати оцінку групової варіації.

3. Описати економічне значення отриманих результатів.

Варіанти завдань

1 варіант

а) По сільськогосподарському підприємству “Ковель” отримані значення фінансового результату за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

Роки	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Фінансовий результат, тис. грн.	40,6	40,2	30,5	35,9	36,9	29,5	38,9	39,9	40,9	41,9

б) В ході аналізу сільськогосподарських підприємств Вінницького району отримано наступні показники по готовності сільськогосподарської техніки:

Район	Коефіцієнт готовності техніки
Барський	0,79
Бершадський	0,79
Вінницький	0,91
Гайсинський	0,79
Жмеринський	0,91
Львінецький	0,89
Калинівський	0,85
Козятинський	0,91
Крижопільський	0,91
Липовецький	0,79
Літинський	0,85
Мог.-Подільський	0,85
Мур.-Куриловецький	0,85
Немирівський	0,89
Оратівський	0,79
Пісчанський	0,85
Погребищенський	0,79
Теплицький	0,89
Тиврівський	0,85
Томашпільський	0,79
Тростянецький	0,85
Тульчинський	0,91
Хмельницький	0,85
Чернівецький	0,79
Чечельницький	0,91
Шаргородський	0,79
Ямпільський	0,79

2 варіант

а) По ЗАТ “Вінницяолієжиркомбінат” отримані значення прибутку на 1

працівника за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Прибуток на 1 працівника, тис.грн.	10,5	10,9	11,9	8,6	9,5	12,5	9,8	10,2	11,9	13,4

б) В ході аналізу с.-г. підприємства “Колос” отримані наступні рівні товарності сільськогосподарських культур:

Культури	Рівень товарності, %
Озима пшениця	85,0
Ярий ячмінь	79,8
Яра пшениця	79,8
Кукурудза	100
Гречка	88,3
Цукрові буряки	100
Овочі	88,3
Картопля	91,4

3 варіант

а) По ЗАТ “Вінницяолієжиркомбінат” отримані значення оборотності дебіторської заборгованості за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Оборотність дебіторської заборгованості	10,5	15,9	16,9	18,6	19,5	22,5	19,8	20,2	20,9	22,4

б) За 2016 р. с.-г. підприємство “Колос” здійснювало оптові поставки яблук постачальнику переробному підприємству “Мрія” таким чином: у вересні і листопаді по 456 т, у лютому, березні, липні, червні по 1768 т, у грудні – 234 т, у травні – 123 т.

4 варіант

а) По ЗАТ “Вінницяолієжиркомбінат” отримані значення оборотності кредиторської заборгованості за 10 років, які представлені у вигляді

динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Оборотність кредиторської заборгованості	0,30	0,32	0,45	0,55	0,67	0,73	0,74	0,71	0,79	0,80

б) Підприємству “Агротехсервіс” за 2016 р. надійшла наступна кількість заявок на кількість поставок по тракторах:

- від 3-х замовників на 2 трактори;
- від 4-х замовників на 1 трактор;
- від 2-х замовників на 8 тракторів;
- від 5-ти замовників на 4 трактори;

5 варіант

а) По ЗАТ “Вінницяолієжиркомбінат” отримані значення вартості основних засобів за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Вартість основних засобів, тис.грн.	21	13,8	14,8	16,3	16,5	18	17	15,3	18	14

б) На торговельному підприємстві “Олена” у 2016 р. працювало 12 чол. віком 18 р., 3 чол. віком 34 р., 11 чол. віком 45р., 32 чол. віком 37 р.

6 варіант

а) По підприємству “Чародій” отримані показники середньоспискової кількості робітників за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Середньоспискова кількість працівників, чол.	10	11	13	16	12	14	15	16	16	20

б) Торгівельне підприємство “Горішок” закупило для реалізації біокефір. Упаковки біокефіру мають різну вагу: 20 упаковок вагою 100 г, 100 упаковок вагою 150 г, 200 упаковок вагою 200 г, 100 упаковок вагою 250 г.

7 варіант

а) По ВАТ “Механізатор” отримано кількість управлінського персоналу за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Середньоспискова кількість управлінців, чол	11,3	12,4	14,8	16,7	19,4	21,1	22,8	25,3	25,8	30,0

б) В ході податкової перевірки виявили, що 3 підприємства у Вінницькому районі мають переплату по податку на прибуток у розмірі 34 тис.грн., 214 підприємств – 4 тис. грн, 34 підприємства – 2,7 тис.грн., 55 підприємств мають недоплату у розмірі 4,2 тис. грн.

8 варіант

а) По підприємству “Промінь” отримано динаміку урожайності ярої пшениці за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Урожайність, ц/га	78,3	72,4	84,8	86,7	86,8	87,3	90,2	101,6	103,1	104,4

б) Для оцінки інвестиційної привабливості АТ “Нафтогаз” було опитано 100 експертів за 30-ти бальною шкалою (10 балів – несприятливий клімат для інвестування, 20 балів - середній, 25 балів – сприятливий, 30 балів – найсприятливіший). 70 із них оцінили клімат для інвестування на підприємстві у 20 балів, 10 експертів – по 10 балів, 12 експерти – по 25 балів, 8 експертів – по 30 балів.

9 варіант

а) По підприємству “Яр” отримано динаміку урожайності цукрового буряка за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Урожайність, ц/га	31,3	32,4	34,8	45,6	56,0	52,9	58,9	68,6	74,1	79,4

б) підприємство “Батьківщина” у 2016р. здійснювало закупку неорганічних добрив вагою у 0,2ц 3 рази, по 0,8 ц – 7 разів, 0,5 ц – 5 разів, 1 ц – 14 разів.

10 варіант

а) По підприємству "Надія" отримано динаміку урожайності зернових і зернобобових за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Урожайність, ц/га	32,0	32,4	20,9	45,6	32,0	42,9	44,7	47,6	43,1	44,4

б) Фермер Злотник І.С. продав картоплю у 2016 р. реалізація здійснювалась наступним чином: 1,3 т картоплі 5-ти покупцям, 0,9 т картоплі 13 покупцям, 1,2 т картоплі – 6-ти покупцям, 0,1 т – 1-му покупцю.

11 варіант

а) По підприємству “Оратів” отримано динаміку урожайності гречки за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Урожайність,ц/га	60	50,5	60,5	40,3	40,5	70,2	56,8	53,2	62,7	67

б) Обласне управління аграрної політики встановило, що у 2016 році із 28 підприємств Вінницького району 8 мали рівень рентабельності – 15%, 5 – 0,5%, 4 – 8,7%, 3 – 9,2%, 8 – 4,6%.

12 варіант

а) По ВАТ “Вінницяобагротехсервіс” отримані значення виручки від реалізації за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Виручка від реалізації, тис.грн.	40,0	49,7	50,1	58,0	56,8	56,6	80,0	89,4	83,1	84,4

б) АТ “Молокозавод” у 2016 р. здійснював перерахування відсотків за кредит

наступним чином:

Місяць	Сума відсотків за кредит, тис.грн.
17.01.17	18,6
11.02.17	2,9
1.03.17	18,6
17.04.17	2,9
17.05.17	10,5
19.06.17	14,6
1.07.17	2,9
12.08.17	10,5
15.09.17	2,9
11.10.17	14,6
1.11.17	3,5
10.12.17	10,5

13 варіант

а) По підприємству “Світанок” отримано динаміку валового збору цукрового буряка за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

Роки	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Валовий збір, ц	400,0	290,7	500,1	406,9	406,9	760,8	803,3	809,4	713,1	821,8

б) Торговельне підприємство “Роса” у вересні 2016 р. здійснювало реалізацію м’ясних напівфабрикатів через власну торгову мережу. Розподіл реалізованої продукції по покупцях виявився наступним:

- 1кг м’ясних напівфабрикатів купило 200 покупців;
- 0,5кг м’ясних напівфабрикатів купило 100 покупців;
- 1,5кг м’ясних напівфабрикатів купило 250 покупців;
- 2кг м’ясних напівфабрикатів купило 70 покупців;
- 2,5кг м’ясних напівфабрикатів купило 30 покупців.

14 варіант

а) По ЗАТ “Агрохім” отримано динаміку виробничих затрат за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

Роки	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Виробничі затрати, тис.грн.	12,0	19,7	17,1	16,9	16,7	16,8	18,2	19,4	19,2	21,8

б) підприємство “Світанок” закупило для загальногосподарських витрат

канцелярські товари (ручки – 50 шт). Із них: 25 коштують – 75 грошових одиниць, 10 – 50 грошових одиниць, 10 – 1,2 грошових одиниць, 5 – 2 грошових одиниць.

15 варіант

а) По ЗАТ “Вінницяолієжиркомбінат” отримано дані по перерахуванню непрямих податків за 10 років, які представлені у вигляді динамічного ряду.

<i>Роки</i>	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Сума перерахувань, тис.грн.	52,0	64,5	66,1	65,4	68,3	64,7	61,3	69,2	64,7	60,3

б) Переробне підприємство “Мить” заключило договір з громадянином Вальковим С.С. про надання йому займу під 12%. Гроші надаватимуть протягом 2-х місяців за наступною схемою:

- 1 раз – 56 тис. грн. (на початку першого тижня у лютому);
- 2 рази – 12 тис.грн;(в останній тиждень лютого);
- 3 рази – 10 тис. грн.(на початку кожної неділі березня);
- 7 разів – 2 тис.грн. (протягом 3-х днів у кінці березня).

Приклади розрахунків характеристик динамічного і варіаційного рядів

Приклад розрахунку характеристик динамічного ряду

Розглянемо місячну заробітну плату (ЗП) у державному секторі України за 2008 — 2017 рр., грн. (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

№ п/п	Роки	ЗП у державному секторі (без ремій), тис. грн. — (X_i)	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$
1	2008	115	12771.5	163111212
2	2009	238	12648.5	159984552
3	2010	362	12524.5	156863100
4	2011	76	12125.5	147027750
5	2012	1223	11663.5	136037232

6	2013	2220	10666.5	113774222
7	2014	6366	6520.5	42516920
8	2015	21224	8335.5	69513906
9	2016	42043	29156.5	850101492
10	2017	54313	41426.5	1716154902

Проведемо підрахунки за цими даними й отримаємо такі середні характеристики.

Середня квартальна заробітна плата у державному секторі України в 2008— 2017 рр. дорівнювала:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{128865}{10} = 12886,5 \text{ грн.}$$

Середній абсолютний приріст заробітної плати дорівнює:

$$\Delta \bar{x} = \frac{x_n - x_1}{n-1} = \frac{54313 - 115}{9} = 6022 \text{ грн.}$$

За середнім абсолютним приростом встановлено, що середній рівень заробітної плати щорічно на протязі досліджуваного періоду зростав на 6022 тис. грн.

Середні коефіцієнти зростання та приросту відповідно становили:

$$k_{zp} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[9]{\frac{54313}{115}} = 1,982 \text{ рази}$$

Коефіцієнт зростання показує, що за досліджуваний період середня заробітна плата за кожен рік зростала в 1,982 рази або на 198,2%.

$$k_{np} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} - 1 = 0,982 \text{ рази}$$

Дисперсія показує середню суму квадратів відхилень членів ряду від

свого середнього і позначається σ^2 , або $\text{var}(x_i)$:

$$\text{var}(x) = \delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

де \bar{x} — середнє значення динамічного ряду;

n — кількість спостережень.

Середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Коефіцієнт варіації за формулою:

$$V = \frac{\delta}{\bar{x}} \times 100\%$$

де V — коефіцієнт варіації; \bar{x} — середнє значення ряду; δ — середнє квадратичне відхилення.

Для нашого прикладу дисперсія дорівнює: $\sigma^2 = 355508528.8$; середнє квадратичне відхилення $\sqrt{\sigma^2} = 59624$; коефіцієнт варіації $V = 426,68\%$.

Приклад розрахунку характеристик варіаційного ряду

При обстеженні студентів 1-го курсу за віком було зафіксовано такі дані: 17,18,18,18,18,19,20,20,20,21,21,21,21.

Позначимо частоту i -ї варіанти x_i через n_i тоді отримаємо ранжований дискретний варіаційний ряд. Дані для розрахунків наведені у табл.1.2.

Таблиця 1.2.

Номер варіанти	Значення варіанти X_i	Частота варіанти n	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - \bar{X})^2 n_i$
1	17	1	-2,38	5,66	5,66
2	18	4	-1,38	1,90	7,61
3	19	1	-0,38	0,14	0,14
4	20	3	0,62	0,38	1,15
5	21	4	1,62	2,62	10,49

Для дискретного варіаційного ряду середня арифметична розраховується за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

де x — середня арифметична; x_i — i -та варіанта; n — частота i -ї варіанти.

Медіаною називається таке значення ознаки, що вивчається, яке припадає на середину варіаційного ряду. При знаходженні медіани можливі два випадки: кількість членів ряду парна ($d = 2k$) та непарна ($d = 2k+1$).

У другому випадку медіана дорівнює:

$$M_e = x_{k+1}$$

де M — медіана; x_{k+1} — значення $(k+1)$ -го члена варіаційного ряду. У першому випадку: $M_e = \frac{(x_k + x_{k+1})}{2}$

де M_e — медіана; x_k, x_{k+1} — відповідно k та $(k+1)$ варіанти.

Модою називається варіанта, яка найчастіше зустрічається в даному варіаційному ряду.

Характеризує розсіяння навколо середнього – дисперсія:

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

Якщо дисперсію зручно подавати в тих самих одиницях виміру, що й варіанти, то використовують середнє квадратичне відхилення (δ):

$$\delta^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^k n_i}}$$

Для варіаційних рядів розраховується також коефіцієнт варіації (V):

$$V = \frac{\delta}{\bar{x}} \times 100\%$$

Середній вік студентів 1-го курсу дорівнює: $x = 19.38$. Медіана відповідно дорівнює:

$$M_e = x_{20} = 20, \text{ а мода: } M_o = x_2 = x_5 = (21; 18)$$

Дисперсія варіаційного ряду $\delta^2 = 1.927$, середнє квадратичне відхилення $\sqrt{\delta^2} = 1.38$, а варіація $V = 7.16\%$.

Контрольні запитання:

1. Який ряд називають динамічним рядом.
2. Який ряд називають варіаційним рядом.
3. Як обчислити і що характеризує середнє значення динамічного ряду.
4. Як обчислити і що характеризує середній абсолютний приріст.
5. Як обчислити і що характеризує середній темп зростання.
6. Як обчислити і що характеризує середній коефіцієнт росту.
7. Як обчислити і що характеризує дисперсія динамічного ряду.
8. Як обчислити і що характеризує середнє квадратичне відхилення динамічного ряду.
9. Як обчислити і що характеризує коефіцієнт варіації динамічного ряду.
10. Як обчислити і що характеризує мода варіаційного ряду.
11. Як обчислюється медіана для парних рядів.
12. Як обчислюється медіана для непарних рядів.
13. Як обчислити дисперсію, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації для варіаційних рядів.

Лабораторна робота №2

Тема. Економетрична модель з двома змінними. Проста лінійна вибіркова економетрична модель. Криві зростання

Пордок виконання

1. На основі даних по дев'яти металобазах побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами обігу та вантажооборотом.
2. Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів.
3. Відповідно до вхідних даних побудувати показникову, степеневу та гіперболічну моделі.
4. Зробити економічні висновки.

Розрахунки за лабораторною роботою слід проводити з використанням пакету «Аналіз даних» електронної таблиці Еxсel, а також вбудованих функцій для роботи з матрицями.

Вихідні дані наведені в табл. 2.1 — 2.2. відповідно до Вашого варіанту.

Таблиця 2.1. Витрати обігу

N п / п	Варіанти завдань														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2,7	2,6	2,9	3,3	3,0	2,9	2,8	2,7	2,3	1,8	2,0	2,8	2,5	1,8	1,9
2	3,0	2,9	2,6	2,5	2,5	2,6	2,7	2,5	1,9	2,4	2,0	2,4	2,6	2,4	2,0
3	2,8	2,7	2,8	2,4	2,5	2,7	2,4	2,1	2,3	2,5	2,2	2,3	2,0	2,5	2,2
4	2,9	2,5	2,7	3,0	2,6	2,7	2,3	2,8	2,5	2,3	1,9	2,5	1,9	2,3	1,9
5	2,6	2,7	2,7	2,7	2,1	2,6	2,5	2,4	2,6	2,3	2,4	2,7	2,4	2,3	2,4
6	2,5	2,6	2,9	2,7	2,9	2,5	2,5	2,3	2,0	2,5	1,9	2,4	2,2	2,5	1,9
7	2,8	2,7	2,4	2,7	2,7	2,7	2,5	2,5	1,9	2,4	2,2	2,3	2,1	2,4	2,1
8	2,6	2,6	2,9	2,8	2,4	2,8	2,4	2,7	2,4	2,5	2,4	1,9	1,8	2,5	2,4
9	2,5	2,8	2,3	2,5	2,8	2,9	2,3	2,4	2,2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,1	2,2
10	2,8	2,3	2,9	3,1	3,4	2,7	3,1	2,6	2,3	2,8	3,2	3,6	2,9	2,5	3,0

Таблиця 2.2. Вантажооборот

N п / п	Варіанти завдань														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	15,6	16,9	14,1	11,4	11,7	15,7	13,8	14,9	32,1	36,1	33,4	14,0	33,2	36,1	33,4
2	15,3	16,1	17,2	17,1	18,3	17,9	14,8	16,1	31,0	38,3	37,8	17,1	31,2	38,3	37,8
3	14,9	15,0	17,1	19,5	18,2	15,3	16,9	19,7	32,4	30,6	35,8	18,2	34,8	30,6	35,8
4	15,1	18,0	17,8	12,5	15,6	16,3	16,8	14,0	33,2	32,1	34,2	17,4	35,4	32,1	34,2
5	16,1	17,2	16,2	16,5	17,4	17,7	14,8	17,1	31,2	37,6	37,2	16,1	33,0	37,6	37,2
6	16,7	17,1	17,2	16,0	13,8	16,8	17,9	18,2	34,8	34,8	38,2	18,8	34,8	34,8	38,2
7	15,4	16,4	16,8	16,1	15,0	17,5	17,6	17,4	35,4	34,2	29,4	32,2	33,3	34,2	29,4
8	17,1	16,7	14,8	16,2	18,6	16,7	15,7	16,1	33,0	34,2	37,2	31,0	36,1	34,2	37,2
9	16,8	16,9	19,6	18,0	15,7	18,0	15,2	18,0	34,8	32,5	34,5	32,4	38,3	32,5	34,5
10	16,9	16,7	16,3	18,7	18,9	20,2	20,1	19,3	40,1	38,3	32,5	36,2	29,5	30,9	35,6

Теоретичні відомості

Серед багаточисленних зв'язків між економічними показниками завжди можна виділити такий показник, вплив якого на результативну ознаку є основним, найбільш важливим. Щоб виміряти цей зв'язок кількісно, необхідно побудувати економетричну модель з двома змінними (просту модель). Загальний вигляд такої моделі:

$$Y = f(X, u),$$

де Y — залежна змінна (результативна ознака); X — незалежна змінна (фактор); u — стохастична складова.

Аналітична форма цієї моделі може бути різною залежно від економічної сутності зв'язків. Найбільш поширені форми залежностей:

$$Y = a_0 + a_1 X;$$

$$Y = a_0 e^{a_1 X};$$

$$Y = a_0 X^{a_1};$$

$$Y = a_0 + \frac{a_1}{X},$$

де a_0, a_1 — невідомі параметри моделі.

Неважко переконатись, що наведені нелінійні форми залежностей за допомогою елементарних перетворень приводяться до лінійних. Якщо припустити, що економетрична модель з двома змінними є лінійною:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

в якій стохастична складова (залишки) має нульове математичне сподівання та постійну дисперсію, то параметри моделі можна оцінити на основі звичайного методу найменших квадратів (МНК).

В основі методу МНК лежить принцип мінімізації суми квадратів залишків моделі. Реалізація цього принципу дає можливість отримати систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + \sum_i x_i a_1 = \sum_i y_i \\ \sum_i x_i a_0 + \sum_i x_i^2 a_1 = \sum_i x_i y_i \end{cases}$$

В даній системі n — кількість спостережень, $\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i x_i y_i$ — величини, які можна розрахувати на основі вихідних спостережень над змінними Y і X .

Розв'язавши систему нормальних рівнянь, одержимо оцінки невідомих параметрів моделі \hat{a}_0 і \hat{a}_1 :

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X.$$

Достовірність побудованої економетричної моделі можна перевірити, користуючись елементами дисперсійного аналізу. Перш за все слід розрахувати залишки моделі

$$u_i = y_i - \hat{y}_i$$

та знайти їх дисперсію:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_i u_i^2}{n-m},$$

де m — кількість змінних моделі ($m=2$).

$$S\hat{a}_j = \sigma_u \sqrt{c_{jj}}$$

необхідно визначити стандартну помилку кожного параметра моделі.

Коефіцієнт c_{jj} в цій формулі характеризує відповідний діагональний елемент матриці помилок (матриці, оберненої до матриці системи нормальних рівнянь).

На основі коефіцієнта детермінації

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_U^2}{\sigma_Y^2}$$

можна зробити висновок про ступінь значущості вимірюваного зв'язку на основі економетричної моделі

$$R^2 \in]0,1[.$$

Оскільки коефіцієнт детермінації R^2 характеризує, якою мірою варіація залежної змінної визначається варіацією незалежної змінної, то чим ближче R^2 до одиниці, тим суттєвішим є зв'язок між цими змінними.

Коефіцієнт кореляції $R = \sqrt{R^2}$ характеризує тісноту зв'язку між змінними моделі. Він може знаходитись на множині $R \in]-1,1[$. Чим ближче R до одиниці по модулю, тим тіснішим є зв'язок. Від'ємний знак свідчить про обернений зв'язок, додатний — про прямий.

Якщо прийняти відповідну гіпотезу про закон розподілу залишків економетричної моделі, то параметри її можна оцінити на основі метода максимальної правдоподібності.

Нехай залишки моделі розподіляються за нормальним законом, тоді функція правдоподібності запишеться так:

$$F = \frac{1}{(\tilde{\sigma}_u^2 2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2 \right]$$

$$\ln F = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \tilde{\sigma}_u^2 - \frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2$$

Продиференціюємо цю функцію за невідомими параметрами \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 і $\tilde{\sigma}_u^2$, прирівнявши похідні до нуля, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} n\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \sum_i x_i = \sum_i y_i \\ \sum_i x_i \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i \\ \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2 = \sigma_u^2 \end{cases}$$

Підставимо в цю систему величини $\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i x_i y_i$, які розраховуються на основі вихідних даних, і розв'яжемо її відносно параметрів \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 і $\tilde{\sigma}_u^2$. В результаті отримаємо оцінки параметрів моделі \tilde{a}_0 і \tilde{a}_1 , а також оцінку дисперсії залишків.

Економетрична модель з двома змінними: побудова та аналіз

Приклад 1.1. На основі даних про роздрібний товарообіг і доходи населення побудувати економетричну модель роздрібного товарообігу. Дати загальну характеристику достовірності моделі та зробити висновки.

Вихідні дані та елементарні перетворення цих даних для побудови моделі наведені в табл. 1.1.

N п/ п	Y	X	X ²	XY	\hat{Y}	X - \bar{X}	Y - \bar{Y}	(X - \bar{X}) ²	$\frac{(X - \bar{X})}{(Y - \bar{Y})}$	u = Y - \hat{Y}	u ²	(Y - \bar{Y}) ²
1	17	18	324	306	16.67	-6.5	-5	42.25	32.5	0.33	0.1089	25
2	18	20	400	360	18.31	-4.5	-4	20.25	18.0	-0.31	0.0961	16
3	19	21	441	399	19.31	-3.5	-3	12.25	10.5	-0.13	0.0169	9
5	21	24	576	504	21.59	-0.5	-1	0.25	0.5	-0.59	0.3481	1
6	23	25	625	575	22.41	0.5	1	0.25	0.5	0.59	0.3481	1
7	24	27	729	648	24.05	2.5	2	6.25	5.0	-0.05	0.0125	4
8	25	28	784	700	24.87	3.5	3	12.25	10.5	0.13	0.0169	9
9	26	29	841	754	25.69	4.5	4	20.25	18.0	0.31	0.0961	16
10	27	31	961	837	27.33	6.5	5	42.25	32.5	-0.33	0.1089	25
$\sum_{i=1}^{10}$	220	245	6165	5523	-----	----	--	162.5	133	----	1.145	110

Розв'язання:

1. Ідентифікуємо змінні:

Y — роздрібний товарообіг (залежна змінна);

X — доходи населення (незалежна змінна).

2. Нехай специфікація моделі $Y = f(X, u)$ визначається лінійною функцією; вона має такий вигляд:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де a_0, a_1 — параметри моделі;

u — стохастична складова, залишки.

3. Оцінимо параметри моделі $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ за методом 1МНК. Для цього запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \sum_i x_i \hat{a}_1 = \sum_i y_i & (i = \overline{1, n}); \\ \sum_i x_i \hat{a}_0 + \sum_i x_i^2 \hat{a}_1 = \sum_i x_i y_i & (i = \overline{1, n}); \end{cases}$$

$n = 10$ — кількість спостережень.

Для знаходження параметрів моделі використаємо надбудову електронного процесора Excel «Аналіз даних». На малюнку 1.1. показана роздруківка роботи надбудови.

Таким чином, економетрична модель запишеться так:

$$Y = 1,94 + 0,81X.$$

4. Знайшовши відхилення кожної змінної від своєї середньої арифметичної, розрахуємо параметри моделі альтернативним способом:

$$a_1 = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{133}{162,5} = 0,81;$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = 22 - 0,81 * 24,5 = 22 - 20,06 = 1,94.$$

Вывод итогов								
Регрессионная статистика								
Множественный R	0,994783597							
R-квадрат	0,989594406							
Нормированный R-квадрат	0,988293706							
Стандартная ошибка	0,378255103							
Наблюдения	10							
Дисперсионный анализ								
	df	SS	MS	F	Значимость F			
Регрессия	1	108,8554	108,8554	760,8172	3,219E-09			
Остаток	8	1,144615	0,143077					
Итого	9	110						
	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y-пересечение	1,947692308	0,736758	2,6436	0,0295478	0,2487261	3,646658	0,248726	3,646658
Переменная X 1	0,818461538	0,029673	27,58292	3,219E-09	0,750036	0,886887	0,750036	0,886887

Рис.1.1. Роздруківка роботи надбудови електронного процесора Excel «Аналіз даних»

5. Визначимо коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 \approx 0,98 ;$$

$$R = 0,994$$

Оскільки коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,98$, це свідчить, що варіація обсягу роздрібного товарообігу на **98%** визначається варіацією доходів населення. Коефіцієнт кореляції $R = 0,994$ характеризує тісний зв'язок між цими соціально-економічними показниками. Величини R^2 і R для парної економетричної моделі свідчать про її достовірність, якщо вони наближаються до одиниці.

6. Визначимо за роздруківкою адекватність моделі. Модель є адекватною, тому що в стовпчику «Значимість F» число наближається до нуля.

7. Визначимо стандартні помилки оцінок параметрів моделі, враховуючи дисперсію залишків:

$$S_{a_0} = 0,736$$

$$S_{a_1} = 0,029$$

Порівняємо стандартні помилки оцінок параметрів моделі з величиною

цих оцінок. В результаті визначимо, що стандартна помилка оцінки параметра \hat{a}_1 становить **3,4%** абсолютного значення цієї оцінки (**0,81**), що свідчить про незміщеність даної оцінки параметра моделі. Стандартна помилка оцінки параметра \hat{a}_0 становить **38%** абсолютного значення цієї оцінки (**1,94**), а це означає, що даний параметр може мати зміщення, яке зумовлюється невеликою сукупністю спостережень (**n = 10**).

9. Визначимо нелінійні економетричні моделі.

Побудуємо графік (точковий) та добавимо лінію тренду: степеневого, логарифмічного та поліноміального другого порядку (рис.1.1.).

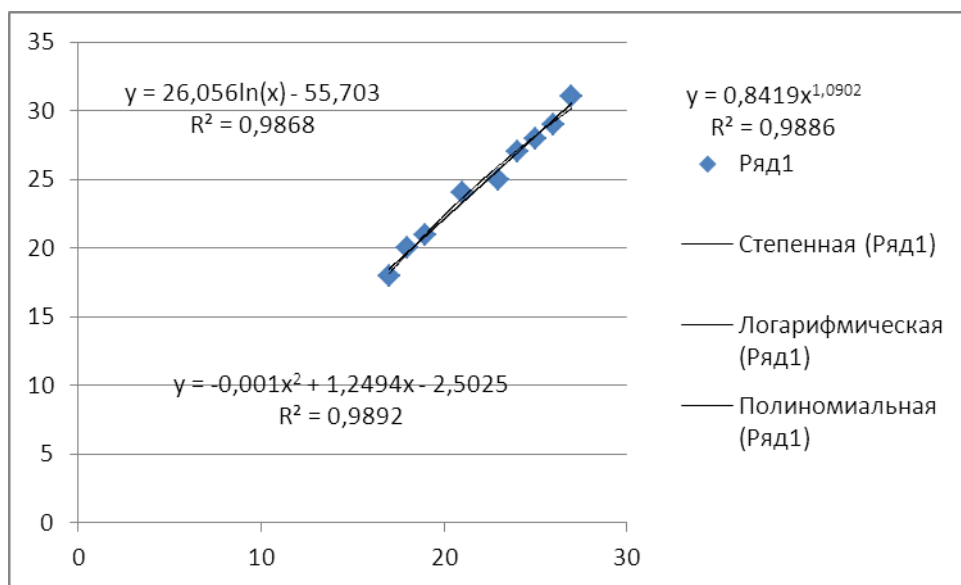


Рис.1.1. Побудова нелінійних економетричних моделей.

Логарифмічна модель: $Y = 26,056 * \ln(x) - 55,703$.

Коефіцієнт детермінації дорівнює 0,9868.

Степенева модель: $Y = 0,8419 * x^{1,0902}$.

Коефіцієнт детермінації дорівнює 0,9886.

Поліноміальна модель: $Y = -2,5025 + 1,2494 * x - 0,001 * x^2$.

Коефіцієнт детермінації дорівнює 0,9892.

10. Висновки. Економетрична модель $\hat{Y} = 1,91 + 0,82X$ кількісно описує зв'язок роздрібного товарообігу і доходів населення.

Параметр $\hat{a}_1 = 0,82$ характеризує граничну величину витрат на купівлю

товарів у роздрібній торгівлі, коли дохід збільшується на одиницю, тобто при збільшенні доходів на одиницю обсяг роздрібногo товарообігу зростає на **0,82** одиниці.

Контрольні запитання

1. Як записується рівняння простої лінійної регресії.
2. Який економічний зміст рівняння простої лінійної регресії.
3. Як охарактеризувати коефіцієнт a_0 .
4. Як охарактеризувати коефіцієнт a_1 .
5. Як розраховується коефіцієнт кореляції.
6. Який економічний зміст має коефіцієнт кореляції.
7. Як розраховується коефіцієнт детермінації.
8. Який економічний зміст коефіцієнта детермінації.
9. Які види стандартних відхилень існують.
10. В чому полягає проведення ANOVA-аналізу.
11. Дайте визначення довірчій імовірності та довірчого інтервалу.
12. Що характеризує кількість ступенів вільності.
13. Що характеризує рівень значимості моделі.
14. Що таке адекватність економетричної моделі.
15. Як визначається критерій Фішера.
16. Як проводиться оцінка адекватності за критерієм Фішера.

Лабораторна робота №3

Тема. Множинні регресивні моделі

Порядок виконання.

1. Побудувати економетричну модель, що характеризує залежність між витратами обігу, обсягом вантажообороту та фондомісткістю бази.
2. Визначити стандартні помилки параметрів.
3. Визначити стандартизовані параметри регресивної моделі. Зробити економічні висновки.
4. Визначити коефіцієнти еластичності та проаналізувати результати.
5. Дати змістовне тлумачення взаємозв'язку.

Вихідні дані наведені в табл. 3.1 – 3.15. відповідно до варіанту.

Таблиця 3.1. Витрати обігу

N п / п	Варіанти завдань														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2,7	2,6	2,9	3,3	3,0	2,9	2,8	2,7	2,3	1,8	2,0	2,8	2,5	1,8	1,9
2	3,0	2,9	2,6	2,5	2,5	2,6	2,7	2,5	1,9	2,4	2,0	2,4	2,6	2,4	2,0
3	2,8	2,7	2,8	2,4	2,5	2,7	2,4	2,1	2,3	2,5	2,2	2,3	2,0	2,5	2,2
4	2,9	2,5	2,7	3,0	2,6	2,7	2,3	2,8	2,5	2,3	1,9	2,5	1,9	2,3	1,9
5	2,6	2,7	2,7	2,7	2,1	2,6	2,5	2,4	2,6	2,3	2,4	2,7	2,4	2,3	2,4
6	2,5	2,6	2,9	2,7	2,9	2,5	2,5	2,3	2,0	2,5	1,9	2,4	2,2	2,5	1,9
7	2,8	2,7	2,4	2,7	2,7	2,7	2,5	2,5	1,9	2,4	2,2	2,3	2,1	2,4	2,1
8	2,6	2,6	2,9	2,8	2,4	2,8	2,4	2,7	2,4	2,5	2,4	1,9	1,8	2,5	2,4
9	2,5	2,8	2,3	2,5	2,8	2,9	2,3	2,4	2,2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,1	2,2
10	2,8	2,3	2,9	3,1	3,4	2,7	3,1	2,6	2,3	2,8	3,2	3,6	2,9	2,5	3,0

Таблиця 3.2. Вантажооборот

N п / п	Варіанти завдань														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	15,6	16,9	14,1	11,4	11,7	15,7	13,8	14,9	32,1	36,1	33,4	14,0	33,2	36,1	33,4
2	15,3	16,1	17,2	17,1	18,3	17,9	14,8	16,1	31,0	38,3	37,8	17,1	31,2	38,3	37,8
3	14,9	15,0	17,1	19,5	18,2	15,3	16,9	19,7	32,4	30,6	35,8	18,2	34,8	30,6	35,8

4	15,1	18,0	17,8	12,5	15,6	16,3	16,8	14,0	33,2	32,1	34,2	17,4	35,4	32,1	34,2
5	16,1	17,2	16,2	16,5	17,4	17,7	14,8	17,1	31,2	37,6	37,2	16,1	33,0	37,6	37,2
6	16,7	17,1	17,2	16,0	13,8	16,8	17,9	18,2	34,8	34,8	38,2	18,8	34,8	34,8	38,2
7	15,4	16,4	16,8	16,1	15,0	17,5	17,6	17,4	35,4	34,2	29,4	32,2	33,3	34,2	29,4
8	17,1	16,7	14,8	16,2	18,6	16,7	15,7	16,1	33,0	34,2	37,2	31,0	36,1	34,2	37,2
9	16,8	16,9	19,6	18,0	15,7	18,0	15,2	18,0	34,8	32,5	34,5	32,4	38,3	32,5	34,5
10	16,9	16,7	16,3	18,7	18,9	20,2	20,1	19,3	40,1	38,3	32,5	36,2	29,5	30,9	35,6

Таблиця 3.3. Фондоміскість

N	Варіанти завдань														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	106,3	120,0	117,7	110,0	87,8	71,3	70,6	71,2	102,5	94,0	68,0	69,4	56,5	65,4	109,4
2	128,5	118,4	97,5	105,9	72,0	61,7	73,4	73,4	94,3	78,0	64,3	58,7	64,3	73,9	101,1
3	118,0	108,4	113,7	117,7	72,4	96,2	80,7	81,2	76,0	87,5	55,1	62,3	53,7	68,5	102,6
4	121,2	110,0	122,3	97,5	69,5	72,9	62,2	63,7	87,3	90,2	55,5	83,8	54,7	64,5	128,5
5	120,0	105,9	102,0	113,7	75,0	75,0	98,6	96,6	90,1	84,8	63,3	68,5	60,2	69,3	122,5
6	118,4	117,7	106,7	122,3	70,6	74,6	71,3	72,2	82,8	95,9	52,7	64,5	62,4	83,8	105,2
7	108,4	97,5	108,5	102,0	73,4	74,1	61,7	61,7	96,9	91,0	53,7	67,6	69,5	62,3	114,8
8	110,0	113,7	114,3	106,7	80,7	66,9	96,2	96,2	83,7	84,7	60,2	72,9	58,7	58,7	116,0
9	105,9	122,3	94,3	108,5	62,2	98,6	72,9	72,9	96,2	88,2	62,2	62,4	62,3	69,4	116,0
10	122,3	94,3	108,5	113,7	84,3	106,7	80,7	60,2	80,3	92,3	97,5	69,5	89,5	78,4	97,5

Теоретичні відомості

Для того щоб кількісно описати зв'язок між кількома або багатьма змінними, одна з яких є залежною, інші — незалежними змінними, необхідно розглянути лінійну економетричну модель, яка базується на регресійному аналізі.

У загальному вигляді цю модель можна записати так:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m, u),$$

де Y — залежна змінна;

$X_j, (j = \overline{1, m})$ — незалежні змінні;

u — стохастична складова.

Залежна змінна Y називається також пояснюваною, ендогенною змінною, незалежні змінні X_j — пояснюючими, предетермінованими, екзогенними

змінними.

Аналітична форма загальної лінійної економетричної моделі:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m + u ,$$

де a_j ($j = \overline{0, m}$) — параметри моделі.

В матричній формі економетрична модель має такий вигляд:

$$Y = XA + u ,$$

X — матриця незалежних змінних; A — вектор оцінок параметрів моделі;
 u — вектор залишків.

Щоб оцінити параметри моделі на основі методу 1МНК, необхідно дотримуватися таких передумов (гіпотез):

1) математичне сподівання залишків має дорівнювати нулю, тобто

$$M(u) = 0 ;$$

2) значення вектора залишків u незалежні між собою і мають постійну дисперсію:

$$M(uu') = \sigma^2 E ;$$

3) незалежні змінні моделі не зв'язані із залишками, тобто

$$M(X'u) = 0 ;$$

4) незалежні змінні моделі створюють лінійно-незалежну систему векторів, тобто

$$\begin{aligned} (X'_k X_j) &= 0, & k \neq j; & & k = \overline{1, m} \\ (X'_k X_j) &= 1, & k = j; & & j = \overline{1, m} \end{aligned}$$

Оператор оцінювання параметрів моделі на основі 1МНК:

$$A = (X' X)^{-1} X' Y.$$

Неважко довести, що оцінки \hat{A} , які можна отримати на основі оператора оцінювання 1МНК, мінімізують суму квадратів залишків u . При цьому значення вектора \hat{A} є розв'язком нормальної системи рівнянь:

$$(X' X) \hat{A} = X' Y$$

Якщо незалежні змінні в матриці X взяті як відхилення кожного значення

від своєї середньої, то матрицю $X'X$ називають матрицею моментів. Числа, що стоять на її головній діагоналі, характеризують величину дисперсій незалежних змінних, інші елементи відповідають взаємним коваріаціям.

Оцінки параметрів загальної економетричної моделі повинні мати такі *властивості*:

- 1) незміщеності;
- 2) обґрунтованості;
- 3) ефективності;
- 4) інваріантності.

Оцінка параметра моделі буде *незміщеною*, коли дотримується рівність:

$$M(\hat{A}) = A.$$

Якщо ця рівність не дотримується, то різниця $M(\hat{A}) - A = Q$ називається зміщенням оцінки.

Оцінка параметра моделі буде *обґрунтованою*, якщо при заданій малій величині $\varepsilon > 0$ справедливе відношення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ |\hat{A} - A| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Оцінки \hat{A} параметрів A називаються *ефективними*, коли вони мають найменшу дисперсію.

Якщо функція $g(\hat{A})$ відповідає функції $g(A)$, то оцінки \hat{A} параметрів A є інваріантними.

Загальна економетрична модель: побудова й аналіз

Приклад 3.1. Побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами на харчування, загальними затратами та складом сім'ї на основі даних, наведених у табл. 3.4. Проаналізувати зв'язок, визначений на основі побудованої моделі.

Таблиця 3.4

№ п / п	Витрати на харчування	Загальні затрати	Склад сім'ї
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
1	20	45	1,5
2	32	75	1,6
3	48	125	1,9
4	65	223	1,8
5	45	92	3,4
6	64	146	3,6
7	79	227	3,5
8	104	358	5,5
9	68	135	5,4
10	93	218	5,4
11	117	331	5,3
12	145	490	8,5
13	91	175	8,3
14	131	205	8,1
15	167	468	7,3
16	195	749	8,4

Розв'язання:

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y — витрати на харчування (залежна змінна);

X_1 — загальні витрати (незалежна змінна);

X_2 — розмір сім'ї (незалежна змінна);

u — залишки (стохастична складова).

Загальний вигляд моделі:

$$Y = f(X_1, X_2, u) .$$

2. Специфікуємо модель, тобто в даному випадку визначимо її аналітичну форму:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + u;$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X_1 + \hat{a}_2 X_2 .$$

3. Оцінимо параметри моделі на основі методу 1МНК, попередньо висунувши гіпотезу, що всі чотири передумови для його застосування дотримані.

Вывод итогов								
Регрессионная статистика								
Множественный R	0,974838							
R-квадрат	0,950308							
Нормированный R-квадрат	0,942664							
Стандартная ошибка	11,81472							
Наблюдения	16							
Дисперсионный анализ								
	df	SS	MS	F	Значимость F			
Регрессия	2	34703,36	17351,68	124,306746	3,35615E-09			
Остаток	13	1814,639	139,5876					
Итого	15	36518						
	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-значение	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%	
Y-пересечение	8,3476	6,559893	1,272521	0,22547746	-5,824186602	22,51939	-5,82419	22,51939
Переменная X 1	0,16753	0,022263	7,52507	4,3416E-06	0,119433633	0,215626	0,119434	0,215626
Переменная X 2	8,175258	1,598968	5,112833	0,00019921	4,720896779	11,62962	4,720897	11,62962

Таким чином, $a_0 = 8,347; a_1 = 0,167; a_2 = 8,175$. Звідси економетрична модель має вигляд:

$$Y = 8,347 + 0,167X_1 + 8,175X_2.$$

4. Випишемо стандартні помилки оцінок параметрів:

$$S_{a_0} = 6,559;$$

$$S_{a_1} = 0,022;$$

$$S_{a_2} = 1,598.$$

Порівняємо стандартні помилки оцінок параметрів моделі з величиною оцінки. Так, співвідношення стандартної помилки й абсолютного значення параметра \hat{a}_0 становить **56%**, параметра \hat{a}_1 — **10,6%**, параметра \hat{a}_2 — **20,4%**. Перше й третє співвідношення свідчать про те, що оцінки параметрів моделі \hat{a}_0 і \hat{a}_2 можуть мати зміщення, а друге співвідношення підтверджує незміщеність оцінки параметра \hat{a}_1 .

6. Множинний коефіцієнт кореляції дорівнює 0,974. Коефіцієнт детермінації становить 95%. Отже зміну витрат на харчування на 95% визначає зміна загальних витрат та складу сім'ї.

7. модель є адекватною, тому що значимість F наближається до нуля.

8. Дамо змістовне тлумачення параметрів моделі.

Оцінка параметра \hat{a}_1 характеризує граничну зміну величини витрат на харчування залежно від зміни загальних затрат на одиницю. Тобто, якщо загальні затрати сім'ї зростуть на одиницю, то витрати на харчування в них збільшаться на **0,18** одиниці при незмінному складі сім'ї.

Оцінка параметра \hat{a}_2 характеризує граничне зростання витрат на харчування при збільшенні сім'ї на одного члена. Так, якщо склад сім'ї збагатиться ще одним членом, то витрати на харчування зростуть на **6,854** одиниці при незмінній величині доходу.

9. Знайдемо стандартезовані параметри регресії.

10. Знайдемо коефіцієнти еластичності.

Контрольні запитання

1. отримується рівняння багатofакторної лінійної регресії.
2. Який економічний зміст багатofакторної регресії.
3. Як обчислити бета-коефіцієнти моделі і що вони характеризують.
4. Як обчислити коефіцієнт еластичності і який його економічний зміст.
5. Що характеризує діаграма розсіювання і як її побудувати.

АТЕСТАЦІЯ 2.
ЕКОНОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ПРИ НЕВИКОНАННІ ПРИПУЩЕНЬ
ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Лабораторна робота №4

Тема. Рангова кореляція

Порядок виконання

1. Відповідно до варіантів, що наведені в табл.1 оцінити тісноту зв'язку між показниками “у” та “х” за допомогою:

- коефіцієнта рангової кореляції Спірмена (дані табл.4.1);
- коефіцієнта рангової кореляції Кендела (дані табл.4.1);
- індексу Фехнера (дані табл.1);
- коефіцієнта конкордації Кендела (взяти дані із лабораторної роботи №3).

2. Проаналізувати економічний зміст розрахованих коефіцієнтів.

Таблиця 4.1

1 варіант										
у - валової продукції на 1 середньорічного працівника, грн.	127	220	229	145	165	144	205	231	97	139
х ₁ - оборотність кредиторської заборгованості, дн.	120	90	70	170	140	170	170	220	195	170
х ₂ - середній залишок оборотних коштів, тис.грн.	56	79	84	40	57	19	25	56	38	49
2 варіант										
у - прибуток на 1 середньоспискового працівника, тис. грн.	1,2	1,4	1,6	1,9	1,8	1,9	1,7	2,1	1,9	1,9
х ₁ - оборотність дебіторської заборгованості, дн.	170	190	150	190	190	190	200	220	180	190
х ₂ - середній залишок оборотних коштів, тис.грн.	58	49	68	52	54	59	61	82	79	96
3 варіант										
у - коефіцієнт	0,98	0,88	0,78	0,89	0,89	0,95	0,89	0,75	0,69	0,7

фінансової незалежності										
x ₁ - середній залишок оборотних коштів, тис.грн.	12	16	17	14	15	12	18	12	12	12
x ₂ - оборотність дебіторської заборгованості, дн.	7,5	6,3	8,7	7,6	6,9	6,6	7,6	10,5	10,2	12,3
4 варіант										
y - коефіцієнт співвідношення власних і залучених коштів	0,7	0,3	0,5	0,4	0,4	0,4	0,6	0,4	0,4	0,9
x ₁ - середній залишок запасів, тис.грн.	76	54	76	59	76	75	73	65	64	62
x ₂ - виробничі витрати на 1 середньоспискового працівника, тис.грн.	8,7	11,3	14,7	19,1	24,8	32,3	42,0	54,6	71,0	92,3
5 варіант										
y - коефіцієнт термінової ліквідності	1,5	1,8	1,8	1,8	1,7	2,25	2,7	2,09	1,8	1,8
x ₁ - прибуток на 1 середньорічного працівника, тис.грн.	0,9	1,5	1,9	1,9	1,9	1,8	1,9	1,9	2,0	1,9
x ₂ - адміністративні витрати на 1 управлінця, тис.грн.	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3	5,9
6 варіант										
y - поточний коефіцієнт покриття	1,9	1,9	1,8	1,67	1,9	1,5	2,1	1,9	1,9	1,72
x ₁ - питома вага найбільш ліквідних активів в структурі активів, %	23	23	17	25	30	23	16	20	19	22
x ₂ - питома вага власного капіталу у структурі майна, %	48,2	49,7	42,5	40,1	45,1	25,7	37,2	38,7	50,2	48,5
7 варіант										
y - питома вага адміністративних витрат в структурі витрат, %	33	37	29	28	28	28	30	41	36	28
x ₁ - питома вага управлінців в структурі працівників, %	16	18	20	21	14	17	18	18	18	19
x ₂ - питома вага адміністративних витрат в структурі витрат, %	33	37	29	25	26	28	30	41	36	28
8 варіант										
y - урожайність	171	180	199	187	199	210	199	199	205	199

зернових, ц/га										
x ₁ - кількість мінеральних добрив на 10 га, ц.д.р	9,8	8,9	8,7	9,3	10,1	11,2	8,9	10,0	9,9	8,9
x ₂ - кількість органічних добрив на 10га, ц.д.р.	15,7	14,2	13,9	14,9	15,8	17,6	14,2	16,0	15,8	14,2
9 варіант										
у - середній вихід продукції рослинництва на 10 га, ц	234	256	284	301	276	250	289	269	310	310
x ₁ - кількість внесення азотних добрив на 10 га, ц.д.р.	17,0	17,8	16,9	16,9	16,2	16,9	16,5	17,2	16,7	16,9
x ₂ - кількість фосфорних добрив на 10 га, ц.д.р.	18,0	18,9	17,9	17,6	17,2	17,9	17,5	17,9	17,7	17,8
10 варіант										
у - середньорічний надій молока на 1 гол., ц	4100	3700	4100	4222	5001	5200	4022	4310	4100	3890
x ₁ - рівень механізації робіт, %	59	59	50	51	59	68	69	60	63	72
x ₂ - кількість внесення органічних добрив на 10 га, т	310,0	300,0	300,0	305,0	302,0	270,0	289,0	267,0	290,0	312,0
11 варіант										
у - питома вага запасів у структурі активів, %	13	17	10	10	11	15	19	10	18	16
x ₁ - кількість внесення калійних добрив на 10 га,ц.д.р	5,7	5,4	5,8	6,1	6,0	6,2	5,7	5,9	6,3	5,7
x ₂ - кількість мінеральних добрив на 10 га, ц.д.р	9,8	8,9	8,7	9,3	10,1	11,2	8,9	10,0	9,9	8,9
12 варіант										
у - виручка від реалізації на 1 середньорічного працівника, грн.	190	210	245	189	194	220	175	220	196	220
x ₁ - затрати праці на 1 середньорічного працівника, люд.-год.	270	241	250	219	399	241	458	379	427	353
x ₂ - виробничих витрат на 1 середньорічного працівника, тис.грн.	5,8	6,1	6,3	6,6	6,9	7,2	7,4	7,7	8,0	8,2
13 варіант										
у - урожайність цукрових буряків, ц/га	371	372	421	344	378	344	340	344	342	360
x ₁ - кількість внесення органічних добрив на 10	310	300	300	300	300	270	289	267	290	312

га, т										
x ₂ - кількість мінеральних добрив на 10 га, ц.д.р	10,1	7,2	9,5	8,9	10,3	10,2	11,2	10,1	7,0	9,9
14 варіант										
у - фондовіддача, грн.	567	555	580	490	580	569	580	580	559	537
x ₁ - питома вага виробничих витрат у структурі витрат, %	346	375	574	364	465	534	756	465	756	657
x ₂ - виробничих витрат на 1 середньорічного працівника, тис.грн.	5,8	6,1	6,3	6,6	6,9	7,2	7,4	7,7	8,0	8,2
15 варіант										
у - питома вага кредиторської заборгованості у структурі пасивів, %	23	26	36	33	36	35	41	38	36	36
x ₁ - прибуток (збиток) на 1 середньорічного працівника, тис.грн.	7,6	5,8	6,7	8,4	8,3	8,5	9,2	5,8	5,4	5,7
x ₂ - оборотність запасів, дн	65,4	49,9	57,6	72,2	71,4	73,1	79,1	60,1	60,3	49,0
16 варіант										
у - фондозабезпеченість грн./га	71,3	71,3	68,9	79,5	77,4	71,3	81,2	71,3	80,9	82,5
x ₁ - питома вага власного капіталу у структурі пісивів, %:	7,6	5,8	6,7	8,4	8,3	8,5	9,2	5,8	5,4	5,7
x ₂ - питома вага найбільш ліквідних активів в структурі активів, %	24,1	24,9	21,3	20,1	22,6	12,9	18,6	19,4	20,1	19,3

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи

1. Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Поряд з коефіцієнтом кореляції існують інші показники тісноти зв'язку, які широко застосовують в економіці у тих випадках, коли ознакам явища, що спостерігається, не можуть однозначно надаватись ті чи інші абсолютні значення. До них відноситься коефіцієнт рангової кореляції Спірмена. Його застосування не пов'язано з передумовою нормальності розподілу вихідних даних.

При застосуванні методів рангової кореляції ґрунтуються не на точних кількісних оцінках значень ознак-змінних, а на рангах. Для цього елементи

сукупності розташовуються у визначеному порядку відповідно до конкретної ознаки. Отриманий ряд елементів називають упорядкованим. Сам процес упорядкування називається ранжуванням, а кожному члену ряду ставиться у відповідність ранг, чи рангове число (порядковий номер). Наприклад, елементу з найменшим значенням ознаки ставиться у відповідність ранг 1, наступному за ним елементу – ранг 2 і т.д. Елементи можна розташовувати також у порядку убудування значень їх ознаки. Таким чином, відбувається порівняння кожного елемента зі всіма іншими елементами сукупності. Якщо елемент описується не одним, а двома ознаками “x” і “y”, то для дослідження їхнього впливу один на одного кожному елементу надається два порядкових номери згідно з правилом ранжування. В подальшому здійснюється перехід від кореляції ознак-змінних “x” і “y” до вивчення зв’язку між ранговими числами шляхом визначення відповідності між двома послідовностями порядкових оцінок. Іншими словами, вимірюється тіснота рангової кореляції. Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена є парним, оскільки вивчається зв’язок між двома змінними.

Позначимо ранги, що відповідають значенням змінної “y”, через v , а ранги, що відповідають значенням змінної “x” – через w (таблиця 2). Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена обчислюється по формулі:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (v_i - w_i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

де n – обсяг вибірки. Видно, що для розрахунку коефіцієнта необхідно визначити тільки квадрати відхилень рангів. Існують випадки, коли два чи більше елементів сукупності мають однакові значення ознаки і не можливо знайти істотну різницю між ними. Елементи, що володіють такою властивістю – відсутністю переваг, – називаються **зв’язаними**, а група що з них утворена – **ланцюгом**. Метод, що застосовується для надання порядкового номера зв’язаним елементам, називається методом середніх рангів. Він полягає в усередненні рангів, що мали б елементи, якби вони були різними. Сума рангів при цьому залишається такою, як і при ранжуванні без зв’язків. Наприклад,

якщо у змінної “у” четверте, п’яте і шосте значення однакові по величині, тоді кожному із них надається ранг $(1/3)*(4+5+6)=5$. Наступному ж по величині значенню надається ранг 7. При наявності зв’язаних рангів до коефіцієнта рангової кореляції Спірмена вводиться поправка:

$$r_{s_1} = \frac{\frac{n(n^2-1)}{6} - \sum_i (v_i - w_i)^2 - A - B}{\sqrt{\left(\frac{n(n^2-1)}{6} - 2A\right)\left(\frac{n(n^2-1)}{6} - 2B\right)}} \quad (1)$$

де А і В – поправочні коефіцієнти для ланцюгів відповідно в послідовностях рангів v і w :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{12} \sum_j (A_j^3 - A_j), \quad j=1,2,\dots,z, \\ B &= \frac{1}{12} \sum_j (B_j^3 - B_j), \quad k=1,2,\dots,p. \end{aligned} \quad (2)$$

j – порядкові номери ланцюгів серед рангів v , якщо існує один ланцюг, то $j = 1$, якщо два, то $j = 1, 2$ і т.д.; A_j – число однакових значень ряду v , що належать одному ланцюгу; у випадку коли другому ланцюгу належить п’ять однакових значень, вони позначаються як: $A_2 = 5$. k і B_k визначаються по аналогії.

Коефіцієнт рангової кореляції приймає значення всередині інтервалу $-1 \leq r_s \leq +1$. Якщо $v_i = w_i$, то $r_s=1$. У цьому випадку є повна погодженість між елементами двох рядів. Кожен елемент займає одне і теж саме місце в обох рядах, що означає повну позитивну кореляцію рангів. Якщо $r_s = -1$, то елементи двох рядів розташовані в зворотному порядку і між ними повна неузгодженість. Це означає повну від’ємну кореляцію рангів. І нарешті, якщо $r_s = 0$, те це свідчить про відсутність кореляції між рангами.

Приклад розрахунку коефіцієнта Спірмена

Визначимо тісноту зв’язку між продуктивністю праці і рівнем механізації робіт на 10 промислових підприємствах. Дані наведені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Продуктивність праці і рівень механізації робіт на 10 підприємствах

Підприємство	Середній вихід продукції в одиницю робочого часу, вир./год.	Коефіцієнт механізації робіт, %	Ранги значень змінних		Різниці рангів	
			w_i	v_i	$(v_i - w_i)$	$(v_i - w_i)^2$
t	y_i	x_i	w_i	v_i	$(v_i - w_i)$	$(v_i - w_i)^2$
1	127	43	1	4	+3	9
2	120	51	2	1	-1	1
3	125	55	3	2	-1	1
4	126	57	4	3	-1	1
5	133	60	5	7	+2	4
6	129	62	6	5	-1	1
7	132	65	7	6	-1	1
8	135	68	8	8,5	+0,5	0,25
9	135	70	9	8,5	-0,5	0,25
10	140	74	10	10	0	0
Сума	1302	605	55	55	0	18,5

Наприклад, ранг $v_5=7$ означає, що підприємство 5 за рівнем механізації робіт стоїть на сьомому місці при розташуванні підприємств за зростанням відповідного показника. За даними табл.3 розрахуємо коефіцієнт рангової кореляції:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 18,5}{10(10^2 - 1)} = 0,888$$

У послідовності рангів v_i існує одна зв'язана пара ("ланцюг"). Знайдемо поправочний коефіцієнт за формулами (2). У нашій задачі введення поправки не приведе до істотної зміни величини коефіцієнта рангової кореляції, тому що число ланцюгів і кількість рангів у ланцюзі невелике. Отже, маємо ($j = 1$):

$$A = \frac{1}{12}(2^3 - 2) = 0,5, \quad B = 0,$$

$$\frac{\frac{10(10^2 - 1)}{6} - 18,5 - 0,5}{\sqrt{\left(\frac{10(10^2 - 1)}{6} - 2 \cdot 0,5\right) \left(\frac{10(10^2 - 1)}{6}\right)}} = 0,889$$

Величина r_s свідчить про тісний позитивний зв'язок між продуктивністю праці і рівнем механізації робіт. Коефіцієнт парної кореляції, розрахований безпосередньо по вихідним даним, дорівнює: $r_{yx}=0,833$. Співставлення r_s і r_{yx} переконує в тому, що вони мало відрізняються один від одного. Коефіцієнт рангової кореляції в загальному є досить гарною характеристикою ступеню зв'язку досліджуваних змінних. Його перевага полягає в тому, що він не пов'язаний з передумовою нормальності розподілу вихідних даних. Але не слід уникати того, що при переході від початкових значень до рангів відбувається певна втрата інформації. Коефіцієнт рангової кореляції тим більше наближається до коефіцієнта парної кореляції, чим менше кореляційний зв'язок між досліджуваними змінними відрізняється від лінійного і чим тісніший цей зв'язок.

Метод рангової кореляції не вимагає лінійної кореляції між змінними. Однак, необхідно, щоб функція регресії, що відображує цей зв'язок, була монотонною.

Особливо корисною рангова кореляція є при дослідженні зв'язків між явищами, що не піддаються кількісній оцінці. У таких випадках дослідник на основі свого досвіду, чи порівнянь з яким-небудь еталоном, надає елементам вибірки ранги по кожному з досліджуваних якісних ознак. Наприклад, рангову кореляцію можна використовувати при дослідженні залежності між сортами продукції і виробничими витратами. При вивченні якості виробів їх часто класифікують по наступних рівнях: "відмінне, дуже гарне, гарне, середнє, погане". Аналогічно можна скласти шкалу і для інших ознак.

Рангову кореляцію широко використовують також при анкетуванні й опитуваннях населення, при обробці результатів різноманітних тестів. Таким чином, рангова кореляція виявляється корисною завжди для вивчення зв'язків там, де властивості явищ не піддаються точному кількісному виміру, але дозволяють робити порівняльну оцінку, завдяки якій складають послідовності рангів.

2. Коефіцієнт рангової кореляції Кендела

Наступний коефіцієнт рангової кореляції τ , не пов'язаний з передумовою нормальності генеральної сукупності, був запропонований Кенделом. Він обчислюється по рангах v_i і w_i . При цьому елементи вибірки розташовують так, щоб послідовність рангів однієї із змінних була натуральним рядом $1, 2, \dots, n$. Для кожного i -го члена послідовності рангів другої змінної встановлюємо числа p_i і q_i , що відображують відповідно прямий і зворотній порядок розташування наступних рангів. Потім підраховуємо суми цих чисел $P = \sum_i p_i$ та $Q = \sum_i q_i$, а також різницю отриманих $S = P - Q$. Коефіцієнт рангової кореляції є відношенням цієї різниці до найбільшого можливого значення P і Q , тобто до найбільшої можливої суми p_i або q_i . Таку величину можна отримати лише тоді, коли порядок рангів в обох послідовностях цілком збігається. Вона дорівнює:

$$S_{\max} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Коефіцієнт рангової кореляції Кендела можна обчислювати по одній з еквівалентних формул:

$$\tau = \frac{S}{S_{\max}} = \frac{2S}{n(n-1)},$$
$$\tau = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)} = \frac{4P}{n(n-1)} - 1.$$

Таким чином, для визначення τ досить розрахувати величину P , або Q . Найчастіше в формулу підставляють ту величину, яка має найменше значення. Величина τ лежить у межах $-1 \leq \tau \leq +1$. За даними таблиці 3 отримуємо:

$$\tau = 1 - \frac{4 \cdot 5}{10(10-1)} = 0,778.$$

По величині цього коефіцієнту можна зробити висновок про тісний зв'язок між продуктивністю праці і рівнем механізації робіт.

Розглянемо розрахунок τ по таблиці 4.3.

Таблиця 4.3

i	Ранги		Число рангів, розташованих у прямому порядку	Число рангів, розташованих у зворотному порядку
	v_i	w_i		
			$p_i (\geq)$	$q_i (\leq)$
1	4	1	6	3
2	1	2	8	0
3	2	3	7	0
4	3	4	6	0
5	7	5	3	2
6	5	6	4	0
7	6	7	3	0
8	8,5	8	2	0
9	8,5	9	1	0
10	10	10	0	0
Сума:	55	55	P=40	Q=5

Для цього використовуємо тільки послідовність рангів v_i . За першим числом цього ряду $v_1 = 4$ розташовано 6 рангів, які більше 4, і 3 рангів, які менші 4. За другим членом $v_2=1$ знаходяться 8 рангів, які більше 1, і 0 рангів, які менше 1. П'яте місце в послідовності займає ранг $v_5=7$, за яким знаходяться 3 більших рангів і 2 менших ранги. Число можливих положень i -го рангу в послідовності дорівнює: $(p_i + q_i) = n - i$. Наприклад, для першого члена послідовності $10 - 1 = 9$, для другого $10 - 2 = 8$. Цим можна скористатися для контролю.

Коефіцієнти Спірмена та Кендела побудовані по-різному, тому порівнювати ці коефіцієнти по величині само по собі не дає ніякої додаткової інформації про інтенсивність зв'язку.

3. Індекс Фехнера

Простим показником ступеню взаємозв'язку між двома статистичними рядами є індекс Фехнера. Для його визначення спочатку по кожному ряду обчислюють середні (\bar{x}, \bar{y}) і визначають знаки відхилень $x_i - \bar{x}$ і $y_i - \bar{y}$. Кожна пара спостережень (x_i, y_i) буде характеризуватися співпаданням знаків (+ +; - -;

+ –; – +). Позначимо через v кількість співпадань, а через w – кількість розбіжностей знаків “–”. Індекс Фехнера i визначається за формулою:

$$i = \frac{v - w}{v + w},$$

Половину відхилень, що дорівнюють нулю, відносять до v , половину – до w . Значення i знаходиться у інтервалі $+1 \leq i \leq -1$. При $i > 0$ маємо позитивну кореляцію, при $i < 0$ – від’ємну, а при $i = 0$ зв’язок відсутній.

Безсумнівною перевагою індексу Фехнера є простота обчислення. Але його великий недолік полягає в тому, що він враховує тільки кількість збігів і розбіжностей знаків відхилень. Тому він рекомендується лише для приблизної оцінки зв’язку.

4. Коефіцієнт конкордації

В економіці існує велике число причинно-обумовлених явищ, ознаки яких не піддаються точній кількісній оцінці. Це так названі атрибутивні ознаки. Наприклад, професія, форма власності, якість виробу, технологічні операції і т.д. Фахівець або експерт ранжує елементи сукупності, при цьому надає кожному з них порядковий номер, що відповідає підсумкам порівняння даної ознаки з іншими елементами. Якщо кількість ознак-змінних більше двох, то в результаті ранжування n елементів (підприємств або установ) з’являються m послідовностей рангів. Для перевірки, чи добре погоджені між собою отримані m рядів, використовується коефіцієнт погодження W , який називається коефіцієнтом конкордації Кендела і розраховується:

$$W = \frac{12 \sum_i D_i^2}{m^2 (n^3 - n)}.$$

При наявності пов’язаних рангів коефіцієнт конкордації W обчислюється по формулі:

$$W = \frac{12 \sum_i D_i^2}{m^2 (n^3 - n) - mB}$$

де $D_i = \sum_{j=1}^m R_{ij} - \frac{\sum_j \sum_i R_{ij}}{n}$, $i = 1, 2, \dots, m$ – сума рангів, наданих всіма експертами i -му елементу вибірки, мінус середнє значення цих сум рангів; m – число експертів або ознак, зв'язок між якими оцінюється; n – обсяг вибірки

(число підприємств чи установ), $B = \sum_{k=1}^z (B_k^3 - B_k)$, де B_k – число пов'язаних рангів $k=1, \dots, z$. Наприклад, якщо пов'язуються елементи від восьмого до одинадцятого включно, тоді $B_k=4$. Коефіцієнт W приймає значення в інтервалі $0 \leq W \leq 1$.

Приклад розрахунку

Маємо групу, яка складається з трьох експертів і оцінює якість однотипних виробів, виготовлених на 6 підприємствах. Кожен експерт упорядкував вироби за ступенем переваги. Результати наведені в стовпцях 2, 3, 4 таблиці 4.4.

Сума рангів для кожного i -го підприємства зазначена в стовпці 5. Для визначення D необхідно спочатку обчислити середнє значення по сумах рангів:

$$\frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^6 R_{ij}}{6} = \frac{63}{6} = 10,5.$$

Таблиця 4.4.

Висновки експертів про якість виробів, які виготовлені на 6 підприємствах

Підприємство	Експерти			Сума рангів		
	1	2	3	$\sum_{j=1}^3 R_{ij}$	$D(R_{ij} - \bar{R}_{ij})$	$D(R_{ij} - \bar{R}_{ij})^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	2	1	4	-6,5	42,25
2	2	1	3	6	-4,5	20,25
3	4	4,5	3	11,5	+1,0	1,00
4	5	4,5	6	15,5	+5,0	25,00
5	3	3	3	9	-1,5	2,25
6	6	6	5	17	+6,5	42,25
Сума	21	21	21	63		133,00

Отримане середнє значення віднімаємо із кожної i -ої суми рангів і різницю записуємо в стовпець 6. Суму квадратів відхилень підставляємо в чисельник формули. У знаменнику формули міститься величина B . Для нашого приклада $B = (2^3 - 2) + (3^3 - 3) = 30$. Число підприємств $n = 6$, число експертів $m = 3$. Таким чином, коефіцієнт W :

$$W = \frac{12 \cdot 133}{3^2 (6^3 - 6) - 3 \cdot 30} = 0,8867.$$

Величина коефіцієнта W дозволяє зробити висновок, що при оцінці якості виробів думки експертів погоджуються між собою. Якщо замість експертів розглядати ознаки явищ, то цілком очевидно, що коефіцієнт W буде єдиною вибірковою мірою зв'язку між цими ознаками. Таким чином, коефіцієнт конкордації можна розглядати як показник тісноти зв'язку у випадку множинної регресії.

Контрольні питання:

1. Що таке рангова кореляція і при яких дослідженнях вона використовується.
2. Дайте визначення простих рангів.
3. Дайте визначення зв'язаних рангів.
4. Як обчислюється коефіцієнт рангової кореляції Спірмена і який його економічний зміст.
5. Коефіцієнт рангової кореляції Кендела і його економічний зміст.
6. Індекс Фехнера і його економічний зміст.
7. Коефіцієнт конкордації Кендела і його економічний зміст.

Лабораторна робота №5

Тема. Дослідження мультиколінеарності пояснювальних змінних

Плрядок виконання

На витрати обігу впливають: обсяг вантажообігу, запаси з вантажообігу та трудомісткість одиниці вантажообігу. На підставі даних (таблиці 5.1-5.3) побудувати економетричну модель цієї залежності за методом ІМНК, дослідити наявність мультиколінеарності. Умова, яка приймається: між факторами вантажообігу, запасів та трудомісткості не існує мультиколінеарності.

Таблиця 5.1.

Вантажообіг, грн.

№	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	15,2	15,4	17,1	18,4	15,6	16,1	18,9	21,2	25,6	14,9	16,9	15,6	18,9	16,9	25,8
2	16,4	14,6	18,2	17,5	15,8	15,2	19,5	20,3	24,4	16,6	19,9	15,8	15,6	17,9	24,3
3	16,3	15,7	18,7	18,7	15,7	16,3	20,4	21,5	24,5	17,8	15,6	15,9	18,8	18,6	27,1
4	14,3	15,1	13,4	19,8	14,7	16,5	19,6	21,2	25,3	14,6	14,7	16,9	16,9	15,8	21,2
5	16,5	16,2	13,7	18,9	15,8	16,3	19,6	21,4	27,1	15,8	16,9	25,5	17,8	19,2	19,4
6	16,5	16,2	14,2	18,9	15,9	16,4	18,7	21,8	21,3	15,9	13,6	24,6	19,3	17,5	18,5
7	16,7	16,4	15,3	18,7	17,9	16,5	18,6	22,7	23,2	16,6	14,9	26,1	21,5	14,8	15,7
8	16,5	15,3	14,8	17,5	15,9	17,8	19,4	22,9	24,6	14,7	14,9	24,8	23,7	19,5	18,7
9	16,7	16,2	14,3	16,4	15,4	17,1	19,6	24,1	25,3	17,8	19,9	26,8	23,8	17,8	14,9
10	18,1	17,1	17,1	16,5	15,7	16,2	19,7	24,1	24,9	15,9	17,8	26,9	25,8	19,4	15,7

Таблиця 5.2.

Запаси з вантажообігу, грн.

№	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	40,2	41,2	42,5	45,6	36,5	42,5	42,5	39,8	41,6	38,9	41,5	42,8	42,5	35,6	45,6
2	40,3	41,5	43,6	42,5	35,6	41,5	43,6	39,4	42,8	38,7	42,5	43,9	42,6	34,8	45,8
3	41,5	41,3	42,5	43,5	36,5	41,6	45,8	35,8	43,8	36,7	41,6	45,9	41,8	36,9	42,8
4	39,8	41,3	42,8	41,6	34,5	43,5	41,7	36,7	42,9	35,8	43,5	41,8	46,5	38,7	43,9
5	39,4	41,5	39,4	48,9	36,8	42,8	41,9	38,9	42,8	34,7	41,8	39,8	39,8	38,4	42,8
6	38,7	41,8	38,7	42,9	36,9	41,8	41,8	34,7	43,7	39,1	41,7	39,7	39,7	38,2	41,6
7	39,4	42,5	36,5	39,5	34,5	42,7	41,6	42,5	39,9	38,7	39,8	42,8	38,7	36,5	39,8
8	32,5	41,7	36,4	38,4	35,7	42,9	39,8	41,8	42,8	35,6	37,8	43,6	36,5	39,4	38,7
9	34,5	45,9	36,8	36,5	36,5	39,8	39,7	38,7	43,8	34,8	39,5	45,8	39,4	38,4	37,6
10	35,6	42,3	36,9	36,9	34,4	37,5	38,7	34,9	46,5	37,4	41,6	46,7	38,5	35,4	35,6

Таблиця 5.3.

Трудомісткість одиниці вантажообігу, людино-годин

№	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2,11	2,03	1,95	2,13	2,12	1,74	1,86	1,88	1,74	2,46	1,91	3,01	2,06	2,55	2,15
2	2,12	2,15	2,83	2,56	1,91	2,25	2,02	1,82	2,21	2,00	2,13	2,12	2,31	2,14	2,85
3	2,14	2,09	2,29	2,45	1,99	2,21	2,48	2,25	2,00	1,87	2,15	2,05	2,15	2,74	2,47
4	2,15	2,1	2,33	2,58	1,99	2,00	2,00	1,74	2,89	1,89	2,42	2,14	2,14	2,85	2,65
5	2,32	2,45	2,31	2,82	1,90	1,89	1,86	2,31	1,82	1,19	2,13	2,42	2,45	1,09	2,85
6	2,15	2,16	2,51	2,33	2,00	1,98	1,98	1,82	2,15	2,25	1,89	2,06	2,84	1,85	2,45
7	2,18	2,18	2,11	2,31	1,88	1,90	2,10	1,87	2,45	2,15	1,95	2,00	1,68	1,46	2,75
8	2,19	2,54	2,42	1,96	2,08	1,82	1,90	1,59	2,65	2,14	2,52	2,15	1,75	1,46	1,85
9	2,2	2,32	2,38	2,13	2,11	1,77	2,48	2,00	2,13	2,45	2,41	1,89	2,00	1,38	1,65
10	2,15	2,8	2,46	1,90	1,91	1,57	2,20	2,35	2,02	2,46	2,15	1,02	1,09	2,09	1,75

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи 5

На середньомісячну заробітну плату впливає ряд чинників. Серед них продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили (таблиця 5.4). Щоб побудувати економетричну модель заробітної плати від згаданих чинників згідно з методом найменших квадратів, потрібно переконатися, що продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили як незалежні змінні моделі — не мультиколеніарні.

Дослідити наведені чинники на наявність мультиколеніарності.

Таблиця 5.4.

Вихідні дані

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-днів	Фондомісткість, млн грн.	Коефіцієнт плинності робочої сили, %	Середньомісячна зарплата
1	32	0,89	19,5	45
2	29	0,43	15,6	42
3	30	0,70	13,5	50
4	31	0,61	9,5	55
5	25	0,51	23,5	40
6	34	0,51	12,5	70
7	29	0,65	17,5	56
8	24	0,43	14,5	57
9	20	0,51	14,5	55
10	33	0,92	7,5	53

Для цього необхідно:

1. Нормалізувати пояснюючі змінні.
2. Знайти кореляційну матрицю.
3. Обчислимо детермінант кореляційної матриці r і критерій

χ^2 :

4. Знайти матрицю, обернену до матриці r .
5. Визначити F-критерій.
6. Обчислити частинні коефіцієнти кореляції.
7. Визначити t-критерій.
8. Побудувати економетричну модель за методом 1 МНК.
9. Зробити висновки щодо мультиколінеарності.

Розглянемо більш детально кожен крок:

Необхідні розрахунки надані у таблиці 5.5.

Таблиця 5.5.

Розрахунки

$x_{i1} - \bar{x}_1$	$x_{i2} - \bar{x}_2$	$x_{i3} - \bar{x}_3$	$(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$	$(x_{i2} - \bar{x}_2)^2$	$(x_{i3} - \bar{x}_3)^2$	x_{i1}^*	x_{i2}^*	x_{i3}^*
3,3	0,004	-3,4	10,89	0,000016	11,56	0,2487	0,0091	-0,2518
0,3	-0,156	1,6	0,09	0,024336	2,56	0,0226	-0,3531	0,1185
1,6	0,114	-0,4	1,89	0,012995	0,16	0,0980	0,2580	-0,0296
2,3	0,024	-4,4	5,29	0,000576	19,36	0,1733	0,0543	-0,3258
-3,7	-0,676	9,6	13,89	0,005776	92,16	-0,2788	-0,1720	0,7108
5,3	-0,078	-1,4	28,09	0,005776	1,96	0,3994	-0,1720	-0,1037
0,3	0,064	-3,6	0,09	0,004096	12,96	0,0226	0,1448	0,2666
-4,7	-0,156	0,6	22,09	0,024336	0,35	-0,3541	-0,3531	0,0444
-8,7	-0,076	0,6	75,89	0,005778	0,35	-0,6556	-0,1720	0,0444
4,3	0,334	-6,4	14,49	0,111555	40,95	0,3240	0,7559	-0,4739
ВСЬО			176,1	0,19524	182,4			

Крок 1. Нормалізація змінних.

Позначимо вектори незалежних змінних — продуктивності праці, фондомісткості, коефіцієнтів плинності робочої сили — через x_1, x_2, x_3 . Елементи стандартизованих векторів обчислимо за формулою:

$$x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n \sigma_{x_k}^2}},$$

де n — кількість спостережень, $n = 10$;

m — число незалежних змінних, $m = 3$;

\bar{x}_k — середнє арифметичне значення вектора x_k ;

$\sigma_{x_k}^2$ — дисперсія змінної x_k .

Із формули бачимо, що спочатку потрібно обчислити середні арифметичні для кожної пояснювальної змінної:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i1}}{n} = \frac{287}{10} = 28,7;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i2}}{n} = \frac{5,86}{10} = 0,586 ;$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i3}}{n} = \frac{139}{10} = 13,9$$

Усі розрахункові дані для стандартизації змінних x_1 , x_2 , x_3 згідно з поданими співвідношеннями наведено в таблиці.

Дисперсії кожної незалежної змінної мають такі значення:

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{n} = \frac{176,1}{10} = 17,61;$$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{n} = \frac{0,19524}{10} = 0,0195 ;$$

$$\sigma_{x_3}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_{i3} - \bar{x}_3)^2}{n} = \frac{182,4}{10} = 18,24 .$$

Тоді знаменник для стандартизації кожної незалежної змінної буде такий:

$$x_1 : \quad \sqrt{n\sigma_{x_1}^2} = \sqrt{10 \cdot 19,57} = 13,27;$$

$$x_2 : \quad \sqrt{n\sigma_{x_2}^2} = \sqrt{10 \cdot 0,0217} = 0,44;$$

$$x_3 : \quad \sqrt{n\sigma_{x_3}^2} = \sqrt{10 \cdot 20,27} = 13,51.$$

Матриця стандартизованих змінних подається у вигляді:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,2487 & 0,0091 & -0,2518 \\ 0,0226 & -0,3531 & 0,1185 \\ 0,0980 & 0,2580 & -0,0296 \\ 0,1733 & 0,0543 & -0,3258 \\ -0,2788 & -0,1720 & 0,7108 \\ 0,3994 & -0,1720 & -0,1037 \\ 0,0226 & 0,1448 & 0,2666 \\ -0,3542 & -0,3531 & 0,0444 \\ -0,6556 & -0,1720 & 0,0444 \\ 0,3240 & 0,7559 & -0,4739 \end{pmatrix}$$

Крок 2. Знаходження кореляційної матриці:

$$r = X^{*'} X^*,$$

де X^* — матриця, транспонована до X^* .

Ця матриця симетрична і має розмір 3×3 . Для даної задачі

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,494 & -0,551 \\ 0,494 & 1 & -0,5168 \\ -0,551 & -0,5168 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент цієї матриці характеризує тісноту зв'язку однієї незалежної змінної з іншою. Оскільки діагональні елементи характеризують тісноту зв'язку кожної незалежної з цією самою змінною, то вони дорівнюють одиниці. Зауважимо, що при знаходженні добутку матриць $X^{*'} X^*$ за рахунок зміщеності коефіцієнтів парної кореляції числові значення діагональних елементів можуть наближатись до одиниці. Якщо це так, то вони замінюються одиницями, а інші значення матриці r збільшуються на величину, що визначається як різниця між одиницею і діагональним елементом.

Інші елементи матриці r дорівнюють:

$$r_{x_1 x_2} = 0,494;$$

$$r_{x_1 x_3} = 0,551;$$

$$r_{x_2 x_3} = 0,5168,$$

тобто вони є парними коефіцієнтами кореляції між пояснювальними змінними. Користуючись цими коефіцієнтами, можна зробити

висновок, що між змінними x_1, x_2, x_3 існує зв'язок. Але чи можна стверджувати, що цей зв'язок є виявленням мультиколінеарності, а через це негативно впливатиме на оцінку економетричної моделі?

Щоб відповісти на це запитання, потрібно ще раз звернутися до алгоритму Фаррара — Глобера і знайти статистичні критерії оцінки мультиколінеарності.

Крок 3. Обчислимо детермінант кореляційної матриці r і критерій χ^2 :

а) $D = |r| = 0,466$;

б) $\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right] \ln|r| = -\left[9 - \frac{1}{6}(6 + 5)\right] \ln 0,466 = 2,37$.

При ступені свободи $1 - \frac{m(m-1)}{6} = 3$ і рівні значущості $\alpha = 0,01$ критерій $\chi^2_{табл} = 11,34$. Оскільки $\chi^2_{факт} < \chi^2_{табл}$, доходимо висновку, що в масиві змінних не існує мультиколінеарності.

Крок 4. Знайдемо матрицю, обернену до матриці r :

$$C = r^{-1} = (X^* X^*)^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1,57 & -0,45 & 0,63 \\ -0,45 & 1,49 & 0,52 \\ 0,63 & 0,52 & 1,62 \end{pmatrix}$$

Крок 5. Використовуючи діагональні елементи матриці C , обчислимо F-критерії:

$$F_1 = (c_{11} - 1) \frac{n - m}{m - 1} = (1,57 - 1) \frac{7}{2} = 2,00;$$

$$F_2 = (c_{22} - 1) \frac{n - m}{m - 1} = (1,49 - 1) \frac{7}{2} = 1,72;$$

$$F_3 = (c_{33} - 1) \frac{n - m}{m - 1} = (1,62 - 1) \frac{7}{2} = 2,17.$$

Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і ступенів свободи $\gamma_1 = 7$ і $\gamma_2 = 2$ критичне (табличне) значення критерію $F = 4,74$.

Оскільки

$$F_{1\text{факт}} < F_{\text{табл}};$$

$$F_{2\text{факт}} < F_{\text{табл}};$$

$$F_{3\text{факт}} < F_{\text{табл}},$$

то ні одна з незалежних змінних не мультиколінеарна з двома іншими.

Щоб визначити наявність попарної мультиколінеарності, продовжимо дослідження і перейдемо до кроку 6.

Крок 6. Обчислимо частинні коефіцієнти кореляції, скориставшись елементами матриці С:

$$r_{12,3} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{22}}} = \frac{0,49}{\sqrt{1,57 \cdot 1,49}} = 0,293$$

$$r_{13,2} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{33}}} = \frac{-0,63}{\sqrt{1,57 \cdot 1,62}} = -0,397;$$

$$r_{23,1} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{22} \cdot c_{33}}} = \frac{-0,52}{\sqrt{1,49 \cdot 1,62}} = -0,337.$$

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв'язку між Двома змінними за умови, що третя не впливає на цей зв'язок.

Порівнявши частинні коефіцієнти кореляції з парними, які було наведено раніше, можна помітити, що частинні коефіцієнти значно менші за парні. Це ще раз показує, що на підставі парних коефіцієнтів кореляції не можна Зробити висновків про наявність мультиколінеарності чи її відсутність.

Крок 7. Визначимо t-критерій на основі частинних коефіцієнтів кореляції.

$$t_{12} = \frac{r_{12,3} \sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{12,3}^2}} = \frac{0,293 \sqrt{7}}{\sqrt{1-0,0858}} = 0,811;$$

$$t_{13} = \frac{r_{13,2} \sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{13,2}^2}} = \frac{0,39 \sqrt{7}}{\sqrt{1-0,1521}} = 1,146;$$

$$t_{23} = \frac{r_{23,1} \sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{23,1}^2}} = \frac{0,34 \sqrt{7}}{\sqrt{1-0,1136}} = 0,947.$$

Табличне значення F-критерію при 5% рівні значущості і 5 ступенях свободи і

рівні значущості $\alpha = 0,05$ дорівнює 1,69. Усі числові значення t-критеріїв, знайдених для кожної пари змінних, менші за їх табличні значення. Звідси робимо висновок, що всі пари незалежних змінних не є мультиколінеарними. Тому побудова економетричної моделі не є доцільно.

Крок 8. Побудова економетричної моделі за методом 1 МНК.

Але, якщо припустити наявність тісного взаємозв'язку між факторами X_1 , X_2 і показником Y можна побудувати економетричну модель.

Будуємо економетричну модель методом 1 МНК на основі даних. Допустимо, що між показником Y і факторами X_1 , X_2 існує лінійна залежність $Y = a_0 + a_1 * X_1 + a_2 * X_2$. Знайдемо оцінки параметрів використовуючи матричні операції.

Оператор оцінювання параметрів моделі за 1МНК має вигляд: $A = (X'X)^{-1} X'Y$,

транспонована матриця до матриці X	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	32	29	30	31	25	34	29	24	20	33
	0,89	0,43	0,7	0,61	0,51	0,51	0,65	0,43	0,51	0,92

X'X=	77,835	66,195	72,35
	56,644	48,178	52,82
	64,415	56,105	60,45

(X'X)^-1=	2,9980	-3,3853	-0,6301
	1,2747	-2,6222	0,7656
	-4,3777	6,0411	-0,0226

X'Y=	523
	15084
	320,48

A=	(-0,05	-0,039	0,089)
----	---------	--------	---------

Таким чином економетрична модель має вигляд:
 $Y = -0.05 - 0.039X_1 + 0.089X_2$

Крок 9. Висновки.

На середньомісячну заробітну плату впливає ряд чинників. Серед них продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили. Щоб побудувати економетричну модель заробітної плати від згаданих чинників згідно з методом найменших квадратів, потрібно переконатися, що продуктивність праці, фондомісткість та коефіцієнт плинності робочої сили як незалежні змінні моделі — не мультиколінійні. Для цього виконані наступні кроки: Крок 1. Нормалізація змінних. Крок 2. Знаходження кореляційної матриці. Кожний елемент цієї матриці характеризує тісноту зв'язку однієї незалежної змінної з іншою. Оскільки діагональні елементи характеризують тісноту зв'язку кожної незалежної з цією самою змінною, то вони дорівнюють одиниці. Зауважимо, що при знаходженні добутку матриць $X^* X^*$ за рахунок зміщеності коефіцієнтів парної кореляції числові значення діагональних елементів можуть наближатись до одиниці. Якщо це так, то вони замінюються одиницями, а інші значення матриці Γ збільшуються на величину, що визначається як різниця між одиницею і діагональним елементом. Інші елементи матриці Γ є парними коефіцієнтами кореляції між пояснювальними змінними. Користуючись цими коефіцієнтами, можна зробити висновок, що між змінними x_1, x_2, x_3 існує зв'язок. Щоб відповісти на це запитання, потрібно ще раз звернутися до алгоритму Фаррара — Глобера і знайти статистичні критерії оцінки мультиколінеарності. Для цього виконуємо крок 3 - обчислення детермінант кореляційної матриці Γ і критерій χ^2 .

При ступені свободи $m(m - 1) = 3$ і рівні значущості $\alpha = 0,01$ критерій $\chi^2_{табл} = 11,34$. Оскільки $\chi^2_{факт} < \chi^2_{табл}$, доходимо висновку, що в масиві змінних не існує мультиколінеарності. Крок 4. Знаходимо матрицю, обернену до матриці Γ . Крок 5. Використовуючи діагональні елементи матриці S , обчислимо F-критерії. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і ступенів свободи $\gamma_1 = 7$ і $\gamma_2 = 2$ критичне (табличне) значення критерію $F = 4,74$.

Оскільки

$$F_{1\text{факт}} < F_{\text{табл}};$$

$$F_{2\text{факт}} < F_{\text{табл}};$$

$$F_{3\text{факт}} < F_{\text{табл}},$$

то ні одна з незалежних змінних не мультиколінеарна з двома іншими. Щоб визначити наявність попарної мультиколінеарності, перейдемо до кроку 6.

Крок 6. Обчислення частинних коефіцієнтів кореляції, скориставшись елементами матриці С. Частинні коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв'язку між двома змінними за умови, що третя не впливає на цей зв'язок. Порівнявши частинні коефіцієнти кореляції з парними, які було наведено раніше, можна помітити, що частинні коефіцієнти значно менші за парні. Це ще раз показує, що на підставі парних коефіцієнтів кореляції не можна зробити висновків про наявність мультиколінеарності чи її відсутність.

Крок 7. Визначаємо t-критерій на основі частинних коефіцієнтів кореляції. Табличне значення F-критерію при $n-m=7$ ступенях свободи і рівні значущості $\alpha = 0,05$ дорівнює 1,69. Усі числові значення t-критеріїв, знайдених для кожної пари змінних, менші за їх табличні значення. Звідси робимо висновок, що всі пари незалежних змінних не є мультиколінеарними.

Контрольна запитання.

1. Поняття мультиколінеарності.
2. Причини виникнення мультиколінеарності.
3. Тестування наявності мультиколінеарності.
4. Методи усунення мультиколінеарності.

Лабораторна робота №6

Тема. Узагальнений метод найменших квадратів. Гетероскедастичність.

На підставі нижче наведених даних виконати такі завдання:

1. Дослідити наявність гетероскедастичності в загальній економетричній моделі за допомогою методів тестування економічної інформації:

1) параметричного тесту Гольдфельда –Квандта;

2) тесту Глейсера.

2. Оцінити параметри моделі за допомогою методів 1МНК і Ейткена.

3. Виконати точковий та інтервальний прогноз попиту.

4. Здійснити порівняльний аналіз кількісних характеристик взаємозв'язку, здобутих методом найменших квадратів і узагальненим методом Ейткена.

5. Зробити висновки.

У таблицях 6.1-6.4 надано вихідні дані для цієї лабораторної роботи.

Таблиця 6.1.

Попит, грн.

	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102
2	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107
3	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106
4	66	69	72	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108
5	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109
6	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113
7	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116
8	75	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117
9	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115
10	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118
11	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120	123
12	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118	121	124
13	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125
14	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118	121	124	127
15	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128

Таблиця 6.2.

Дохід на одну особу, грн.

	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	210	213	216	219	222	225	228	231	234	237	240	243	246	249	252
2	211	214	217	220	223	226	229	232	235	238	241	244	247	250	253
3	215	218	221	224	227	230	233	236	239	242	245	248	251	254	257
4	220	223	226	229	232	235	238	241	244	247	250	253	256	259	262
5	225	228	231	234	237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267
6	230	233	236	239	242	245	248	251	254	257	260	263	266	269	272
7	235	238	241	244	247	250	253	256	259	262	265	268	271	274	277
8	234	237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	270	273	276
9	237	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	270	273	276	279
10	240	243	246	249	252	255	258	261	264	267	270	273	276	279	282
11	245	248	251	254	257	260	263	266	269	272	275	278	281	284	287
12	246	249	252	255	258	261	264	267	270	273	276	279	282	285	288
13	247	250	253	256	259	262	265	268	271	274	277	280	283	286	289
14	280	283	286	289	292	295	298	301	304	307	310	313	316	319	322
15	285	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315	318	321	324	327

Таблиця 6.3.

Ціна одиниці товару, грн.

	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
2	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
3	18,5	19,5	20,5	21,5	22,5	23,5	24,5	25,5	26,5	27,5	28,5	29,5	30,5	31,5	32,5
4	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
5	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	15,5	16,5	17,5	18,5	19,5	20,5	21,5	22,5	23,5	24,5	25,5	26,5	27,5	28,5	29,5
7	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
8	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
9	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
10	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
11	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
12	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
13	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
14	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
15	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Таблиця 6.4.

Ціна одиниці взаємо замінюваних товарів, грн.

	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3	5,1	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,1	12,1	13,1	14,1	15,1	16,1	17,1	18,1	19,1
4	5,2	6,2	7,2	8,2	9,2	10,2	11,2	12,2	13,2	14,2	15,2	16,2	17,2	18,2	19,2
5	5,3	6,3	7,3	8,3	9,3	10,3	11,3	12,3	13,3	14,3	15,3	16,3	17,3	18,3	19,3
6	5,4	6,4	7,4	8,4	9,4	10,4	11,4	12,4	13,4	14,4	15,4	16,4	17,4	18,4	19,4
7	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5	18,5	19,5
8	5,6	6,6	7,6	8,6	9,6	10,6	11,6	12,6	13,6	14,6	15,6	16,6	17,6	18,6	19,6
9	5,7	6,7	7,7	8,7	9,7	10,7	11,7	12,7	13,7	14,7	15,7	16,7	17,7	18,7	19,7
10	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	6,1	7,1	8,1	9,1	10,1	11,1	12,1	13,1	14,1	15,1	16,1	17,1	18,1	19,1	20,1
12	6,2	7,2	8,2	9,2	10,2	11,2	12,2	13,2	14,2	15,2	16,2	17,2	18,2	19,2	20,2
13	6,3	7,3	8,3	9,3	10,3	11,3	12,3	13,3	14,3	15,3	16,3	17,3	18,3	19,3	20,3
14	6,4	7,4	8,4	9,4	10,4	11,4	12,4	13,4	14,4	15,4	16,4	17,4	18,4	19,4	20,4
15	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5	18,5	19,5	20,5

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи 6
 Вихідні дані наведено в таблиці 6.5.

Таблиця 6.5.

Вихідні дані

Місяць	Попит, грн.	Дохід на одну особу, грн.	Ціна одиниці товару, Грн.	Ціна одиниці взаємозамінюваних товарів, грн.
1-й	50,00	200,00	22,00	2,00
2-й	52,00	210,00	21,00	3,00
3-й	51,00	205,00	21,50	2,30
4-й	55,00	220,00	19,00	4,00
5-й	56,00	225,00	18,00	3,00
6-й	54,00	220,00	18,50	4,50
7-й	60,00	230,00	16,00	6,00
8-й	58,00	228,00	17,00	9,00
9-й	62,00	240,00	15,00	10,00
10-й	64,00	250,00	12,00	11,00
11-й	65,00	255,00	11,00	11,00
12-й	67,00	260,00	11,00	12,00

Дослідимо наявність гетероскедастичності в загальній економетричній моделі різними методами.

Параметричний тест Гольдфельда—Квандта.

1. Ідентифікуємо змінні.

Y — попит (залежна змінна);

X_1 — дохід на одну людину (незалежна, або пояснююча, змінна);

X_2 — ціна одиниці (незалежна, або пояснююча, змінна);

X_3 — ціна одиниці взаємозамінюваних товарів (незалежна, або пояснююча, змінна).

Звідси дістаємо загальний вигляд моделі:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, u),$$

де u — стохастична складова.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі.

Дістанемо лінійну модель:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + u \text{ (теоретична модель);}$$

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

$$u = Y - \hat{Y}$$

3. Встановимо наявність гетероскедастичності, застосовуючи тест Гольдфельда—Квандта. Розглядувану сукупність спостережень впорядковуємо за X_1 від меншого до значення більшого. Відшукуємо c спостережень, які містяться всередині сукупності:

$$\frac{c}{n} = \frac{4}{15} \text{ (оптимальне співвідношення між параметрами)}$$

Зауважимо, що ми висунули таку гіпотезу: дохід може викликати гетероскедастичність залишків.

У цьому прикладі $n = 12$ і $c \approx 3$. Отже, якщо ми відкинемо 3 елементи із середини, то в сукупності залишиться 9 елементів, які не діляться на 2 без остачі. Тому потрібно відкинути 3 елементи із середини та один елемент на початку сукупності й дістати дві сукупності: $n_1, n_2 = 4$.

3.1. Знайдемо економетричну модель для сукупності $n_1 = 4$. Оцінимо кількісно параметри моделі, скориставшись стандартною програмою «Лінійн»:

лін 1 :	0,2370	2,3333
	0,0392	8,3821
	0,9481	0,5092
	36,5714	2,0000
	9,4815	0,5185

Таким чином, на основі першої сукупності дістанемо таку економетричну модель:

$$Y = 2.33 + 0.24X_1$$

3.2. Побудуємо економетричну модель для сукупності $n_2 = 4$. Оцінимо кількісно параметри моделі, скориставшись також стандартною програмою «Лінійн»:

	0,2400	4,2000
	0,0302	7,6004
лін 2:	0,9692	0,4472
	63,0000	2,0000
	12,6000	0,4000

Отже, на основі другої сукупності дістанемо таку економетричну модель:

$$Y = 4.2 + 0.24X_1$$

3.3. На підставі наведених щойно даних знайдемо суму квадратів залишків (ці дані можна дістати зі стандартних програм «Лін1» та «Лін2», вони виділені в наведених розрахунках вище):

$$S_1 = u_1' u_1 = \sum (Y_1 - Y_1)^2$$

$$S_2 = u_2' u_2 = \sum (Y_2 - Y_2)^2$$

$$S_1 = 0,5185$$

$$S_2 = 0,4000$$

3.4. Знайдемо критерій

$$R^* = \frac{S_2}{S_1}$$

$$R^* = \frac{0.4}{0.5185} = 0.77$$

Порівняємо це значення з табличним значенням критерію Фішера (F-критерію), коли маємо $\frac{n-c-2m}{2} = 2$ ступенів свободи та $\alpha = 0,5$. Значення критерію R^* менше від табличного значення критерію Фішера ($0,77 < 19$), а отже, у масиві змінних гетероскедастичності немає.

Тест Глейсера.

Цей тест базується на визначенні регресійної залежності між модулем залишків та тією змінною, яка може спричинитися до

гетероскедастичності,

$$|u| = a_0 + a_1 X_j$$

У цій моделі перевіряється достовірність оцінок параметрів a_0 та a_1 .

Достовірність параметрів a_0 та a_1 можна дістати, скориставшись стандартною програмою «Лінійн», де вхідними даними замість вектора Y (попит) були значення залишків, здобутих методом 1 МНК за модулем та відповідна незалежна змінна X (дохід на одну людину, або ціна одиниці товару, або одиниці взаємозамінюваних товарів).

Виконаємо обчислення, маючи на меті встановити наявність гетероскедастичності залишків для доходу на одну особу (X_1):

„Лінійн” =	0,00715	-1,12923
	0,00800	1,83442
	0,07399	0,51559
	0,79900	10
	0,21240	2,65829

Далі визначаємо достовірність параметрів моделі за критерієм С'тьюдента (t-критерієм):

$$t_{aj} = \frac{a_j}{S_{aj}}$$

де a_j — оцінка відповідного параметра моделі;

S_{aj} — стандартна похибка оцінки.

Зокрема маємо:

$$t_{a_0} = \frac{-1.33}{1.83} = -0.59$$
$$t_{a_1} = \frac{0.007}{0.008} = 0.87$$

Як бачимо, обчислені значення t-критерію для ϵ_0 та ϵ_1 , менші за табличне значення (1,86) цього критерію при $\alpha = 0,05$, а отже, оцінки параметрів статистично незначущі, тобто залишки не є гетероскедастичними.

З'ясуємо, чи є гетероскедастичними залишки для ціни одиниці Товару (X_2):

	0,0330	1,0611
„Лінійн”=	0,0397	0,6852
	0,0647	0,5182
	0,6914	10
	0,1857	2,6850

Установимо достовірність параметрів моделі згідно з критерієм Стюдента (t-критерієм):

$$t_{a_0} = \frac{1.06}{0.69} = 1.54$$

$$t_{a_1} = \frac{-0.03}{0.04} = 0.75$$

Як бачимо, значення t-критерію для a_0 , коли рівень значущості $\alpha = 0,05$, також менше за табличне значення t - критерію (1,86). Отже, оцінки параметрів статистично незначущі, а залишки не є гетероскедастичними.

Виконаємо обчислення, щоб установити наявність гетероскедастичності залишків для ціни одиниці взаємозамінюваних товарів (X_3):

	-0,04813	1,11997
„Лінійн”=	0,03833	0,28927
	0,13622	0,46969
	1,57698	10
	0,34789	2,20608

Виконаємо обчислення, щоб з'ясувати достовірність оцінок параметрів моделі згідно з критерієм Стюдента (t-критерієм):

$$t_{a_0} = \frac{1.11}{0.28} = 3.97$$

$$t_{a_1} = \frac{-0.05}{0.04} = -1.25$$

Отже, значення t-критерію для a_0 , при $\alpha = 0,05$, більше за табличне значення t-критерію (1,86). Звідси випливає, що оцінка параметру a_0 є статистично значущою, а залишки мають змішану гетероскедастичність.

Висновок. В економетричній моделі для вихідних даних виявлено змішану гетероскедастичність, а тому для оцінювання параметрів моделі не можна застосовувати метод найменших квадратів.

Метод Ейткена.

Якщо при економетричному моделюванні для певних вихідних даних буде виявлено явище гетероскедастичності, то параметри моделі слід оцінювати за узагальненим методом найменших

квадратів (методом Ейткена). Оператор оцінювання цим методом запишеться у вигляді:

$$A = (X'S^{-1}X)^{-1} X'S^{-1}Y$$

У матриці S' залежно від висунутої гіпотези виконується одна з трьох умов:

$$1) \lambda_i = \frac{1}{x_{ij}} \quad 2) \lambda_i = \frac{1}{x_{ij}^2} \quad 3) \lambda_i = u_i^2$$

Доцільно спинитися на третій гіпотезі, оскільки йдеться про змішану гетероскедастичність.

Запишемо матрицю пояснюючих змінних:

$$X = \begin{bmatrix} 1.00 & 200.00 & 22.00 & 2.00 \\ 1.00 & 210.00 & 21.00 & 3.00 \\ 1.00 & 205.00 & 21.50 & 2.50 \\ 1.00 & 220.00 & 19.00 & 4.00 \\ 1.00 & 225.00 & 18.00 & 5.00 \\ 1.00 & 220.00 & 18.50 & 4.50 \\ 1.00 & 230.00 & 16.00 & 6.00 \\ 1.00 & 228.00 & 17.00 & 9.00 \\ 1.00 & 240.00 & 15.00 & 10.00 \\ 1.00 & 250.00 & 12.00 & 11.00 \\ 1.00 & 255.00 & 11.00 & 11.00 \\ 1.00 & 260.00 & 11.00 & 12.00 \end{bmatrix}$$

Знайдемо матрицю, транспоновану до матриці пояснюючих змінних:

$$X' = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 200.00 & 210.00 & 205.00 & 220.00 & 225.00 & 220.00 & 230.00 & 228.00 & 240.00 & 250.00 & 255.00 & 260.00 \\ 22.00 & 21.00 & 21.50 & 19.00 & 18.00 & 18.50 & 16.00 & 17.00 & 15.00 & 12.00 & 11.00 & 11.00 \\ 2.00 & 3.00 & 2.50 & 4.00 & 5.00 & 4.50 & 6.00 & 9.00 & 10.00 & 11.00 & 11.00 & 12.00 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1.048 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.952 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.816 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.860 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.773 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.472 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.408 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.349 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.349 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.294 \end{bmatrix}$$

Обчислюємо діагональні елементи матриці S^{-1} згідно з третьою моделлю залишків за тестом Глейсера:

$$(u)^2 = (a_0 + a_1 X_3)^2 \quad (u)^2 = (1.11997 - 0.04813 X_3)^2$$

Нарешті запишемо добуток останньої матриці та матриці S^{-1} :
Перемножимо матрицю, транспоновану до матриці пояснюючих змінних, та матрицю S^{-1} .

$$X'S^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 209.6 & 204.9 & 199.9 & 179.5 & 189.2 & 174.0 & 107.5 & 158.9 & 97.9 & 87.2 & 88.9 & 76.5 \\ 23.1 & 21.5 & 20.0 & 15.1 & 16.3 & 13.9 & 8.0 & 11.1 & 6.1 & 4.2 & 3.8 & 3.2 \\ 2.1 & 2.5 & 2.9 & 3.7 & 3.4 & 3.9 & 4.2 & 4.1 & 4.1 & 3.8 & 3.8 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Матриця залежної змінної Y (попит на товар) має такий вигляд:

$$Y = \begin{bmatrix} 50.00 \\ 51.00 \\ 52.00 \\ 55.00 \\ 54.00 \\ 56.00 \\ 58.00 \\ 60.00 \\ 62.00 \\ 64.00 \\ 65.00 \\ 67.00 \end{bmatrix}$$

Перемножимо матрицю $X'S'$ та вектор Y попиту на товар:

$$X'S^{-1}Y = \begin{bmatrix} 446.321 \\ 99490.1 \\ 8022.9 \\ 2463.87 \end{bmatrix}$$

Перемножимо матрицю $X'S'$ та матрицю X незалежних змінних:

$$X'S^{-1}X = \begin{bmatrix} 8.01047 & 1773.97581 & 146.33183 & 42.0992 \\ 1773.97581 & 395075.267 & 31965.61685 & 9720.730565 \\ 146.331183 & 31965.61685 & 2762.153715 & 689.40742 \\ 42.0992 & 9720.730565 & 689.40742 & 299.235335 \end{bmatrix}$$

Знайдемо матрицю, обернену до попередньої:

$$(X'S^{-1}X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2797.45912 & -9.05130 & -43.79182 & 1.35283 \\ -9.05130 & 0.03007 & 0.13528 & -0.01515 \\ -43.79182 & 0.13528 & 0.73864 & 0.06469 \\ 1.35283 & -0.01515 & 0.06469 & 0.15613 \end{bmatrix}$$

Перемноживши попередню матрицю та матрицю $X'S^{-1}Y$, дістанемо матрицю оцінок параметрів економетричної моделі за допомогою узагальненого методу найменших квадратів:

$$A = \begin{bmatrix} 45,8773 \\ 0,10393 \\ -0,77676 \\ 0,1928 \end{bmatrix}$$

Економетрична модель попиту на товар запишеться так:

$$Y = 45.88 + 0.1X_1 - 0.77X_2 + 0.2X_3$$

Запишемо вектор прогнозованих незалежних змінних:

$$X_{pr} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 265.00 \\ 12.00 \\ 13.00 \end{bmatrix}$$

а далі транспонуємо його:

$$X'_{pr} = [1.00 \quad 265.00 \quad 12.00 \quad 13.00]$$

Помножимо цей вектор на матрицю оцінок параметрів моделі:

$$X'_{pr}A = 66.4786$$

У розглядуваному прикладі лямбда та залишки n-го спостереження мають такі значення:

$$\lambda_n = 0.54 \quad u_n = 0.3$$

Тоді прогнозне значення попиту на товар буде таке:

$$Y_{pr} = 66.69$$

Для того щоб знайти інтервальний прогноз попиту на товар, достатньо обчислити стандартну похибку прогнозу. Вона визначається за формулою:

$$S_{\hat{Y}_{pr}} = \sqrt{\sigma_u^2 X'_{pr} (X'S^{-1}X)^{-1} X_{pr}}$$

де σ_u^2 - дисперсія залишків, здобутих за узагальненим методом найменших квадратів.

Ця дисперсія визначається за формулою:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m} u'S^{-1}u$$

Запишемо вектор залишків (за 1 МНК) та вектор, транспонований до нього

$$u = \begin{bmatrix} 0.1418 \\ -1.1227 \\ 1.0096 \\ -0.8620 \\ -1.3441 \\ 0.7882 \\ -0.3010 \\ 1.8128 \\ 0.7605 \\ -0.4538 \\ -0.7111 \\ 0.2818 \end{bmatrix}$$

$$u' = [0.1418 \quad -1.1227 \quad 1.0096 \quad -0.8620 \quad -1.3441 \quad 0.7882 \quad -0.3010 \quad 1.8128 \quad 0.7605 \quad -0.4538 \quad -0.7111 \quad 0.2818]$$

Знайдемо добуток $u'S^{-1}u$ і помножимо здобуте значення на $1/n-m=8$

$$D_u^2 = 1.28$$

Коли обчислено дисперсію залишків, можна визначити стандартну (або середню) похибку прогнозу.

$$S_{\epsilon_{pr}} = 1.55$$

Перейдемо від стандартної похибки прогнозу до граничної, яка подається у вигляді:

$$\Delta_{\epsilon_{pr}} = t_a S_{\epsilon_{pr}}$$

$$\Delta_{\epsilon_{pr}} = 2.89$$

Отже, прогнозне значення попиту на товар буде знаходитись в інтервалі від 63,8 до 69,58:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{pr} - \Delta_{\epsilon_{pr}} &\leq Y_{pr} \leq \bar{Y}_{pr} + \Delta_{\epsilon_{pr}} \\ 63.8 &\leq Y_{pr} \leq 69.58 \end{aligned}$$

Порівняльний аналіз кількісних характеристик взаємозв'язку, здобутих методом найменших квадратів і узагальненим методом Ейткена.

Середня ефективність чинників, здобутих методом найменших квадратів і узагальненим методом Ейткена, буде однакова:

$$\mu_1 = 0,253; \mu_2 = 3,436; \mu_3 = 8,675$$

Середня ефективність чинників подається у вигляді:

$$\mu_i = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}_j}$$

Висновок. Якщо дохід на одну особу зміниться на одиницю, а решта чинників (показників) будуть сталими, то попит у середньому збільшиться на 0,25 одиниці; якщо ціна одиниці товару зміниться на одиницю, а решта показників будуть сталими, то попит у середньому збільшиться на 3,44 одиниці. Якщо ціна одиниці" взаємозамінюваних товарів зміниться на одиницю, а інші змінні будуть сталими, то попит у середньому збільшиться на 8,68 одиниці.

Гранична ефективність, здобута методом 1 МНК:

$$a_1 = 0.156491$$

$$a_2 = -0.47487$$

$$a_3 = 0.224702$$

Гранична ефективність, здобута методом Ейткена:

$$a_1 = 0.10393$$

$$a_2 = -0.77676$$

$$a_3 = 0.1928$$

Висновок. Значення граничної ефективності дещо відрізняються. Для моделі за методом Ейткена маємо: якщо дохід на одну особу зміниться на одиницю, а решта змінних будуть сталими, то попит гранично збільшиться на 0,1 одиниці. Якщо ціна одиниці товару зміниться на одиницю, а решта змінних будуть сталими, то попит гранично зменшиться на 0,78 одиниці. Якщо ціна одиниці взаємозамінюваного товару зміниться на одиницю, а решта змінних будуть сталими, то попит гранично збільшиться на 0,19 одиниці.

Еластичність чинників, здобута методом 1 МНК:

$$E_1 = 0.6185224$$

$$E_2 = -0.138218$$

$$E_3 = 0.0259022$$

Еластичність чинників, здобутих за методом Ейткена:

$$E_1 = 0.41154$$

$$E_2 = -0.22651$$

$$E_3 = 0.02227$$

Еластичність чинників розраховується за такою формулою

$$E_{\frac{Y}{X_j}} = a_j \div \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}_j} \right)$$

Висновок. Еластичність чинників, здобута методом Ейткена і 1 МНК, теж дещо відрізняється. Пояснити значення еластичності чинників, здобутих методом Ейткена, можна так: якщо дохід на 1 людину зросте на 1%, а решта показників будуть постійними, то попит гранично збільшиться на 0,41%; якщо ціна одиниці товару зміниться на 1%, а решта показників будуть постійними, то попит гранично зменшиться на 0,22%. Якщо ціна одиниці взає-мочамінюваного товару зміниться на 1%, а решта показників будуть сталими, то попит гранично збільшиться на 0,02%.

Сумарна еластичність, здобута методом 1 МНК:

$$N = 0,506206.$$

Сумарна еластичність, здобута методом Ейткена:

$$N = 0,20730.$$

Обчислимо сумарну еластичність за формулою:

$$N = \sum_{j=1}^m E_{\frac{y}{X_j}}$$

Висновок для сумарної еластичності, здобутої методом Ейткена: якщо дохід на одну особу, ціна одиниці товару, ціна одиниці взаємозамінюваних товарів зміняться на 1%, то попит збільшиться на 0,2%.

Норми заміщення чинників у моделі, здобуті методом 1 МНК:

$$h_{12} = -0.3295h_{13} = 0.6964$$

$$h_{23} = -2.1133h_{21} = -3.034$$

$$h_{31} = 1.43588h_{32} = -0.473$$

Норми заміщення чинників у моделі, здобуті методом Ейткена:

$$h_{12} = -0.1338h_{13} = 0.5391$$

$$h_{23} = -4.0288h_{21} = -7.4739$$

$$h_{31} = 1.8551h_{32} = -0.2482$$

Висновок. Норми заміщення чинників у розглянутих моделях характеризують такі властивості останніх. Попит залишиться на тому самому рівні:

- якщо дохід на одну особу зменшити відносно ціни одиниці товару на 0,13 одиниці або дохід на одну особу збільшити відносно ціни одиниці взаємозамінюваних товарів на 0,54 одиниці;

- якщо ціну одиниці товару зменшити відносно одиниці взаємозамінюваних товарів на 4,03 одиниці або ціну одиниці товару зменшити порівняно з доходом на 1 особу на 7,47 одиниці;

- якщо ціну одиниці взаємо замінюваних товарів збільшити порівняно з доходом на одну особу на 1.86 одиниці, або ціну одиниці взаємо замінюваних товарів зменшити порівняно з ціною одиниці товару на 0,25 одиниці.

Загальний висновок. За наявності змішаної гетероскедастичності метод Ейткена дає обґрунтовані та незмішані оцінки параметрів моделі.

Контрольні запитання

1. Що таке гетероскедастичність (гомоскедастичність) ?
2. Які Ви методи виявлення наявності гетероскедастичності?
3. В чому полягає графічний метод виявлення нетоскедастичності?
4. Параметричний тест Гольдфельда—Квандта.
5. Тест Глейсера.
6. Метод Ейткена.

Лабораторна робота № 7

Тема. Побудова економетричної моделі з автокорельованими залишками

З допомогою двох взаємопов'язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення (таблиця 7.1 - 7.2) побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообігу від доходу. Оцінити параметри економетричної моделі, яка має автокорельовані залишки, методом перетворення вихідної інформації.

Таблиця 7.1.

Вихідні дані про роздрібний товарообіг

№	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	26,2	25,4	27,1	28,4	25,6	26,1	28,9	21,2	25,6	24,9	26,9	25,6	28,9	26,9	24,8
2	26,4	25,6	28,2	26,5	25,8	26,2	29,5	31,3	25,4	25,6	28,9	24,8	25,6	28,9	24,3
3	26,3	25,7	28,7	28,7	35,7	26,3	29,4	31,5	24,5	27,8	35,6	25,9	37,8	28,6	27,1
4	26,3	26,1	23,4	28,8	35,7	26,5	29,6	31,2	26,3	24,6	34,7	26,9	36,9	27,8	28,2
5	26,5	26,2	33,7	28,9	35,8	26,3	28,6	31,4	27,1	34,8	35,9	24,5	36,8	29,2	29,4
6	36,5	26,2	34,2	28,9	35,9	26,4	38,7	42,8	21,3	35,9	33,6	34,6	39,3	39,5	38,5
7	36,7	36,4	35,3	28,7	36,9	37,5	38,6	42,7	21,2	35,6	35,9	35,1	31,5	34,8	36,7
8	36,5	36,3	34,8	38,5	45,9	37,8	38,4	42,9	24,6	34,7	44,9	34,8	32,7	39,5	38,7
9	36,7	36,2	34,3	36,4	45,4	37,1	39,6	43,1	25,3	35,8	48,9	35,8	34,8	36,8	33,9
10	38,1	47,1	37,1	36,5	55,7	46,2	39,7	44,1	24,9	35,9	47,8	36,9	45,8	49,4	45,7

Таблиця 7.2.

Вихідні дані про дохід

№	Варіанти														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	36,2	35,4	37,1	38,4	35,6	35,5	38,9	31,2	35,6	34,9	36,9	35,6	38,9	36,9	34,8
2	35,4	36,6	38,2	36,5	45,8	36,2	39,5	41,4	36,5	35,6	37,9	34,8	35,6	38,4	44,4
3	37,5	37,7	39,7	35,7	45,7	37,7	40,5	42,5	37,5	37,8	48,6	45,7	42,8	45,6	45,1
4	37,3	38,1	35,4	37,8	46,7	46,5	41,6	43,3	45,4	44,6	49,7	46,9	43,9	47,5	46,5
5	36,5	44,2	33,9	45,9	57,8	48,8	58,8	44,4	46,1	45,7	45,9	44,3	44,8	49,2	47,4
6	46,6	45,2	36,2	46,9	54,9	49,4	59,8	52,8	47,3	46,9	43,7	54,6	45,3	53,5	52,7
7	46,7	45,4	45,3	47,7	55,8	47,5	58,6	53,7	48,2	46,6	45,9	55,1	47,5	54,8	54,7
8	46,5	46,3	54,8	48,5	56,9	57,3	67,4	62,9	54,6	48,7	54,8	56,8	52,7	59,5	56,6
9	46,7	46,6	55,3	56,4	65,4	58,1	69,7	63,5	55,7	55,8	68,9	57,8	54,8	66,8	63,9
10	58,1	67,1	57,1	56,5	65,7	76,2	79,7	74,1	64,9	56,9	77,8	66,9	55,8	89,4	75,7

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи 7

З допомогою двох взаємопов'язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообігу від доходу. Вихідні дані наведено в таблиці 7.3.

Таблиця 7.3.

Вихідні дані

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Роздрібний товарообіг	24,0	25,0	25,7	27,0	28,8	30,8	33,8	38,1	43,4	45,5
Дохід	27,1	28,2	29,3	31,3	34,0	36,0	38,7	43,2	50,0	52,1

Для цього необхідно:

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

Y_t – роздрібний товарообіг у період t , залежна змінна;

X_t – дохід у період t , пояснювальна змінна;

звідси

$$Y_t = f(X_t, u_t),$$

де u_t - стохастична складова, залишки.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t; \quad Y_t = a_0 + a_1 X_t; \quad u_t = Y_t - Y_t.$$

3. Визначимо оцінки параметрів моделі β_0, β_1 за методом найменших квадратів, припускаючи що залишки u не корельовані:

$$A = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

де X' - матриця, транспортована до X .

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27,1 \\ 1 & 28,2 \\ 1 & 29,3 \\ 1 & 31,3 \\ 1 & 34,0 \\ 1 & 36,0 \\ 1 & 38,7 \\ 1 & 43,7 \\ 1 & 50,0 \\ 1 & 52,1 \end{pmatrix}; \quad (X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 370,4 \\ 370,4 & 14441,62 \end{pmatrix}; \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix};$$

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,09 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0,597 & 0,416 \\ 0,416 & 0,348 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 196,400 \\ 252,222 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,3 \\ 6,1 \end{pmatrix}; \quad a_0 = 0,172; \quad a_1 = 0,865.$$

Економетрична модель має вигляд

$$Y_t = 0,172 + 0,865X_t$$

4. Знайдемо розрахункові значення роздрібного товарообігу на основі моделі $Y_t = 0,172 + 0,865X_t$, і визначимо залишки u_t .

Таблиця 7.4. Розрахункова таблиця

Рік	Y_t	\hat{Y}_t	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
1	24,0	23,612	0,388	0,150	-	-	-
2	25,0	24,564	0,436	0,190	0,049	0,0024	0,1691
3	25,7	25,515	0,485	0,034	-0,252	0,0632	0,0806
4	27,0	77,245	-0,245	0,060	-0,430	0,1848	-0,045
5	28,8	29,581	-0,779	0,609	-0,535	0,2866	0,1913
6	30,8	31,310	-0,510	0,261	0,270	0,0729	0,3984
7	33,8	33,646	0,154	0,023	0,665	0,4417	-0,0787
8	38,1	37,971	0,129	0,017	-0,025	0,0006	0,0199
9	43,4	43,420	-0,020	0,0002	-0,149	0,0222	-0,003
10	45,5	45,236	0,264	0,070	0,284	0,0804	-0,005
I	322,1			1,4152		1,1550	0,7276

Знайдемо оцінку критерію Дарбіна — Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} = \frac{1,155}{1,4152} = 0,816.$$

Порівняємо значення критерію DW з табличним для

$\alpha = 0,05$ і $n = 10$. Критичні значення критерію DW у цьому разі такі:

$$DW1 = 0,879 - \text{нижня межа};$$

$$DW2 = 1,320 - \text{верхня межа};$$

Оскільки критерій $DW_{\text{факт}} < DW_1$ можна стверджувати, що залишки u_t мають додатну автокореляцію.

5. Наявність чи відсутність автокореляції залишків можна також визначити згідно з критерієм фон Неймана.

Критерій фон Неймана $Q = \frac{10}{10-1} DW = 0,906$. Це значення порівнюється з табличним;

$Q_{\text{табл}} = 1,18$ при $n=10$ і рівні значущості $\alpha = 0,05$. Оскільки $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додана автокореляція залишків.

6. Використаємо метод Ейткена для оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками. Оператор оцінювання запишеться так:

$$A = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y,$$

або

$$A = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

де S^{-1} - матриця, обернена до матриці S ; V^{-1} - матриця, обернена до матриці V . Матриця S – матриця коваріації залишків, яка має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 & \rho^9 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^9 & \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \sigma_u^2 S.$$

7. Щоб сформувати матрицю S бо V необхідно визначити величину ρ , яка характеризує взаємозв'язок між послідовними членами ряду залишків.

Нехай залишки описуються автокореляційною моделлю першого степеня

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\rho \approx r = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} + \frac{m+1}{n} = \frac{10 \cdot 0,7276}{9 \cdot 1,4156} + \frac{2}{10} = 0,77.$$

Отже, матриця S матиме вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 & 0,125 & 0,097 \\ 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 & 0,125 \\ 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 \\ 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 \\ 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 \\ 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 \\ 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 \\ 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 \\ 0,125 & 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 \\ 0,097 & 0,125 & 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1) (X^T S^{-1}) = \begin{pmatrix} 0,565 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,565 \\ 13,204 & 3,640 & 2,069 & 2,708 & -5,722 & 3,314 & 0,616 & 3,165 & 14,453 & 33,412 \end{pmatrix};$$

$$2) (X^T S^{-1} X) = \begin{pmatrix} 28,56 & 47,26 \\ 52,53 & 51,13 \end{pmatrix};$$

$$3) (X^T S^{-1} Y) = \begin{pmatrix} -0,08 & 0,07 \\ 0,07 & -0,07 \end{pmatrix};$$

$$4) (X^T S^{-1} Y) = \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix};$$

$$5) \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix};$$

$$a_0 = 0,442; a_1 = 0,861.$$

Отже, економетрична модель має вигляд:

$$Y_t = 0,442 + 0,861X_{t-1}$$

8. Знайдемо розрахункові значення Y , на основі побудованої економетричної моделі та визначимо залишки (таблиця 7.5).

Розрахункова таблиця

Рік	Y_t	\hat{Y}_t^*	v_t	v_t^2	$v - v_{t-1}$	$(v - v_{t-1})^2$	$v_t v_{t-1}$
1	24,0	23,784	0,216	0,0468	-	-	-
2	25,0	24,731	0,269	0,0724	0,0526	0,0028	0,0528
3	25,7	25,678	0,022	0,0005	-0,2774	0,0612	0,0058
4	27,0	27,401	-0,401	0,1608	-0,4226	0,1786	-0,0086
5	28,8	29,727	-0,927	0,8586	-0,5255	0,2762	0,3716
6	30,8	31,449	-0,649	0,4215	0,2774	0,0769	0,6016
7	33,8	33,775	0,025	0,0006	0,6745	0,4549	-0,0164
8	38,1	38,081	0,019	0,0004	-0,0066	0,00004	0,0005
9	43,4	43,508	-0,108	0,0116	-0,1262	0,0159	0,0020
10	45,5	45,316	0,184	0,0937	0,2912	0,0848	0,9908
				1,6069		1,1514	0,9908

9. Обчислимо критерій Дарбіна — Уотсона і фон Неймана:

$$DW = \frac{1,1514}{1,6069} = 0,716.$$

Порівнявши його з критичним значенням при $n = 10$ і $\alpha = 0,05$, коли $DW_{\text{факт}} < DW_1$ доходимо висновку, що ми не звільнилися від автокореляції залишків. Це означає, що вихідна гіпотеза, коли залишки описуються авто регресійною схемою першого порядку, не виконується. Якщо залишки описується авто регресійною схемою вищого порядку, то доцільно виконати оцінку параметрів моделі методом Кочрена — Оркатта або Дарбіна, які будуть розглянуті далі.

10. Визначаємо оцінку параметрів моделі, скориставшись оберненою матрицею S^{-1} , яка має вигляд:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Підставивши $\rho=0,77$, дістанемо:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2,469 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 \end{pmatrix}$$

Вектор оцінок параметрів моделі:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\hat{\beta}_0 = 0,442$; $\hat{\beta}_1 = 0,861$, і економетрична модель подається у вигляді

$$\hat{Y}_t = 0,442 + 0,861X_t,$$

Порівнявши обидві економетричні моделі, побачимо, що при оцінюванні параметрів методом Ейткена доцільніше користуватись матрицею, коли коваріація залишків для $S=2$ відсутня. У такому разі побудова моделі спрощується, а точність оцінок не зменшується.

Згідно з даними, які наведено в таблиці 10, оцінюємо параметри економетричної моделі, яка має автокорельовані залишки, методом перетворення вихідної інформації.

1. Сформуємо матрицю T_1 для перетворення вихідних даних:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0,64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Перетворимо змінні Y_t, X_t , на основі матриці T_1 :

$$T_1 Y_t = \begin{pmatrix} 15,27 \\ 6,49 \\ 6,42 \\ 7,18 \\ 7,97 \\ 8,58 \\ 10,04 \\ 12,03 \\ 14,01 \\ 12,02 \end{pmatrix}; \quad T_1 X_t = \begin{pmatrix} 0,64 & 17,25 \\ 0,23 & 7,30 \\ 0,23 & 7,55 \\ 0,23 & 8,70 \\ 0,23 & 9,86 \\ 0,23 & 9,77 \\ 0,23 & 10,93 \\ 0,23 & 13,85 \\ 0,23 & 16,29 \\ 0,23 & 13,53 \end{pmatrix}.$$

3. Для перетворених даних скористаємося оператором 1МНК:

$$A = (X'X)^{-1} X'Y \Rightarrow A = (X'^* X^*)^{-1} X'^* Y^*.$$

Позначимо $T_1 Y_t = Y^*$, $T_1 X_t = X^*$. Тоді маємо

$$3.1. X'^* X^* = \begin{pmatrix} 0,8756 & 33,3356 \\ 33,3356 & 1436,007 \end{pmatrix}. \quad 3.2. X'^* Y^* = \begin{pmatrix} 29,1003 \\ 1251,584 \end{pmatrix}.$$

$$3.3. (X'^* X^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 9,8299 & -0,2282 \\ -0,2282 & 0,006 \end{pmatrix}. \quad 3.4. A = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix}.$$

Звідси $a_0 = 0,442$; $a_1 = 0,861$; економетрична модель:

$$Y_t = 0,442 + 0,86X_t.$$

Висновки. Оцінки параметрів моделі, які визначені згідно з методом перетворення вихідної інформації, не відрізняються від оцінок, здобутих методом Ейткена при різних матрицях коваріацій залишків. Це означає, що обидва методи є альтернативними, коли залишки — стаціонарні марковські процеси.

Дещо відрізняються одна від одної оцінки параметрів моделі, якщо для перетворення вихідних даних використовується матриця T2. Так, вектор оцінок

$$A = (-0,862 \quad 0,884).$$

Звідси економетрична модель:

$$a_0 = -0,862; \quad a_1 = 0,884;$$

$$Y_t = -0,862 + 0,884X_t.$$

Контрольні запитання

1. Що таке автокореляція змінних.
2. Які ви знаєте методи тестування автокореляції.
3. Що таке автокореляція збурень.
4. Оцінка параметрів регресійної моделі при наявності автокореляції.
5. Критерій Дарбіна-Уотсона.

Перелік запитань до семестрового контролю

1. Поняття дисципліни “Економетрія”
2. Виникнення, становлення та розвиток дисципліни “Економетрія”
3. Предмет економетрії. Завдання економетрії
4. Критерії та принципи економетрії
5. Можливості статистичних і математичних методів в економетричних розрахунках
6. Соціально-економічні системи, їх дослідження та моделювання
7. Класифікація економіко-математичних методів та моделей
8. Етапи проведення економетричного аналізу
9. Загальний вигляд лінійної економетричної моделі, її структура та етапи побудови.
10. Специфікація моделі.
11. Передумова застосування методу найменших квадратів (1 МНК).
12. Властивості оцінок, їх характеристика.
13. Коректність побудови економетричної моделі та перевірка значущості оцінок параметрів і моделі в цілому.
14. Статистичні критерії перевірки значущості.
15. Поняття коефіцієнтів, їх визначення й застосування в економетричному аналізі.
16. Побудова моделей на основі покрокової регресії.
17. Приклади економетричних моделей. Виробнича функція Кобба — Дугласа
18. Приклади економетричних моделей .Моделі пропозиції і попиту на конкурентному ринку
19. Приклади економетричних моделей. Модель споживання
20. Приклади економетричних моделей. Модель Кейнса
21. Поняття мультиколінеарності, її вплив на оцінки параметрів моделі
22. Методи визначення мультиколінеарності та способи її усунення.
23. Метод Ферара - Глобера.
24. Метод головних компонент.
25. Поняття гомо- і гетероскедастичності.
26. Вплив гетероскедастичності на властивості оцінок параметрів.

27. Узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена)
28. Оцінка параметрів лінійної економетричної моделі з гетероскедастичними залишками.
29. Визначення оператора оцінок та відповідної коваріаційної матриці.
30. Природа й наслідки автокореляції.
31. Методи визначення автокореляції.
32. Автокореляційні функції (корелограми).
33. Авторегресійні моделі.
34. Методи оцінки параметрів: Ейткена, перетворення вхідної інформації, Кочрена - Оркетта, Дарбіна - Уотсона, Неймана.
35. Багатофакторні лінійні економетричні моделі динаміки та особливості їх побудови.
36. Поняття лага і лагових змінних.
37. Моделі розподіленого лага.
38. Лаги залежної і незалежних змінних.
39. Метод оцінювання параметрів за схемою Койко
40. Системи одночасних структурних рівнянь
41. Приклади систем одночасних рівнянь на макрорівні.
42. Поняття ідентифікації. Строго ідентифікована, недоідентифікована і надідентифікована системи рівнянь.
43. Непрямий метод оцінки параметрів строго ідентифікованої системи рівнянь.
44. Розрахунок параметрів системи економетричних рівнянь попиту і пропонування непрямим методом найменша квадратів.
45. Двокроковий метод найменших квадратів (2МНК-оцінка) оцінки параметрів надідентифікованих систем одночасних рівнянь, узагальнений алгоритм методу.
46. Двокроковий метод найменших квадратів і головних компонентів.
47. Рекурсивні системи одночасних рівнянь, їх характеристика, можливість застосування МНК-оцінки для розрахунку параметрів рекурсивних систем.
48. Поняття про шкали вимірювання.
49. Частотний аналіз.
50. Можливості використання функцій та надбудов табличного процесора Excel.
51. Побудова економетричних моделей: використання

інструментів та функцій аналізу даних, регресійний аналіз.

52. Реалізація основних алгоритмів курсу: покрокова регресія, метод Ферара-Глобера, УМНК, 2МНК.

Типові задачі для самостійного розв'язання.

1. Знайти добуток матриць ABC , де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Підрахувати матрицю $D=(AB)^T-C^2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Підрахувати матрицю $D=ABC-3E$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (2 \ 0 \ 5) \quad E - \text{одинична матриця}$$

4. Підрахувати визначник матриці A , та знайти обернену

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

5. Визначити, має матриця A обернену або ні, якщо має визначити її

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Знайти добуток матриць ABC , де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Припустимо, що ви збираєте дані про споживання домашніх господарств в Україні та їх доход і оцінюєте таке рівняння:

$$C=120 + 0.75 y,$$

де C — споживання; y — доход.

а) яка змінна є залежною, і яка змінна є незалежною?

б) поясніть взаємозв'язок між споживанням і доходом. На скільки

зросте споживання, якщо доход зросте на 1 одиницю?

8. 1. Припустимо, що ви збираєте дані про річний продаж фірмою "Україна" продукції (y) і суми, які використано на наукові дослідження (x). Ви маєте таку статистику:

$$\text{cov}(x,y) = 300;$$

$$\text{var}(y) = 125;$$

$$\text{var}(x) = 880.$$

Середній річний продаж (y) = 1200.

Середня сума на наукові дослідження (x) = 895.

2. Підрахуйте коефіцієнт кореляції між продажем і сумою, використаною на наукові дослідження.

3. Визначте коефіцієнт детермінації для регресії.

4. Знайдіть параметри регресії b_0 і b_1

9. Проведіть оцінку регресії і підрахуйте SSE, SSR. Розрахуйте SST, R_2 використовуючи дану інформацію:

$$\text{SSE} = 53,27$$

$$\text{SSR} = 202,91$$

10. Є такі дані:

x	y	(x _i -x)	(y _i -y)	(x _i -x)*(y _i -y)	(x _i -x) ²
20	75				
14	85				
12	92				
20	88				
33	72				
38	99				

Заповніть пропуски і знайдіть параметри регресії b_0 і b_1

11. 1. Оцініть еластичність попиту за цими даними.

2. Використайте t-тест для перевірки значимості b_1

Побудуйте 90%-ий інтервал довіри еластичності попиту за ціною.

Ціна, P	Кількість, Q
2.20	1020
1.85	1521
1.50	1755
1.21	2130
0.99	3200
0.79	4105

12. Вивчаючи зміну попиту на йогурт залежно від його ціни, отримано такі результати:

$$y_1 = 5149.268 - 2012.90x_i$$

$$\sigma_e = 468.943, R^2 = 0.867$$

$$\sum [x_i - \bar{x}]^2 = 1.426$$

$$\bar{x} = 1.423, n = 4$$

Фірма встановлює на йогурт ціну: 1.75 грн. Спрогнозуйте попит і побудуйте 90%-ний інтервал довіри для математичного сподівання прогнозу.

13. 1. Ви оцінюєте регресію y за x і маєте такі результати: $b_1 = 2.8$, $\sigma_{b_1} = 0.6$ — стандартна помилка параметра регресії (припускаємо, що вона відома).

2. Побудуйте 95%-ний інтервал довіри для b_1 .

3. Припустимо, що σ_{b_1} невідома. Чи зміниться спосіб побудови інтервалу довіри для b_1 . Припустимо, що для оцінки регресії було використано 25 спостережень.

14. 1. Ви оцінюєте таку регресію:

$$y = 2300 + 10.12x;$$

$$SSE = 28225;$$

$$n = 28.$$

$$\sum (x - \bar{x})^2 = 3300$$

2. Перевірте значимість нахилу при 95%-ному рівні довіри.

3. Побудуйте 90% -ний інтервал довіри для нахилу.

15. 1. Дано таку інформацію про просту лінійну регресію:

$$SSE = 28,6$$

$$SSR = 30,1$$

$$n = 50.$$

а) Обчисліть коефіцієнт детермінації.

б) Обчисліть оцінку середньоквадратичного відхилення випадкової величини (стандартну помилку оцінювання).

16. Дано таку інформацію про дві змінні — x та y :

$$x = 32$$

$$y = 6$$

$$\text{cov}(x, y) = 81$$

$$\text{var}(x) = 21$$

Розрахуйте нахил і перетин регресії y за x .

Встановіть взаємозв'язок між доходом (y) і кількістю років

навчання оцінюючи таку регресію:

$$y = 12 + 125x.$$

(доход вимірюємо в гривнях, навчання — в роках). Поясніть результати регресії.

17. Підрахуйте коефіцієнт кореляції між x та y , та оцінити регресію на основі такої інформації:

№	x	y
1	10	22
2	9	31
3	11	19
4	6	25

Зробіть оцінку функції споживання:

$$y = 12.25 + 0.82 x.$$

На скільки зросте споживання, якщо доход (x) збільшиться на 1 гривню? Яким буде споживання, якщо доход буде нульовим?

18. Знайдіть σ_{b1} , σ_{b0} при наявності наступних даних:

$$\begin{aligned}\sum x_i^2 &= 92 \\ \sum (x - \bar{x})^2 &= 3,7 \\ \sigma_\varepsilon^2 &= 1,25 \\ n &= 40\end{aligned}$$

19. Припустимо, що ви оцінюєте залежність доходу відповідно до кількості років навчання, використовуючи 30 спостережень. Середньоквадратичні відхилення параметрів подано в дужках.

$$\begin{aligned}Y &= 11.929 + 421x \\ &(4.825) (127)\end{aligned}$$

- перевірте значимість нахилу при 5%-ному рівні значимості.
- побудуйте 95% -ний інтервал довіри для нахилу.

20. Припустимо, що ви підраховали кореляцію між двома випадковими змінними, яка дорівнює 0.62. Якщо для оцінки коефіцієнта кореляції було використано 25 спостережень, використайте 5% -ний рівень значимості, щоб перевірити значимість коефіцієнта кореляції.

Критерії оцінки знань студентів

Лабораторні роботи оцінюються залежно від рівня та якості виконання їх студентом. Кожна робота оцінюється за трьома рівнями:

- “відмінно”;
- “добре”;
- “задовільно”, де кількість балів розраховується в залежності від кількості проведених занять і загально можливої кількості балів, призначених для даного виду занять

За складову “Відвідування лекцій” максимальна сума становить 5 балів.

У складовій “Самостійна робота” оцінюється рівень засвоєння студентом розділів і питань курсу, які визначені для самостійного вивчення. Оцінювання проводиться шляхом тестування та опитування студентів.

До перелічених складових модульної оцінки можуть нараховуватися *додаткові бали* за участь студента у науковій роботі, підготовці публікацій, робіт на конкурси, участь в олімпіадах тощо.

Кількість додаткових балів визначається на розсуд викладача, але у сумі не більш 100 балів разом з переліченими складовими модульної оцінки. Обґрунтованість нарахування студенту додаткових балів розглядається на засіданні кафедри та оформлюється відповідним протоколом.

Отримана таким чином протягом залікового кредиту сума балів доводиться до відома студентів перед проведенням модульного контролю. Студентам, які набрали від 60 до 100 балів і згодні з цією сумою, відповідна оцінка модуля проставляється у заліково-екзаменаційну відомість.

У разі незгоди студента з отриманою сумою балів або якщо вона складає менше 60 балів, її можна покращити за рахунок участі студента у процедурі *кредитного контролю*.

Кількість балів, яка може бути отримана за результатом кредитного контролю, дає студенту можливість для підвищення оцінки поточного контролю на один ступінь за державною шкалою:

- з “4” (75-89 балів) на “5” (90-100 балів);
- з “3” (60-74 бали) на “4” (75-89 балів);
- з “2” (35-59 балів) на “3” (60-74 бали).

Таким чином, максимальна кількість балів модульного

контролю коливається у межах від 10 до 25 балів залежно від конкретного випадку.

При заповненні заліково-екзаменаційної відомості та залікової книжки (індивідуального навчального плану) студента, оцінка, виставлена за 100-бальною шкалою, повинна бути переведена до державної шкали (5, 4, 3,) та шкали ECTS (A, B, C, D, E)

Визначення назви за державною шкалою(оцінка)	Визначення назви за шкалою ECTS	За 100 бальною шкалою	ECTS оцінка
ВІДМІННО – 5	<u>Відмінно</u> – відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок	90-100	A
ДОБРЕ – 4	<u>Дуже добре</u> – вище середнього рівня з кількома помилками	82-89	B
	<u>Добре</u> – в загальному правильна робота з певною кількістю грубих помилок	75-81	C
ЗАДОВІЛЬНО - 3	<u>Задовільно</u> - непогано, але зі значною кількістю недоліків	69-74	D
	<u>Достатньо</u> – виконання задовольняє мінімальні критерії	60-68	E
НЕЗАДОВІЛЬНО - 2	<u>Незадовільно</u> – потрібно попрацювати перед тим як отримати залік або екзамен (без повторного вивчення модуля)	35-59	FX
	<u>Незадовільно</u> - необхідна серйозна подальша робота (повторне вивчення модуля)	<35	F

Список рекомендованих джерел

1. Назаренко О.М. Основи економетрики: Підручник. – Київ: „Центр навчальної літератури”, 2004. – 392с.
2. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 1997. – 352с.
3. Лук’яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: Товариство „Знання”, КОО, 1998. – 494с.
4. Толбатов Ю.А. „Економетрика: Підручник для студентів екон. спеціал. вищ. навч. закл.- К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.:іл.
5. Корольов О.А., Рязанцева В.В., Практикум з економетрії: завдання з практичними рекомендаціями, алгоритмами та прикладом їх наскрізного виконання. Ч1.Регресійний аналіз: Навч.посібник. – К.:Вид-во Європ. ун-ту, 2002.-250с.
6. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Навч. – метод. Посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 192с.
7. Джонстон Дж. Эконометрические методы. —М.: Статистика, 1980.—444с.
8. Гинтнер Г. Введение в эконометрию - М.: Статистика, 1964.
9. Грубер И. Эконометрия. Вступ в эконометрию. Том I. - К.: Астар 1966.
10. Слейко В. Основи економетрії. —Львів.: «Марка» Лтд, 1966.
11. Кейн З. Экономическая статистика и эконометрия Выш. 1, 2. - 1977.
12. Клас А., Гергелк К., Колек Ю., Шуян И. Введение в эконометрическое моделирование. - М.: Статистика, 1978.
13. Лазер С. Статистические методы эконометрии. Вып. 1,2. — 1975-1976.
14. Маленко Э. Статистические методы эконометрии Вып. 1,2. - 1975-1976.
15. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Переседский А.А.,
16. Наконечний С.І. та ін. Методичні розробки та вказівки для проведення практичних занять й лабораторних робіт з курсу «Економетрія» для бакалаврів з економіки. - К.: КДЕУ, 1993.
17. Наконечний С.І. та ін. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з курсу «Економетрія» для студентів заочного факультети всіх спеціальностей. — К.: КДЕУ, 1994.
18. Маленко Э. Статистические методы эконометрии.- М.:Статистика, 1975-1978.-Вып.1,2.
19. Пирогов Г., Федоровский Ю., Пробелы структурного оценивания в эконометрии.-М.: Статистика, 1979.
20. Толбатов Ю.А. „Економетрика в Excel. - К.: 1997.

Список використаних джерел

1. Назаренко О.М. Основи економетрики: Підручник. – Київ: „Центр навчальної літератури”, 2004. – 392с.
2. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 1997. – 352с.
3. Лук’яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: Товариство „Знання”, КОО, 1998. – 494с.
4. Толбатов Ю.А. Економетрика: Підручник для студентів екон. спеціал. вищ. навч. закл.- К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.:іл.
5. Корольов О.А., Рязанцева В.В., Практикум з економетрії: завдання з практичними рекомендаціями, алгоритмами та прикладом їх наскрізного виконання. Ч1.Регресійний аналіз: Навч.посібник. – К.:Вид-во Європ. ун-ту, 2002.-250с.
6. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Навч. – метод. Посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 192с.
7. Гинтнер Г. Введение в эконометрию - М.: Статистика, 1964.
8. Грубер И. Економетрія. Вступ в економетрію. Том I. - К.: Астар 1966.
9. Клас А., Гергелк К., Колек Ю., Шуян И. Введение в эконометрическое моделирование. - М.: Статистика, 1978.
10. Наконечний С.І. та ін. Методичні розробки та вказівки для проведення практичних занять й лабораторних робіт з курсу «Економетрія» для бакалаврів з економіки. - К.: КДЕУ, 1993.
11. Наконечний С.І. та ін. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з курсу «Економетрія» для студентів заочного факультети всіх спеціальностей. — К.: КДЕУ, 1994.

**Критерій Дарбіна—Уотсона(d).
Значення d_L і d_U при 1-% рівні значущості¹**

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

n — число спостережень; k' — число пояснюючих змінних.

¹Таблиця взята з книги: *Джонстон Дж. Економетрические методы.* — М., 1980.

Додаток 2

Критерій Дарбіна—Уотсона(d). Значення d_L і d_U при 5 – % рівні значущості¹

n	$k'=1$		$k'=2$		$k'=3$		$k'=4$		$k'=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.46	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.47	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.48	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.49	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.50	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.51	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.52	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

n — число спостережень; k' — число пояснюючих змінних.

¹Таблиця взята з книги: *Джонстон Дж. Економетрические методы.* — М., 1980.

Процентилі t -розподілу *

df	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	3.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
df	$-t_{0,40}$	$-t_{0,30}$	$-t_{0,20}$	$-t_{0,10}$	$-t_{0,05}$	$-t_{0,025}$	$-t_{0,01}$	$-t_{0,005}$

*Таблиця взята з книги: Джонстон Дж. Эконометрические методы.— М., 1987.

Критичні значення для відношення фон Неймана

к	n								
	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25				0,00001	0,00001	0,00001	0,00001		0,00001
0,30				0,00007	0,00007	0,00005	0,00004	0,00002	0,00003
0,35			0,00006	0,00027	0,00021	0,00014	0,00009	0,00005	0,00007
0,40			0,00047	0,00065	0,00047	0,00031	0,00019	0,00012	0,00016
0,45			0,00126	0,00126	0,00088	0,00059	0,00038	0,00025	0,00031
0,50		0,00038	0,00246	0,00214	0,00150	0,00103	0,00069	0,00046	0,00055
0,55		0,00223	0,00409	0,00333	0,00237	0,00168	0,00116	0,00080	0,00094
0,60		0,00493	0,00615	0,00486	0,00355	0,00259	0,00185	0,00132	0,00152
0,65		0,00830	0,00865	0,00678	0,00511	0,00382	0,00282	0,00208	0,00235
0,70		0,01225	0,01161	0,00913	0,00710	0,00544	0,00414	0,00313	0,00351
0,75		0,01673	0,01505	0,01197	0,00958	0,00753	0,00587	0,00455	0,00508
0,80	0,00356	0,02171	0,01900	0,01534	0,01263	0,01015	0,00809	0,00642	0,00714
0,85	0,01302	0,02717	0,02348	0,01932	0,01631	0,01338	0,01089	0,00883	0,00980
0,90	0,02257	0,03310	0,02851	0,02403	0,02068	0,01729	0,01436	0,01188	0,01316
0,95	0,03223	0,03949	0,03412	0,02957	0,02579	0,02196	0,01858	0,01565	0,01733
1,00	0,04199	0,04634	0,04035	0,03598	0,03171	0,02745	0,02363	0,02025	0,02241
1,05	0,05186	0,05364	0,04728	0,04325	0,03849	0,03384	0,02959	0,02578	0,02852
1,10	0,06184	0,06140	0,05500	0,05137	0,04618	0,04120	0,03655	0,03232	0,03577
1,15	0,07194	0,06963	0,06361	0,06036	0,05482	0,04957	0,04458	0,03997	0,04425
1,20			0,07323	0,07020	0,06445	0,05901	0,05375	0,04882	0,05407
1,25						0,06956	0,06412	0,05894	0,06531
1,30								0,07040	

**Критичні значення для відношення
фон Неймана (продовження)**

<i>k</i>	<i>n</i>						
	15	20	25	30	40	50	60
0,35	0,00001						
0,40	0,00002						
0,45	0,00004						
0,50	0,00009	0,00001					
0,55	0,00018	0,00002					
0,60	0,00033	0,00005	0,00001				
0,65	0,00059	0,00012	0,00002				
0,70	0,00100	0,00024	0,00005	0,00001			
0,75	0,00161	0,00044	0,00011	0,00003			
0,80	0,00250	0,00076	0,00023	0,00007	0,00001		
0,85	0,00375	0,00127	0,00044	0,00015	0,00002		
0,90	0,00547	0,00206	0,00079	0,00030	0,00004	0,00001	
0,95	0,00778	0,00323	0,00135	0,00057	0,00010	0,00002	
1,00	0,01079	0,00489	0,00222	0,00102	0,00022	0,00005	0,00001
1,05	0,01465	0,00720	0,00355	0,00176	0,00044	0,00012	0,00003
1,10	0,01950	0,01033	0,00550	0,00294	0,00085	0,00026	0,00008
1,15	0,02550	0,01448	0,00826	0,00474	0,00158	0,00054	0,00019
1,20	0,03280	0,01986	0,01208	0,00738	0,00280	0,00108	0,00043
1,25	0,04155	0,02670	0,01723	0,01117	0,00476	0,00206	0,00092
1,30	0,05189	0,03524	0,02402	0,01644	0,00780	0,00376	0,00185
1,35	0,06396	0,04571	0,03276	0,02357	0,01235	0,00656	0,00355
1,40	0,07787	0,05834	0,04379	0,03298	0,01892	0,01098	0,00649
1,45		0,07333	0,05743	0,04511	0,02810	0,01769	0,01133
1,50			0,07398	0,06038	0,04055	0,02750	0,01893
1,55				0,07920	0,05696	0,04131	0,03034
1,60					0,07797	0,06006	0,04675
1,65						0,08465	0,06942
1,70							0,09949

Кафедра «Моделювання та інформаційних технологій в економіці»

**Волонтир Людмила Олексіївна
Потапова Надія Анатоліївна**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання лабораторних робіт
та самостійної роботи студентів
денної та заочної форми навчання**

**з дисципліни
“ЕКОНОМЕТРІЯ”**

для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня
галузі знань 07 «Управління та адміністрування»
спеціальностей 073 «Менеджмент»,
074 «Публічне управління та адміністрування»,
073 «Менеджмент» спеціалізація «Логістика»

Вінниця – 2018