МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ

Г.М. Калетнік, С.В. Козловський, О.Г. Підвальна

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНІ РОЗРАХУНКИ В МЕНЕДЖМЕНТІ ТА БІЗНЕСІ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки
України як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ
Знання України
2010

УДК 330.4
ББК 65в6я73
К 59

Рецензенти:
А.Г. Мазур, *доктор економічних наук, професор;*
О.В. Мороз, *доктор економічних наук, професор;*
П.К. Ніколюк, *доктор фізико-математичних наук, професор.*

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (Лист Міністерства освіти і науки України № ______ від ________ р.).

Калетнік Г.М., Козловський С.В., Підвальна О.Г.
К 59 **Теоретичні основи моделювання та фінансово-економічні розрахунки в менеджменті та бізнесі:** Навч. посібник. — К.: Знання України, 2010. — 380 с.

ISBN

У посібнику розглянуті питання фінансово-економічних розрахунків в умовах визначеності (нарощені і дисконтовані суми, потоки платежів, ренти, кредитні розрахунки, оцінка інвестиційних проектів, фінансові розрахунки на ринку цінних паперів); в умовах невизначеності: теорія оптимального портфеля, теоретико-ймовірнісні методи, фінансові ризики. Розглянуто основи економетричних та статистичних розрахунків (ймовірнісний і регресійний аналіз, часові ряди) та теоретичні основи моделювання і прогнозування економічних процесів на основі теорії нечіткої логіки. Наведені питання і задачі для самостійної перевірки знань.

Посібник розрахований для студентів і викладачів економічних і фінансових спеціальностей вищих навчальних закладів а також для працівників, які займаються комерційною, економічною та фінансовою діяльністю.

ББК 65в6я73

ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Мова економіки усе більше стає мовою математики, а економіку всі частіше називають однією з найбільш математизованих наук. Досягнення сучасної економічної науки висувають нові вимоги до вищої професійної освіти сучасних економістів, менеджерів, фінансистів. Без знання економічних-математичних методів неможливо ні дослідження і теоретичне узагальнення емпіричних залежностей фінансово-економічних змінних, ні побудова надійного прогнозу в реальному секторі економіки, банківській справі, фінансах або бізнесі.

Чи є такий розділ економічної науки, як фінансово-економічні розрахунки? Що він містить у собі? Після появи відомих робіт Х. Марковіца (1952 р.), Д. Тобіна (1958 р.), Р. Фриша і Я. Тінберга (1969), Л. Клейтона (1980), Т. Хаавельмо (1989), Дж. Хекмана і Д. Макфадена (2000), за які їхні автори отримали Нобелівські премії, можна із упевненістю сказати, що такий розділ економіки є.

Як прийняти найкраще рішення в складній економічній ситуації, розрахувати можливий прибуток і збиток, знайти, які умови кредиту сьогодні найвигідніші, визначити, скільки будуть коштувати через рік-два гроші? Відповіді на ці питання можна знайти на стику економіки і математики за допомогою особливих прийомів з характерною назвою фінансово-економічні методи (розрахунки). Цим прийомам, дуже необхідним для успішної діяльності у різних сферах економіки, управління й фінансів, присвячена дана книга.

Фінансово-економічні розрахунки та методи складають систему практично необхідних в усіх галузях економіки методів розрахунку прибутковості фінансових, інвестиційних і торговельних операцій з урахуванням часу, інфляції, валютних курсів, відсотків і інших економетричних показників.

В посібнику розглянуті положення та ідеї Х. Марковіца і Д. Тобіна про складання оптимального портфеля цінних паперів, які доступні навіть широкому колу читачів. Ідея оптимального портфеля відносно проста. Припустимо, що Ви маєте 1 млн. доларів. Ви хочете купити на всю суму цінні папери: облігації, акції і т.ін. Звичайно, Ви хочете, щоб вони приносили Вам певний дохід, але зайво ризикувати не хочете. Теорія Х. Марковіца і Д. Тобіна диктує витончене вирішення: структура ризикових цінних паперів Вашого портфеля повинна повторити структуру великого ринку цих паперів! Якщо на великому ринку 1% всіх ризикових паперів складають акції і облігації «General Motors», то і у Вашому портфелі серед ризикових паперів папери цієї компанії повинні скласти таку ж частку! Інвестор може лише варіювати частку безризикових паперів у своєму портфелі (більше таких паперів – менший дохід і менший ризик, і навпаки).

Варті уваги схеми використання опціонів, які значно зменшують ризик фінансових операцій. Напевно, як і виводи теорії Х. Марковіца і Д. Тобіна, ці схеми повинні бути відомі якомога більш широкому колу людей, а не тільки економістам і фінансистам. Звичайно, потрібно зробити висновок із всіх цих фінансових нововведень: всі вони винайдені для того, щоб одержувати прибуток на фінансовому ринку за рахунок інших учасників цього ринку. Давній висновок про те, що на фінансовому ринку виграють лише «акули», лише ті, хто має більше грошей, хто має більше інформації, залишається вірним і сьогодні.

На перший погляд, фінансово-економічні розрахунки зводиться до арифметики. У повсякденному житті так і є: роблячи покупку, часто буває важко обійтися без калькулятора. Однак ситуація різко ускладнюється, якщо мова йде про невеликі комерційні операції, не кажучи вже про банківську діяльність. Дійсно, будь-яка комерційна операція припускає сукупність погоджених всіма її учасниками умов: суму кредиту (позики) і його строк, ціну товару, спосіб погашення боргу, спосіб нарахування відсотків, розподіл прибутку, штрафні санкції і т.ін. Оскільки факторів багато і їхня взаємодія не завжди проста, необхідний кількісний аналіз. Потрібність враховувати різного роду комерційний ризик створює додаткові складності. Тому крім арифметики в комерційних і фінансових розрахунках використовуються алгебраїчні методи, методи математичного аналізу, теорії ймовірностей, математичної статистики і інших розділів сучасної математики.

Історично кількісний фінансово-економічний аналіз сформувався на стику фінансів, економіки і математики. Предметом вивчення фінансово-економічних методів і розрахунків є гроші, цінні папери, різні операції з ними на ринку, а методи розрахунку запозичені з різних розділів сучасної математики. Ці методи можуть бути елементарними, доступними школяру, більш складними, досліджуваними у вищих навчальних закладах, і дуже складними, які потребують залучення професійних математиків.

В посібнику приділено увагу основним методам економетричних та статистичних розрахунків. В економетриці, як дисципліні на стику економіки (включаючи менеджмент) і статистичного аналізу, природно виділити три види наукової і прикладної діяльності: а) розробка і дослідження економетричних методів (методів прикладної статистики) з урахуванням специфіки економічних даних; б) розробка і дослідження економетричних моделей відповідно до конкретних потреб економічної науки і практики; в) застосування економетричних методів і моделей для статистичного аналізу конкретних економічних даних. Основні результати економічної теорії носять якісний характер, а економетричні розрахунки вносять у них емпіричний зміст. Математична економіка відображає економічні закони у вигляді математичних співвідношень, а економетрика здійснює кваліфіковану перевірку цих законів. Економічна статистика дає інформаційне забезпечення досліджуваного процесу у вигляді вихідних статистичних даних і економічних показників, а економетрика, використовуючи традиційні математико-статистичні й спеціально розроблені методи, проводить аналіз кількісних взаємозв'язків між цими показниками.

Багато базових понять економетричних розрахунків, як і фінансових розрахунків, мають два визначення – економічне і математичне. Подібна подвійність має місце і у формулюваннях результатів. Характер наукових праць за даним напрямом варіюється від класичних економічних робіт, у яких майже не використовується математичний апарат, до солідних математичних праць, які використовують досить тонкий апарат сучасної математики.

Економічна складова фінансово-економічних розрахунків, безумовно, є первинною. Саме економіка визначає постановку завдання і вихідні передумови, а результат, сформований математичною мовою, становить інтерес лише в тому випадку, якщо вдається його економічна інтерпретація. Але, загалом, справжні лідери економіки – це виробники матеріальних цінностей і послуг: автомобілів, магнітофонів, комп'ютерів і т.ін. Тільки там, у реальному секторі економіки, робляться «справжні» гроші, і фінансово-економічна сфера, яку б мету вона не переслідувала сама по собі, змушена займатися обслуговуванням цього сектора.

В посібнику також розглянуто найсучасніші методи моделювання та прогнозування економічних процесів, які є невід’ємною складовою сучасної економіки. Розглянуто основи моделювання та прогнозування економічних процесів з застосуванням апарату теорії нечіткої логіки, яка є в даний час найперспективнішою зі всіх економіко-математичних методів.

Фінансово-економічні методи і розрахунки необхідні менеджерам, які управляють виробництвом; фінансистам, що постійно мають справу з відстроченням і розстроченням платежів; малим і середнім підприємствам, у яких немає можливості наймати кваліфікованих фінансових менеджерів; бухгалтерам і економістам, які аналізують економічний стан своїх підприємств і прогнозують їх майбутнє.

В посібнику пропонуються методи фінансово-економічних розрахунків, які є основою таких дисциплін, як фінансова математика, економетрика, економічний аналіз, інвестиційний аналіз, фінансовий менеджмент, банківська справа й інші, які вивчаються студентами економічних спеціальностей у вищих навчальних закладах.

При написанні даного посібника автори керувалися такою установкою: посібник повинен бути зрозумілим і корисним студентам вищих навчальних закладів. Викладений у посібнику матеріал містить все найважливіше з фінансово-економічних методів і розрахунків. У посібнику наведено багато прикладів, що ілюструють викладений матеріал. Наприкінці кожного розділу даються задачі, яких цілком достатньо для організації практичних занять.

Основні положення посібника апробовані в [14] і отримали найкращі відзиви від читачів, що і спонукало авторів до подальшого доопрацювання та розширення матеріалу. І як результат – книги „Теоретичні основи моделювання та фінансово-економічні розрахунки в менеджменті та бізнесі”, яку ви тримаєте перед собою.

ЧАСТИНА 1. ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНІ РОЗРАХУНКИ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

Розділ 1. Нарощення і дисконтування грошових сум

Грошові суми змінюються в часі. Люди беруть кредити (позики) і самі позичають гроші (наприклад, кладуть їх у банк) у надії поліпшити в майбутньому своє матеріальне становище (або для інших цілей). При цьому вони мають на увазі які-небудь конкретні дії, наприклад, вони мають намір купити магазин і за рахунок прибутку від роботи виплатити взяті в борг гроші або нагромадити на машину і здійснювати приємні подорожі. Для того щоб зацікавити інших людей позичити необхідні гроші, їм зобов'язуються повернути в майбутньому більшу суму. Це і є основа теорії відсотка.

Невід'ємною складовою фінансової математики є враховування фактору часу. У його основі лежить принцип нерівноцінності грошей у різні календарні строки. Однакові суми грошей «сьогодні» і грошей «завтра» оцінюються по-різному. Сьогоднішні гроші прирівнюються більшій грошовій масі в майбутньому і, навпаки, замість грошей «потім» можна погодитися на зменшення виплат, але зараз. Чим викликані подібні переваги? По-перше, можливістю продуктивного використання грошей, розглядачи їх, як дохід фінансового активу. Так, виробничі інвестиції дозволяють у перспективі не тільки повернути витрачені кошти, але й одержати вагомий додатковий ефект.

Інший фактор, що впливає на переваги, – невизначеність майбутнього і пов'язаний з нею ризик. Гроші «у кишені» можуть бути витрачені на споживання в даний момент часу.

Гроші, що зберігаються, піддані всіляким ризикам залежно від способу заощадження. Якщо вони зберігаються на домашньому «депозиті», наприклад, під матрацом, їм загрожує знецінення через інфляцію або смерть їхнього власника.

У випадку, коли гроші даються в борг, ризик неповернення залежить від успішності кредитованого заходу, який може завершитися і повним крахом, збитком. Тому сума, що повертається, завжди повинна бути більшою позикової як з урахуванням строку позики, так і існуючого ризику втрат.

Формули, що наводяться у даному розділі, дозволяють перераховувати і приводити грошові потоки до різних часових дат без урахування невизначеності. Для випадків, коли впливом стохастичного фактору і дефіцитом інформації нехтувати не можна, розроблені спеціальні підходи. Деякі з них, зокрема для операцій із цінними паперами, будуть розглянуті в наступних розділах даного посібника.

1.1. Основні поняття кредитної операції

«Відсоток є ціна, яку люди сплачують за те, щоб одержати ресурси зараз, замість того, щоб чекати доти, поки вони зароблять гроші, на які ці ресурси можна купити», – така думка відомого економіста Пола Хеше.

Слово «відсоток» походить від латинського pro centum, тобто «на сотню». З математичної точки зору 1% від A означає соту долю деякого числа A, а сам символ *%* означає 1/100. Наприклад:

$$7\% = 0{,}07, \qquad 7\% \text{ від } A = 0{,}07\, A.$$

У фінансовій сфері A – кількість будь-яких грошових одиниць – гривень, доларів, євро і т.ін. З економічної точки зору «відсоток» являє собою плату за використання коштів одної особи *(кредитора)* іншою особою *(позичальником, дебітором),* виражену в сотих долях від початкової суми.

При використанні коштів важливо розуміти що є капітал?

Капітал – це ресурси, вилучені з поточного вживання і відведені під майбутні результати. Капіталом у широкому значенні називають усе, що приносить потік доходів. Капітал – це не скільки вкладено, а скільки можна одержати. А для оцінювання цього необхідні математична грамотність і економічний спосіб мислення. Отже, якщо капіталом називають те, що приносить потік доходу, то капіталом можуть бути названі і будинки з устаткуванням (фізичний капітал або капітальні ресурси), і природні ресурси, і фінансовий капітал (цінні папери, гроші в банку і т.ін.), і «людський капітал» (інвестиції в знання, навички, здоров'я). Нерозривний зв'язок фінансового і фізичного капіталу обумовлений багатьма причинами, головною з яких є здатність капіталу в будь-якій його формі приносити дохід, який, природно, вимірюється у відсотках від початкового капіталу. Іншими словами, головна властивість капіталу – це здатність приносити відсоток.

Одержання кредиту – розповсюджена фінансова операція. У своїй найпростішій формі вона являє собою участь двох осіб – кредитора і дебітора – і однократне надання грошової позики. При цьому дебітор зобов'язаний повернути отриману позику через точно обговорений строк і сплатити її відповідно до встановленого в договорі відсотка.

Ця кредитна операція з кількісної сторони характеризується такими *часовими параметрами* і *грошовими величинами:*

t_0 – дата видачі позики;

T – її строк або період;

t_0+T – дата погашення позики (date of maturity);

$S(t_0)$ – розмір виданої позики;

$I(t_0,T, S(t_0))$ – плата за позику, відсоток, процентний дохід або абсолютне збільшення початкового капіталу $S(t_0)$;

$S(t_0+T)$ – повна вартість кредиту або нарощена сума (accumulated value) яка розраховується за формулою (1.1) і наведена на рисунку 1.1.

$$S(t_0 + T)= S(t_0) + I(t_0, T, S(t_0)) \qquad (1.1)$$

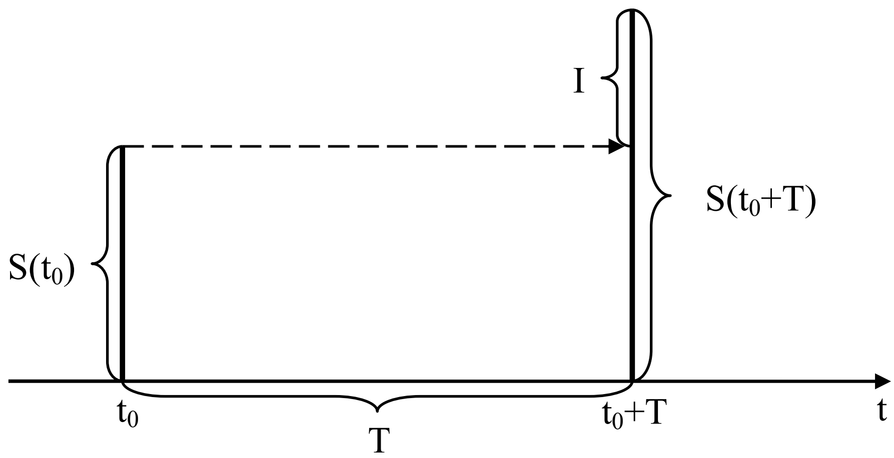


Рисунок 1.1 – Повна вартість кредиту

Очевидно, що із трьох грошових величин тільки дві є незалежними, причому найбільш важливою є *відсоток* $I(t_0,T,S(t_0))$. Якщо умови договору ясні з контракту, то плату за позику будемо позначати через I. Помітимо, що якщо під позикою мається на увазі внесок у банк або будь-яка інша інвестиція, то відсоток є *доходом* від цієї інвестиції.

Розумна угода повинна бути взаємовигідною для обох сторін, що є основою її регулярного застосування. Тому необхідно правильно оцінити її ефективність, щоб вона не занадто відрізнялася від існуючої в момент t_0 її укладання середньої ринкової величини. Існують два показники для досягнення даної цілі (формули 1.2-1.3).

Ставка відсотка $i(t_0,T)$ (ефективність вкладення):

$$i(t_0,T)=\frac{S(t_0+T)-S(t_0)}{S(t_0)}=\frac{I}{S(t_0)}. \qquad (1.2)$$

Дисконт $d(t_0,T)$(відносна знижка):

$$d(t_0,T)=\frac{S(t_0+T)-S(t_0)}{S(t_0+T)}=\frac{I}{S(t_0+T)}. \qquad (1.3)$$

У багатьох випадках зручно використовувати ще одну величину, яку називають дисконт-фактором $v(t_0,T)$:

$$v(t_0,T)=1-d(t_0,T)=\frac{1}{1+i(t_0,T)}=\frac{S(t_0)}{S(t_0+T)}. \qquad (1.4)$$

У формулах (1.2)-(1.4) i і d являють собою десяткові дроби, на практиці їх звичайно виражають у відсотках, для чого множать на 100.

При теоретичному аналізі цієї найпростішої кредитної операції часто буває зручно прийняти момент видачі кредиту за початковий, тобто прийняти t_0=0. Тоді замість $S(t_0)$ і $S(t_0+T)$ можна писати $S(0)$ і $S(T)$, а строк T кредиту вказувати у вигляді індексу, наприклад: i_T, d_T, v_T.

У фінансовій практиці в договорі вказують обидві дати – дату видачі і погашення кредиту, тобто t_0 і t_0+T.

Приклад 1.

а) Кредит виданий у момент $t_0=0$ на строк $T=1$ рік у сумі $S(0)$=1 млн. грн. з умовою повернення $S(1)$=2 млн. грн. У цьому випадку інтерес і дисконт відповідно рівні:

i_1 = 1 або 100%, di = 0,5 або = 50%.

б) Кредит виданий на суму $S(0)$=3 млн. грн. на строк T=1 рік під ставку i_1=50%. Тоді через рік доведеться повернути:

$S(1) = S(0)\cdot(1+ i_1)$ = 4,5 млн. грн.

в) Кредит виданий на строк T=1 рік з умовою повернення $S(1)$=3 млн. грн. і дисконтом d_1=20%. Тоді дисконт-фактор v_i=80%, і дебітор отримає:

$S(0) = S(1)\cdot v_i$ = 2,4 млн. грн.

Приклад 2. Нехай у момент t_0=0 виданий кредит $S(0)$=2 млн. грн. на строк T=0,5 року за плату $I(0,5)$=1,2 млн. грн. Тоді піврічна процентна ставка:

$$i_{0,5} = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ або } 60\%.$$

Таким чином, процентна ставка *i* відноситься до всього періоду дії кредитного договору, тобто є процентною ставкою за період *T*. Строки кредитів змінюються від декількох днів до декількох років, а іноді і не фіксуються заздалегідь, тому процентна ставка звичайно задається не для всього періоду *T* угоди, а для деякого базового періоду.

У фінансово-економічних розрахунках основна одиниця часу, наприклад рік, називається базовою. Часовий інтервал, наприкінці (а іноді, – на початку) якого нараховуються відсотки за цей інтервал, називається *конверсійним періодом,* або *періодом нарахування*.

Якщо довжина конверсійного періоду збігається з базовою одиницею часу, то відповідна процентна ставка називається *ефективною*.

Для нарахування відсотків на практиці використовують схеми простих відсотків (simple interest), складних відсотків (compound interest) і їхні різні комбінації.

1.2. Прості відсотки: нарахування, нарощення, характеристики

Ставку відсотка позначаємо як у п. 1.1 - *i*. Фіксуємо яку-небудь суму *S*. При нарощенні простих відсотків по ставці *i* кожна наступна сума більше попередньої на частку *i* від початкової суми *S,* тобто на *iS*. До кінця одиничного проміжку нарахування сума *S* зросте на *iS* і стане $S_1=S+i=S(1+i)$, до кінця 2-го проміжку нарахування ця сума зросте ще на *iS* і стане $S_2=S_1+i=S(1+i)+ i=S(i+2i)$ і т.ін. До кінця *n-го* проміжку нарахування нарощена сума стане $S_n=S(1+ni)$. Таким чином, послідовність нарощених сум $S,Si,...,S_n$ є арифметична прогресія з початковим членом *S* і різницею *iS*.

Формула для нарощення простих відсотків за *1-й* період, при *i*(%), буде мати вигляд (1.5), а формула нарощення за n періодів (1.6.):

$$S_1 = S + \frac{S}{100} \cdot i = S \cdot (1 + \frac{i}{100}); \tag{1.5}$$

$$S_n = S + \frac{S}{100} \cdot i \cdot n = S \cdot \left(1 + \frac{n \cdot i}{100}\right). \tag{1.6}$$

Вираз $\left(1+\frac{n \cdot i}{100}\right)$ називають *коефіцієнтом нарощення простих відсотків* і позначають *A(n)*.

Приклад 3. Нехай *S*=1000, *i*=10%, тобто як частка *i*=0,1. Отже, нараховані і нарощені по простих відсотках суми такі:

- нараховані 1000+0,1·1000=1000+100=1100
- нарощені 1100+100=1200, 1200+100=1300 і т.ін.

Задача 1. Річна ставка простих відсотків дорівнює 12,5%. Через скільки років початкова сума подвоїться?

Рішення. Треба вирішити нерівність: (1+0,125·n)≥2, тобто 0,125·n≥1. Одержуємо n≥1/0,125.

Відповідь: через 8 років.

Формула нарощення простих відсотків *S=S(1+ni)*, виведена для цілих додатних *n*, цілком може застосовуватися і для нецілих *t*.

Сума *S*, нарощена по ставці *i* простих відсотків, через *t* проміжків нарахування стане $S_t=S(l+ti)$.

Різниця нарощеної суми і початкової називається *процентними грошима.* При нарощенні простих відсотків процентні гроші зростають в арифметичній прогресії. Графічно це показано на рисунку 1.2, де *S* – початкова сума, відрізки S_nT_n нарощені суми і відрізки S_nM_n процентні гроші.

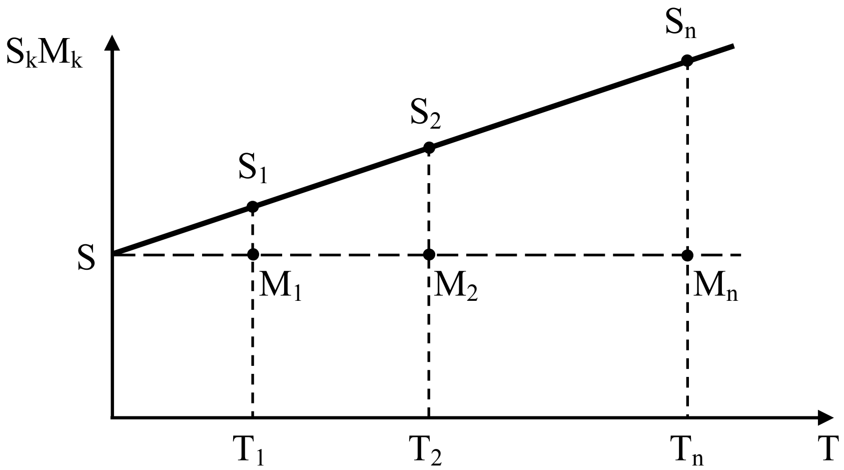


Рисунок 1.2 – Нарощення процентних грошей

Задача 2. Нехай 2 млн. грн. видано в кредит на 6 місяців під прості відсотки по ставці 10% на місяць. Знайдемо нарощене значення боргу наприкінці кожного місяця.

Рішення. Позначимо через S_n нарощене значення боргу наприкінці місяця *n*. Тому що *S*=2 млн. грн., *i*=0,10, то в силу формули (1.6)

$$S_n=3\cdot(1+0{,}10\cdot n),\ \ n = 1,2,3,4,5,6.$$

Отриманий результат представимо у вигляді таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

n	0	1	2	3	4	5	6
S_n	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2

Ми бачимо, що послідовність $S_0, S_1,..., S_6$ являє собою арифметичну прогресію з 7 членів з початковим членом 2 млн. грн. і різницею 200 тис. грн.

При короткострокових операціях строк τ інвестування зручно вимірювати в днях, а тривалість *T* року приймати рівною або 360=12·30 днів, або фактичному числу днів у році. У першому випадку прості відсотки називають *звичайними,* у другому – *точними.* При фіксованому *i(%)* звичайні відсотки більші точних. Тому формулу (1.6) можна записати у вигляді:

$$S(\tau) = S \cdot \left(1 + \frac{i \cdot \tau}{100 \cdot K}\right) \tag{1.7}$$

де *K*=360, 365 або 366 днів.

При підрахунку числа днів строку інвестування τ можливі два варіанти. Перший варіант: найбільш часто підраховують точне число днів за допомогою спеціальної таблиці, у якій наведені порядкові номери кожного дня в році. При цьому день видачі і повернення позики вважають за один день. У другому варіанті підраховують точне число місяців у строку і додають число днів, що залишилися. При цьому тривалість кожного повного місяця приймають рівною 30 дням. Другий варіант дає звичайно менше значення τ. Таким чином, усього є чотири схеми розрахунку простих відсотків, з яких застосовуються такі три.

1. Точні *відсотки з точним числом днів позики.* У цій схемі при нарахуванні відсотків за 6 місяців строк позики приймається рівним 182 дням. Ця, найбільш точна, схема широко застосовується в банках Великобританії.
2. Звичайні *відсотки з точним числом днів позики.* Ця схема дає трохи більший результат, чим попередня, і використовується в банках Франції.

3. *Звичайні відсотки з наближеним числом днів позики.* Це – менш точна схема, вона застосовується в банках Німеччини.

Четверта схема – точні відсотки *і наближене число днів позики* – не використовується.

Існують також змінні ставки простих відсотків, які використовуються при зростанні рівня інфляції.

Припустимо, що інфляція змушує часто змінювати ставку простих відсотків (floating rate). Нехай за період договору (t_0, t_0+T) зміни річної ставки відбувалися $m-1$ раз у моменти $t_1 < t_2 <...<t_{m-2}<t_{m-1}...$

Позначимо $t_m=t_0+T$ і розіб'ємо період договору (t_0, t_m) на m підінтервалів з постійною річною ставкою, так що на підінтервалі (t_0,t_1) ставка складає j_0, на підінтервалі (t_1,t_2) – j_1,... , а на останньому підінтервалі (t_{m-1}, t_m) вона дорівнює j_{m-1} (рисунок 1.3).

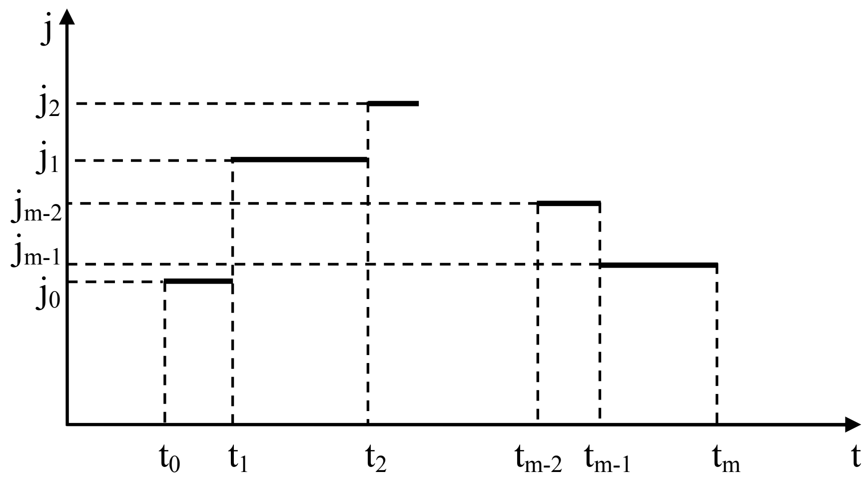


Рисунок 1.3 – Зміна ставки в залежності від періоду

Тоді, якщо початкова сума $S(t_0)$ розміщена під прості відсотки при зазначених вище змінних річних ставках, то при відсутності проміжних операцій коефіцієнт нарощення на всьому інтервалі (t_0, t_m) складе (формула 1.8):

$$A(t_0, t_m) = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot j_k . \qquad (1.8)$$

Задача 3. Договір передбачає таку схему нарахування простих відсотків: за перший рік 60%, у кожному наступному півріччі ставка підвищується на 10%. Потрібно визначити коефіцієнт нарощення за 2,5 роки.

Рішення. Тут довжина початкового підінтервала становить 1 рік, першого, другого і третього підінтервалів – півроку, причому за умовами договору j_0=0,60, j_1=0,70, j_2=0,80, j_3=0,90. Тому в силу формули (1.8) коефіцієнт нарощення дорівнює:

$$A(2,5) = 1+1\cdot0,60+0,5\cdot0,70+0,5\cdot0,80+0,5\cdot0,90 = 2,80.$$

Приймемо тепер, що в момент кожної зміни ставки нарощена до цього моменту сума вкладається знову під новий простий відсоток. Ця операція називається *реінвестуванням,* або *капіталізацією,* відсотків.

При реінвестуванні в момент кожної зміни річної ставки простих відсотків і початкової інвестиції $S(t_0)$ нарощена на інтервалі (t_0, t_m) сума складе:

$$S(t_m) = S(t_0)\prod_{k=1}^{m-1}\left[1 + (t_{k+1} - t_k)\cdot j_k\right]. \qquad (1.9)$$

Приклад 4. На деяку суму *S* щомісяця протягом кварталу нараховуються прості відсотки по ставці 9% у перший місяць, 10% – у другий, 11% – у третій. Тоді при реінвестуванні коефіцієнт нарощення суми за квартал складе: (1+0,09)·(1+0,10)·(1+0,11)=1,319.

У фінансовій практиці дуже, часто доводиться вирішувати задачу, зворотну обчисленню нарощеної суми: за заданою заздалегідь нарощеною сумою $S(t_0+T)$ потрібно визначити, яку суму $S(t_0)$ треба інвестувати в момент $t_0=0$, щоб через час *T* при постійній ставці простого відсотка одержати необхідну суму $S(t_0+T)$. З (1.6) слідує, що:

$$S(t_0) = \frac{S(t_0 + T)}{1 + i(t_0)T} \qquad (1.10)$$

Сучасним, приведеним або поточним значенням (present value) майбутньої суми $S(t_0+T)$ у даний момент t_0 називається сума $S(t_0)$, що при інвестуванні в момент t_0 по ставці $i(t_0)$ простого відсотка дасть через час *T* необхідне нарощене значення $S(t_0+T)$.

Операція обчислення сучасної вартості майбутньої суми грошей називається *математичним дисконтуванням*, а величина $1/[1+i(t_0)T]$ – *дисконтним множником*.

Різниця $S(t_0+T)-S(t_0)$ часто називають *дисконтом суми* $S(t_0+T)$ і позначають $D(T)$.

Задача 4. Позичальник одержав кредит на 6 місяців під 80% річних з умовою повернути 3 млн. грн. Яку суму одержав позичальник у момент укладання договору і чому дорівнює дисконт?

Рішення. Приймаючи рік рівним 360 дням, а 6 місяців – 180 дням, отримаємо:

$$S(t_0) = \frac{3}{1 + 0{,}80 \cdot \frac{180}{360}} = 2{,}143 \text{ млн. грн.}$$

Відповідь: дисконт D=3 млн. грн - 2,143 млн. грн = 857 тис. грн.

Завдання 5. Яку суму інвестор повинен внести сьогодні під прості відсотки по ставці 50% річних, щоб нагромадити 200 тис. грн.: а) за півроку; б) за два роки; в) за шість років?

Рішення. Маємо (у грн.):

а) $$S(t_0) = \frac{200000}{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 160000;$$

б) $$S(t_0) = \frac{200000}{1 + 0{,}5 \cdot 2} = 100000;$$

в) $$S(t_0) = \frac{200000}{1 + 0{,}5 \cdot 6} = 50000.$$

Розглянемо випадок, коли простий відсоток за кредит або будь-яку іншу інвестицію виплачується в момент укладання договору строком на 1 рік, тобто «уперед» (попередньо). Позначимо цей відсоток через d і назвемо його *річною дисконтною ставкою,* якщо він еквівалентний річній ставці t простого відсотка.

Річна *дисконтна ставка d для простих відсотків «уперед»* пов'язана з річною ставкою *i для простих відсотків «потім»* співвідношенням:

$$d = \frac{i}{1 + i}. \tag{1.11}$$

А *ефективною ставкою дисконту* називається величина:

$$\upsilon = 1 - d = \frac{1}{1 + i}. \tag{1.12}$$

Прості відсотки застосовують у таких випадках:

- При видачі короткострокових позик на строк менш року;
- Коли відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються кредитору позичальником наприкінці кожного конверсійного періоду;
- При ощадних вкладах із щомісячною виплатою відсотків і т.ін.

1.3. Складні відсотки: нарахування, нарощення, характеристики

При нарощенні складних відсотків по ставці *i* кожна наступна сума зростає на частку *i* від попередньої. Таким чином, до кінця одиничного проміжку нарахування сума *S* зросте на частку *i* і стане $S_1=S+iS=S(1+i)$, до кінця 2-го проміжку нарахування ця сума зросте ще на частку *i* від S_1 і стане $S_2=S_1+i_1S= S(1+i)+iS(1+i)=S(1+i)^2$ і т.ін. До кінця *n-го* проміжку нарахування нарощена сума стане $S_n=S(1+i)^n$. Таким чином, послідовність нарощених сум $S,S_i,\ldots,S_n$ є геометричною прогресією з початковим членом *S* і знаменником прогресії *(1+i)*.

Формула для нарощення складних відсотків за *1-й* період збігається з формулою (1.5) нарощення простих відсотків. Формула нарощення за *n* періодів складних відсотків, при *i(%)*, буде мати вигляд (формула 1.13.):

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n \tag{1.13}$$

$$A(0,n)=\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n . \tag{1.14}$$

Вираз $\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$ називають *коефіцієнтом нарощення складних відсотків* і позначають *A(0,n)*. Цей коефіцієнт дорівнює нарощеному значенню для *1* грошової одиниці у момент *n*, якщо вона була вкладена в момент *0*.

Правило (принцип стабільності ринку): Якщо не враховувати податки й інші накладні витрати, то коефіцієнт нарощення на деякому інтервалі дорівнює добутку коефіцієнтів нарощення на кожному зі складових його підінтервалів.

Приклад 5. Нехай S=1000, i=10%, тобто як частка i=0,l. Отже, нарощені по складних відсотках суми такі:

1000, 1000+0,1·1000=1000+100=1100, 1100+0,1·1100=1210,

1210+0,1·1210=1331,1 і т.ін.

Задача 6. Річна ставка складних відсотків дорівнює 8%. Через скільки років початкова сума подвоїться?

Рішення. Треба вирішити нерівність: $(1+0{,}08)^n \geq 2$. Логарифмуємо за основою натуральних логарифмів і одержуємо $n \geq \ln(2)/\ln(1{,}08)$. Відповідь: через 9 років.

Із цього прикладу видно, що обчислення зі складними відсотками більш складні, ніж із простими. Для занять з фінансово-економічних розрахунків необхідно мати математичний калькулятор (щоб можна було підносити будь-яке додатне число до будь-якого степеня).

Формула нарощення складних відсотків (1.13) виведена для цілих додатних n, може застосовуватися і для нецілих t. Сума S, нарощена по ставці i складних відсотків, через t проміжків нарахування стане $S_t=S(1+i)^t$ при $t \geq 0$.

При роботі зі складними відсотками іноді для наближеного оцінювання корисно таке правило.

Правило: Якщо процентна ставка є a, то подвоєння капіталу по такій ставці відбувається приблизно за $72/a$ років.

Наприклад, відповідно до цього правила при ставці 3% подвоєння капіталу відбувається за 24 роки. Це правило застосовується для невеликих ставок.

У довгострокових фінансово-кредитних операціях відсотки або виплачуються відразу після їхнього нарахування, або реінвестують, застосовуючи *складні відсотки*. Вхідна сума або база для нарахування складних відсотків збільшується з кожним періодом нарахування, а для простих відсотків база постійна і дорівнює $S(0)$. Тому нарощення по складних відсотках відбувається із прискоренням. Приєднання нарахованих відсотків до їхньої базової суми називається *капіталізацією відсотків.*

Також можливий варіант нарахування відсотків за кілька періодів у році. Розглянемо випадок, коли період нарахування менше року, причому 1 рік містить ціле число m періодів нарахування. У таблиці 1.2 наведені декілька періодів нарахування, які часто зустрічаються, і відповідні їм значення m:

Таблиця 1.2

Період нарахування	1 день	1 тиждень	1 місяць	2 місяця	3 місяця	4 місяця	6 місяців	12 місяців
m	365	52	12	6	4	3	2	1

Нехай g_m – ставка складних відсотків за період нарахування, число яких за рік складає *m*. Тоді за *n* років число періодів нарахування складе *mn*, так що, у силу формули (1.14), коефіцієнт нарощення на інтервалі часу *(0,n)* дорівнює:

$$A(0,n) = (1 + g_m)^{mn}, n = 1,2... \tag{1.15}$$

Якщо будь-який початковий капітал $S(t_0)$ вкладений у момент t_0 під постійну ставку g_m, то коефіцієнт нарощення на інтервалі (t_0, t_0+T) будь-якої довжини *T*, обмірюваної в роках, дорівнює:

$$A(t_0, t_0 + T) = (1 + g_m)^{mT}, T \geq 0. \tag{1.16}$$

Відзначимо, що у формулах (1.15), (1.16) строк інвестиції вимірюється в періодах нарахування і становить відповідно *mn* і *mT* періодів.

Приклад 6. Нехай початковий внесок *S(0)*=250 тис. грн. вкладений на 4 роки під складні відсотки при ставці 100% річних. Простежимо за збільшенням внеску по роках. Для цього за допомогою формули нарощення (1.13) складемо таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

t, років	0	1	2	3	4
$(1+i)^t$ $S(t)=S(0) \cdot 2^t$, грн.	1 $250 \cdot 10^3$	2 $5 \cdot 10^5$	4 10^6	8 $2 \cdot 10^6$	16 $4 \cdot 10^6$

Ми бачимо, що при *i*=100% збільшення відбувається дуже швидко.

Задача 7. 13 січня в банк поклали суму 1000 до запитання під ставку 12% річних складних відсотків. Яку суму зніме вкладник 1 вересня?

Рішення. Скористаємося формулою нарощення складних відсотків $S_t=S(1+i)^t$. Але як обчислити *t*? Треба визнати, що однозначної відповіді в цій ситуації немає. Оберемо, найпростіший варіант: будемо вважати, що в році 360 днів, у кварталі – 90, в одному місяці – 30 і т.ін. (врахуємо, що в році є кілька святкових днів і т.ін.). Тоді t=(30·7+17)/360 і сума, яку зніме вкладник буде 1074.

При великій інфляції банк іноді змінює ставки складних відсотків, які передбачені договором із вкладником (плаваючі ставки складних відсотків). Природно, що тоді точно розрахувати нарощену суму неможливо і мова може йти тільки про її орієнтовний прогноз. У деяких випадках у договорі передбачаються змінні від одного періоду нарахування до наступного, але заздалегідь обговорені процентні ставки. Якщо $j_1, j_2, \ldots j_k$ – послідовні значення договірних процентних ставок, а $n_1, n_2, \ldots n_k$ – число періодів нарахування по відповідних ставках, то коефіцієнт нарощення за весь строк дорівнює:

$$A(0, n_k) = (1 + j_1)^{n_1} \cdot (1 + j_2)^{n_2} \ldots (1 + j_k)^{n_k} \qquad (1.17)$$

Приклад 7. Процентна ставка по позики складає 30% плюс маржа (доплата за накладні витрати, комісійні) 2% у квартал за перший рік і 40% плюс маржа 3% за півріччя в другий рік. Тоді коефіцієнт нарощення за два роки складе: $1{,}32^4 \cdot 1{,}43^2 = 3{,}036 \cdot 2{,}045 = 6{,}208$.

Формула нарощення складних відсотків, виведена для цілих додатних n, цілком може застосовуватися і для нецілих T. Нехай строк інвестиції не є цілим числом, тобто $T=[T]+\{T\}$, де $[T]$ – ціла частина T а $\{T\}$ – дробовий залишок. Тоді відсотки можна нараховувати, по-перше, за загальною формулою (1.13) по-друге, за допомогою комбінованого методу, коли за ціле число періодів нарахування нараховуються складні відсотки, а за дробову частину – прості:

$$S_T = S \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^{[T]} \cdot \left(1 + \frac{i}{100} \cdot \{T\}\right), \; T > 0. \qquad (1.18)$$

Цікаво відзначити, що нарощена сума (1.18) буде більша, ніж (1.13). Це означає, наприклад, що для вкладників вигідніший другий метод, а для банку – перший.

Часто доводиться вирішувати задачу, зворотню обчисленню нарощеної суми: за заданою заздалегідь нарощеною сумою $S(t_0+T)$ потрібно визначити, яку суму $S(t_0)$ треба інвестувати в момент $t_0=0$, щоб через час T при постійній ставці складного відсотка одержати необхідну суму $S(t_0+T)$ (аналогічно формулі 1.10, для простих відсотків). Тут $S(t_0)$ називається *сучасним* або *приведеним значенням* для $S(t_0+T)$. Різниця $S(t_0+T)-S(t_0)=I(T)$ називається *складним дисконтом*.

При заданих $S(t_0+T)$ і річній процентній ставці i:

$$S(t_0) = \frac{S(t_0 + T)}{(1+i)^T},\ T > 0 \tag{1.19}$$

Задача 8. Потрібно знайти сучасне значення боргу, повна сума якого через 3 роки складе 7 млн. грн. Відсотки нараховуються по таких ставках: а) 140% відсотків наприкінці кожного року; б) 20% наприкінці кожного кварталу; в) 120% річних наприкінці кожного місяця.

Рішення. Маємо (значення наведені в гривнях):

а) $$S(t_0) = \frac{7 \cdot 10^6}{(1+1{,}4)^3} = 506366;$$

б) $$S(t_0) = \frac{7 \cdot 10^6}{(1+0{,}20)^{12}} = 785105;$$

в) $$S(t_0) = \frac{7 \cdot 10^6}{\left(1+\frac{1{,}2}{12}\right)^{36}} = 226442.$$

Підбиваючи підсумок можна зробити висновок, що складні відсотки – це плата за користування позикою, яка розраховується виходячи з величини боргу, у яку включається сума відсотка нарахованого раніше.

1.4. Порівняння сили росту простих і складних відсотків

Наведемо цікавий приклад, що ілюструє колосальний ріст нарощення по складних відсотках, якщо число періодів нарахування велике. В 1624 році за острів Манхетен, на якому розташований центр Нью-Йорка, вождю індійського племені було сплачено 24 долари. В 1974 р. – через 350 років – вартість землі цього острова оцінювалася приблизно в 40 млрд. доларів, тобто коефіцієнт нарощення склав $1{,}667 \cdot 10^9$! Якби вождю вдалося покласти 24 долари в банк усього під 6,3 (складних) річних (6,3 – середній відсоток по довгострокових вкладах у США), то через 385 років, в 2009 році, була б накопичена сума приблизно 394 019 830 000 доларів. Цей приклад показує колосальний ріст складних відсотків при великому часовому інтервалі. З фінансової точки зору, цей приклад носить умовний характер, оскільки реальні внески на такі строки неможливі.

В якості реального прикладу на рисунку 1.4 наведені графіки коефіцієнтів нарощення $A_i(T)$ залежно від довжини інтервалу нарощення при ставці складних відсотків i=0,5, 10, 15 і 20% за період.

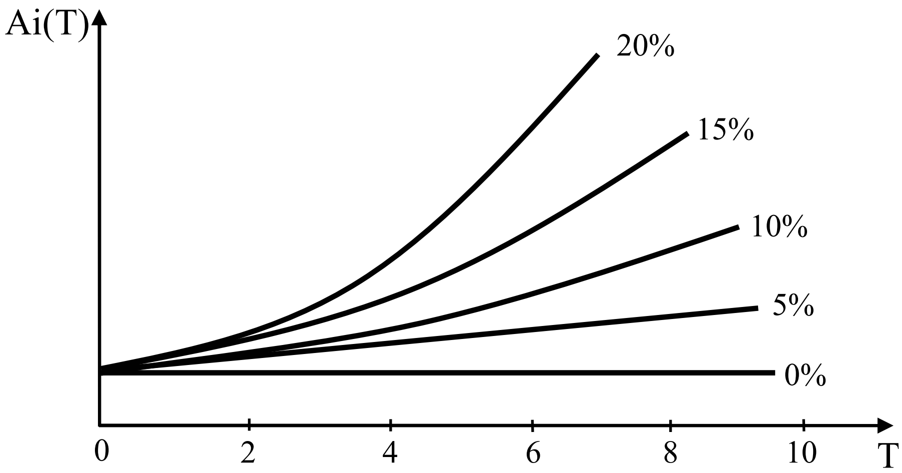


Рисунок 1.4 – Графіки коефіцієнтів нарощення при різних ставках складних відсотків

Порівняємо тепер коефіцієнти нарощення по простих і складних відсотках. Як приклад у таблиці 1.4 наводяться коефіцієнти нарощення по простих і складних відсотках при ставці 8% річних і часовій базі 365 днів.

Таблиця 1.4

Коефіцієнт нарощення	Час						
	30 днів	180 днів	1 рік	5 років	10 років	50 років	100 років
1+Ti $(1+i)^T$	1,00657 1,00635	1,0394 1,0392	1,08 1,08	1,40 1,47	1,80 2,16	5,0 46,9	9,0 2200

На рисунку 1.5 як ілюстрація наведені графіки коефіцієнтів нарощення залежно від строку T у роках для простих і складних відсотків при однаковій річній ставці i.

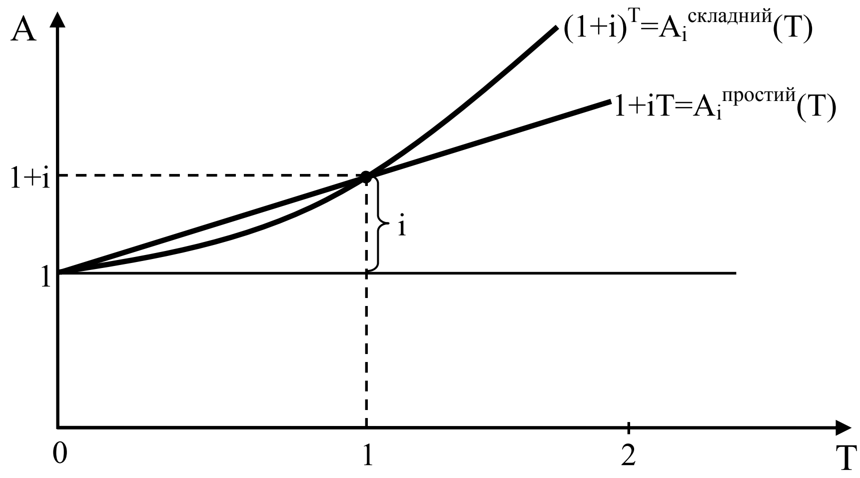


Рисунок 1.5 – Графіки коефіцієнтів нарощення для простих і складних відсотків при однаковій річній ставці *i*

Очевидно, що при $T=1$ коефіцієнти нарощення збігаються й рівні $1+i$. Можна показати, що при будь-якому *i залежно* від величини T мають місце наступні дві протилежних нерівності:

$$1 + iT > (1 + i)^T \text{ при } 0 < T < 1, \tag{1.20}$$

$$1 + iT < (1 + i)^T \text{ при } T > 1. \tag{1.21}$$

Приклад 8. Нехай сума *800* буде нарощуватися по ставці *i=8%* простих і складних відсотків. Тоді нарощені суми такі (таблиця 1.5):

Таблиця 1.5

Проміжки нарахування	0	1	2	3	4
Прості відсотки	800	864	928	992	1056
Складні відсотки	800	864	933,1	1007,8	1088,4

Знайдемо тепер період T_2 інвестиції, за який відбувається подвоєння початкової суми при однаковій ставці *i* простих і складних відсотків. Вважаючи, що відповідні коефіцієнти нарощення рівні двом, одержимо:

$$T_2^{пр} = \frac{1}{i} \text{ (для простих відсотків)} \tag{1.22}$$

$$T_2^{сл} = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)} \text{ (для складних відсотків).} \tag{1.23}$$

1.5. Мультиплікувальні і дисконтувальні множники

Для полегшення розрахунків, особливо зі складними відсотками, складені таблиці мультиплікувальних множників.

Мультиплікувальний множник показує, у скільки разів зросте за *n* років сума, покладена в банк під *i* відсотків річних:

$$M(n,i) = (1 + i)^n. \tag{1.24}$$

Величина *M(n,i)* є майбутня вартість однієї грошової одиниці – через *n* років при ставці відсотка *i.*

Так, M(5,8) є 1,469. Таблиці таких множників мали велике значення для фінансових розрахунків раніше, коли не було електронних калькуляторів. Але і зараз у багатьох ситуаціях такі таблиці дуже зручні. У таблиці 1.6 наведений фрагмент таблиці мультиплікувальних множників *M(n,i)* для 2<*n*<*11, 2*<*i*<*12*. Таблиця більшого обсягу наведена в додатку А.

Таблиця 1.6 – Мультиплікувальні множники

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368
4	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518
5	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,685
6	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870
7	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076
8	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305
9	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558
10	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839

Для полегшення розрахунків використовуються також таблиці дисконтувальних множників.

Дисконтувальний множник показує частку, яку складе початкова сума, що покладена в банк під *i* відсотків річних, від нарощеної до кінця *n*-го року:

$$D(n,i) = \frac{1}{M(n,i)} = (1+i)^{-n}. \tag{1.25}$$

Величину *D(n,i)* називають ще *приведеною* або *сучасною вартістю* однієї грошової одиниці через *n* років при ставці відсотка *i.*

Так, D(5,8)=0,681. У таблиці 1.7 наведений фрагмент таблиці дисконтувальних множників *D(n,i*) для $2<n<11$, $2<i<12$. Таблиця більшого обсягу наведена в додатку Б.

Таблиця 1.7 – Дисконтувальні множники

n i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772	0,751	0,731
4	0,888	0,855	0,823	0,772	0,763	0,735	0,708	0,683	0,659
5	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650	0,621	0,593
6	0,837	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596	0,564	0,535
7	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,583	0,547	0,513	0,482
8	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502	0,467	0,434
9	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460	0,424	0,391
10	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,442	0,386	0,352

1.6. Облік векселів

Хтось попросив у банку кредит у розмірі 10000 гривень. Банкір каже: «Будь ласка. Процентна ставка в нас 10% річних, так що 1000 гривень ми з Вас зараз же утримаємо. Отже, отримайте 9000, але повернете через рік, звичайно, всі 10000». Така операція називається *утриманням відсотків.* У цій операції усе на користь банкіра. По-перше, відсотки вже утримані. По-друге, прибутковість цієї операції для банку більша, ніж оголошені 10%.

Дійсно, прибутковість операції для банку дорівнює 1000/9000≈11,1%. Тому подібну операцію – утримання відсотків з кінцевої суми – кредитори застосовують досить часто.

Боргова розписка, що містить зобов'язання виплатити певну грошову суму (номінал векселя) у конкретний строк, називається *векселем. Облік векселя* – звичайна справа для банку й означає оплату векселя з *дисконтом*, тобто із знижкою від його номіналу.

Приклад 9. Банк урахував вексель за 70% його номіналу за півроку до його викупу. Яка прибутковість операції для банку?

Нехай номінал векселя *N,* тоді банк заплатив власнику векселя $0{,}7\cdot N$, а одержав через півроку *N,* тому прибутковість операції (абсолютна за півроку) дорівнює 0,3/0,7≈0,43, тобто 43%.

Задача 9. Потрібно знайти фактичну вартість векселя?

50000 $	*Вінниця, 1 вересня 2005 року*
Зобов'язуюся сплатити через 60 днів після зазначеної дати за розпорядженням містера А 50000 $ з відсотками по ставці 11% у рік.	
Підпис	*Містер Б*

Рішення: Номінальна вартість векселя складає 50000 доларів, фактична вартість дорівнює номінальній плюс відсотки за 60 днів:

$$\$50000 \cdot \left(1 + 0{,}11 \cdot \frac{60}{365}\right) = \$50904{,}10$$

Утримання відсотків можна здійснювати також по простих відсотках і складних. Розглянемо спочатку утримання простих відсотків. Нехай ставка утримання – *d* (частка), тоді за кожний рік утримується та сама величина – частка *d* з кінцевої суми *S,* тому якщо кредит видається на *n* років, то буде утримано *ndS* і сума, що залишилася після утримання, є:

$$S_n = S - n \cdot d \cdot S = S(1 - nd). \qquad (1.26)$$

Суми, що залишилися після утримання утворять убутну арифметичну прогресію.

Якщо ж утримання проходить по складних відсотках, то за кожний рік утримується доля *d* від попередньої суми, так що сума, що залишилася, є:

$$S_n = S(1 - d)^n. \qquad (1.27)$$

Суми, що залишилися після утримання утворять убутну геометричну прогресію.

При утриманні прості відсотки зменшують суму повільніше, ніж складні, на проміжках, які довші за одиничні. Для полегшення розрахунків при утриманні складних відсотків використовуються дисконтні множники.

Дисконтний множник показує, у скільки разів зменшиться сума при утриманні з неї складних відсотків по ставці *d* протягом *n* проміжків утримання:

$$Dis(n,d) = (1 - d)^n. \qquad (1.28)$$

Можна також сказати, що до величини *Dis(n,d)* зменшиться одна грошова одиниця, з якої утримуються складні відсотки по ставці *d* протягом *n* періодів.

Утримання відсотків має обмежену область застосування – воно рідко застосовується для числа проміжків утримання більше двох-трьох. У таблиці 1.8 наведений фрагмент таблиці дисконтних множників *Dis(n,i)* для $0<n<4$, $2<i<12$.

Таблиця 1.8 – Дисконтні множники

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,970	0,960	0,950	0,940	0,930	0,920	0,910	0,900	0,890
2	0,941	0,922	0,903	0,884	0,865	0,828	0,828	0,810	0,792
3	0. 913	0,885	0,857	0,831	0,804	0,779	0,754	0,729	0,705

Утримання відсотків аналогічне нарахуванню відсотків:

- *нарахування відсотків:* якщо зараз покласти суму *S*, то через рік вона стане *S(1+i)*;
- *утримання відсотків:* щоб через рік мати на рахунку суму *S*, треба зараз покласти на рахунок *S(1-d).*

Розглянемо варіант, коли потрібно встановити ціну векселя при достроковій продажі. Нехай інтервал *(0,1)* часу довжиною *1* рік і нехай *d* – річна дисконтна ставка, *t* – час у частках року, *S(1)* – нарощена сума для початкового боргу *S(0)*. Тоді значення *S(t)* боргу в момент $t<1$, виражене через *S(1), d*, *i* має вигляд:

$$S(t) = S(1) \cdot \left[1 - (1 - t) \cdot d\right],\ 0 \le t \le 1. \quad (1.29)$$

$$S(t) = S(0) \cdot (1 + t \cdot i). \quad (1.30)$$

Таким чином, якщо в (1.30) *S(t)* отримано в результаті збільшення до *S(0)* у розмірі $I(t)=S(0)\cdot t\cdot i$, залежному від часу *t* від початку терміну дії договору, то в (1.29) *S(t)* отримано в результаті дисконту (знижки) з *S(1)* у розмірі залежному від строку, що залишився *до кінця, часу 1-t*:

$$D(1 - t) = S(1) \cdot (1 - t) \cdot d. \quad (1.31)$$

Приклад 10. Приймемо, що в задачі 9 містер *A* продає вексель банку 2 жовтня 2005 року з дисконтом по річній дисконтній ставці 9,5%.

З'ясуємо, за якою ціною купить банк і якою буде норма прибутку містера *A* і банку від цієї операції.

На момент продажу векселя до строку платежу по ньому залишається 29 днів. По формулі (1.29) ціна продажу з дисконтом складе:

$$\$50904{,}10 \cdot \left(1 - \frac{29}{365} \cdot 0{,}095\right) = \$50519{,}88$$

Тому норма прибутку містера *A* і банку у відсотках складе, відповідно:

$$\frac{519{,}88}{50000} \cdot \frac{365}{31} \cdot 100 = 12{,}24\%;$$

$$\frac{50904{,}10 - 50519{,}88}{50000} \cdot \frac{365}{29} \cdot 100 = 9{,}67\%.$$

Величина *[1-(1-t)·d]* називається *коефіцієнтом дисконту*, яка не може бути від’ємною. Тому

$$d \le \frac{1}{1-t},\ 0 \le t \le 1. \qquad (1.32)$$

Це означає, що при обліку векселя задовго до строку платежу по ньому і при великому *d* дисконт може призвести до нульової або навіть негативної продажної ціни векселя, що немає смислу. Наприклад, при d=200% і t=0,5 року при урахуванні за вексель не дадуть нічого.

1.7. Номінальна і ефективна процентні ставки

Припустимо, що на вимогу деяких клієнтів банк нараховує їм відсотки щоквартально, хоча в договорі зазначена річна процентна ставка i=12%. Якщо нараховувати щокварталу 12/4-3% за схемою складних відсотків, то за рік одержимо $(1+0{,}03)^4$=1,1255 (можна глянути в таблицю 1.6 мультиплікувальних множників і знайти М(4,3)=1,126). Ставка 12,6% називається *ефективною,* а оголошена 12% – *номінальною.* Оскільки ставка вийшла більша, ніж у договорі, то банк так робити не буде. Правильним виходом у даній ситуації є нарахування щокварталу простих відсотків по ставці 3% .

Річна ставка $i^{(m)}$ називається *номінальною* (nominal rate), якщо відповідна процентна ставка $j_{1/m}$ за один період нарахування довжиною $T=1/m$ років складає:

$$j_{1/m} = \frac{i^{(m)}}{m}, \ m = 1,2,3,.... \tag{1.33}$$

Якщо T – строк інвестиції в роках, то

$$S(T) = S(0) \cdot \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mT} \tag{1.34}$$

Тут mT – число періодів нарахування за T років.

Очевидно, що чим більше m, тим швидше росте коефіцієнт нарощення.

$$A(T) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mT} \tag{1.35}$$

Приклад 11. 500 тис. грн. інвестовані на 2 роки по ставці 70% річних. Потрібно знайти нарощену за цей час суму і її збільшення при нарахуванні: а) щорічно; б) по півріччях; в) щокварталу; г) щомісяця.

Тут $S(0)$=500 тис. грн., T=2, $i^{(m)}$=70% при m=1, 2, 4, 12.

Відповідь на поставлене питання міститься в таблиці:

Випадок	m	$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^2$	S(2) тис. грн.	I(2) = S(2)-S(0) тис. грн.
а)	1	$\left(1 + \frac{0,7}{1}\right)^2 = 2,89$	1445,00	945,00
б)	2	$\left(1 + \frac{0,7}{2}\right)^4 = 3,32$	1660,75	1160,75
в)	4	$\left(1 + \frac{0,7}{4}\right)^8 = 3,63$	1816,66	1316,66
г)	12	$\left(1 + \frac{0,7}{12}\right)^{24} = 3,9$	1950,00	1450,00

Ми бачимо, що з ростом частоти *m* нарахувань у році коефіцієнт нарощення і, отож, абсолютний річний дохід росте. Для порівняння реального відносного доходу за рік при нарахуванні відсотків один і *m* раз уведемо нове поняття – *ефективну ставку відсотків.*

Ефективною ставкою називається річна ставка складних відсотків, що дає те ж співвідношення між виданою сумою *S(0)* і сумою *S(T)*, що отримана при будь-якій схемі виплат.

Ефективна річна ставка $i_{еф}$ для номінальної $i^{(m)}$ знаходиться з умови рівності двох відповідних коефіцієнтів нарощення за 1 рік:

$$1 + i_{еф} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m. \tag{1.36}$$

Звідси слідує, що $i_{(1)}=i_{еф}= j_1$. Відзначимо, що в силу (1.36) ефективна річна ставка (1.37) еквівалентна у фінансовому смислі ставці $i^{(m)}/m$, застосовуваній *m* разів у році.

$$i_{еф} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1. \tag{1.37}$$

Приклад 12. Нехай банк нараховує складні відсотки по номінальній ставці 90%. Тоді ефективна ставка при щоденній капіталізації відсотків складе: $i_{еф} = \left(1 + \frac{0,9}{365}\right)^{365} - 1 = 1,457$ а при щомісячній капіталізації $i_{еф} = \left(1 + \frac{0,9}{12}\right)^{12} - 1 = 1,382$. Ми бачимо, що різниця відчутна.

Таким чином, ефективна ставка вимірює той відносний дохід, що може бути отриманий у цілому за рік, тобто сторонам байдуже – чи застосовувати ставку $i^{(m)}$ при нарахуванні відсотків *m* раз у рік або річну ставку $i_{еф}$. І та, і інша ставка еквівалентні у фінансовому відношенні.

Інакше кажучи, ефективна ставка показує, яка річна ставка складних відсотків дає за *T* років той же фінансовий результат, що і *m-кратне* нарощення в рік по ставці $i^{(m)}/m$. Зауважимо, що якщо *T=1*, то ефективна ставка збігається із простою річною ставкою, еквівалентною *m-кратному* реінвестуванню при номінальній ставці $i^{(m)}$.

У загальному випадку номінальною називається процентна ставка, використовувана для розрахунків, для фіксування в договорах і т.ін., а дійсна ставка, яка при цьому утворюється, називається ефективною.

Дві номінальні річні ставки називаються *еквівалентними*, якщо відповідні їм річні ефективні ставки збігаються. Дійсно, для еквівалентних ставок:

$$\left(1+\frac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1}=\left(1+\frac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}=1+i_{еф}. \qquad (1.38)$$

Приклад 13. Потрібно визначити номінальну процентну ставку з нарахуванням відсотків по півріччях, яка еквівалентна номінальній ставці 24% із щомісячним нарахуванням відсотків.

За умовою $i^{(12)}$=0,24, а потрібно знайти еквівалентне значення $i^{(2)}$.

Омскільки $\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2}=\left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{12}=1{,}2682$, то

$$i^{(2)}=\left(\sqrt{1{,}2682}-1\right)\cdot 2=0{,}25=25\%.$$

Розрахунок ефективної ставки один з основних інструментів фінансового аналізу. Його знання дозволяє порівнювати між собою угоди, побудовані за різними схемами: чим вища ефективна ставка угоди, тим (за інших рівних умов) вона вигідніша для кредитора.

1.8. Складна річна облікова ставка

Розглянемо тепер іншу схему, коли складний відсоток за кредит або будь-яку іншу інвестицію нараховується в момент укладання договору строком на 1 рік, тобто вперед. Для простих відсотків і на інтервалі один рік ця схема розглядалася в п. 1.2.

Позначимо річну ставку складних відсотків уперед через d і будемо називати її *складною річною обліковою ставкою*, якщо величина d еквівалентна річній ставці i складних відсотків.

Для розглянутої схеми платіж 1 грошової одиниці у даний момент t_0 еквівалентний платежу $(1-d)$ грошових одиниць у момент t_0-1 або платежу $(1-d)^2$ у момент t_0-2 і т.ін. Дійсно, нарощені до моменту t_0 вартості всіх цих платежів рівні 1 грошовій одиниці:

$$1 = (1-d)\cdot(1+i) = (1-d)^2\cdot(1+i)^2 = \ldots = (1-d)^n\cdot(1+i)^n. \quad (1.39)$$

Взагалі, при будь-якому $T > 0$ нарощена за інтервал $(0,T)$ вартість платежу $(1\text{-}d)^T$ грошових одиниць у даний момент $t_0=0$ до моменту T складе 1 грошову одиницю:

$$(1-d)^T\cdot(1+i)^T = 1. \quad (1.40)$$

Тому для складної облікової ставки сучасна в момент $t\in(0,T)$ вартість $S(t)$ майбутнього платежу $S(T)$ складе:

$$S(t) = S(T)\cdot(1-d)^{T-t}, d<1 \quad (1.41)$$

а для простої (дивись формулу 1.29)

$$S(t) = S(1)\cdot\left[1-(T-t)\cdot d\right], (T-t)\cdot d<1 \quad (1.42)$$

Позначимо через $\tau=T\text{-}t$ час до платежу, виражений в роках. Тоді з (1.29) і (1.42) слідує, що дисконтний множник дорівнює:

$$\frac{S(T-\tau)}{S(T)} = \begin{cases} 1-\tau\cdot d & \text{для простої облікової ставки,} \\ (1-d)^\tau & \text{для складної облікової ставки.} \end{cases} \quad (1.43)$$

У таблиці 1.9 наводяться дисконтні множники при $d=0,20$ для декількох значень τ як для простої, так і для складної ставки.

Таблиця 1.9

	τ (у роках)						
	1/12	4/12	6/12	8/12	1	3	5
$(1-\tau\cdot d)$	0,9834	0,9334	0,9000	0,8667	0,8000	0,4000	0
$(1-d)^\tau$	0,9815	0,9283	0,8944	0,8618	0,8000	0,5120	0,3277

На рисунку 1.6 зображена зміна простих і складних дисконтних множників залежно від τ.

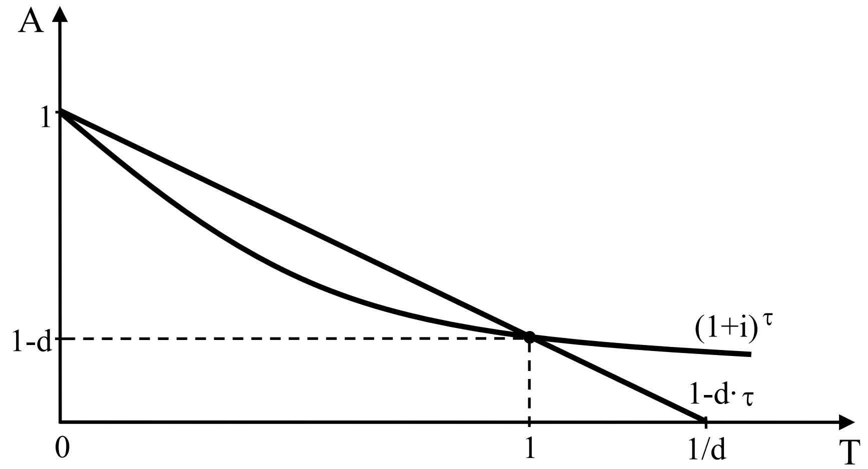


Рисунок 1.6 – Графік зміни простих і складних дисконтних множників залежно від час до платежу τ

Приклад 14. Розглянемо знову задачу 9 і приклад 10 (п. 1.6.), причому зробимо облік векселя по складній обліковій ставці при $i=0,11$. Номінальна вартість векселя складає \$50000, фактична вартість дорівнює номінальній плюс складні відсотки за 60 днів, тобто за 60/365=0,1644 року:

$$\$50000\cdot(1+0,11)^{0,1644} = \$50000\cdot1,0173 = \$50865.$$

Оскільки строк менше одного року, то коефіцієнт 1,0173 нарощення по складних відсотках трохи менший, ніж коефіцієнт 1,0181 нарощення по простих відсотках.

Продовжимо приклад 10. На момент продажу векселя до строку платежу по ньому залишається 29 днів, тобто 29/365=0,07945 року. Оскільки продаж проводиться з дисконтом по річній обліковій ставці d=9,5%, то ціна продажу з дисконтом складе:

$$\$50865\cdot(1-0,095)^{0,07945} = \$50865\cdot0,9921 = \$50463,2.$$

Тому норма прибутку містера *А,* про якого йшла мова в прикладі 10, і банку у відсотках складуть, відповідно:

$$\frac{463,2}{50000}\cdot\frac{365}{31}\cdot100 = 10,91\%;$$

$$\frac{50865-50463,2}{50000}\cdot\frac{365}{29}\cdot100 = 10,11\%.$$

У п. 1.7 ми ввели номінальну і ефективну ставки відсотка, а тепер уведемо ці поняття і для ставки дисконту.

Нехай дисконтування проводиться m разів у рік. Тоді відповідна складна річна облікова ставка $d^{(m)}$ називається *номінальною*, якщо на початку кожного періоду зарахування здійснюється дисконтування по ставці $d^{(m)}/m$.

Міркуючи аналогічно тому, як і при отриманні формули (1.41), одержимо, що для номінальної дисконтної ставки $d^{(m)}$ сучасна в момент $t \in (0,T)$ вартість $S(t)$ майбутнього платежу $S(T)$ складе:

$$S(t) = S(T) \cdot \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{(T-t)\cdot m}. \qquad (1.44)$$

Ефективна складна річна облікова ставка $d_{еф}$ для номінального $d^{(m)}$ знаходиться з умови рівності двох відповідних дисконтних множників за рік:

$$1 - d_{еф} = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}. \qquad (1.45)$$

Можна також стверджувати, що $d_{еф}<d^{(m)}$. З (1.44) і (1.45) можна інтерпретувати $d^{(m)}$ і як приведену на початок періоду нарахування вартість платежу $i^{(m)}$:

$$\frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} + \frac{1}{m}, \qquad (1.46)$$

$$d^{(m)} < i^{(m)},\ m = 1, 2, 3 \ldots \qquad (1.47)$$

З (1.46) слідує, що при $m\to\infty$ у номінальних річних ставках $d^{(m)}$ і $i^{(m)}$ існує загальна межа, яку ми позначимо через σ:

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta. \qquad (1.48)$$

Це природний результат, тому що при переході до безперервного нарахування і капіталізації відсотків розходження між нарахуванням відсотків на початку і наприкінці періоду нарахування зникає.

З (1.48) слідує важлива система нерівностей:

$$d = d^{(1)} < d^{(2)} < \ldots < d^{(m)} < \ldots < \delta < \ldots i^{(m)} < \ldots < i^{(2)} < i^{(1)} = i. \qquad (1.49)$$

Модель безперервного нарахування відсотків і властивості σ докладно розглянемо в наступному підрозділі.

1.9. Безперервне нарахування відсотків і безперервне дисконтування

У банківській практиці – особливо при електронних методах проведення і реєстрації фінансових операцій – відсотки можуть нараховуватися за 1 добу або навіть за кілька годин. Наприклад, комерційний банк, що знаходиться в Києві, може позичити певну суму грошей банку, що знаходиться в Тернополі, на 12 годин – з 21 години сьогоднішнього дня до 9 години наступного дня. За цей час тернопільський банк може додати ці гроші до свого фонду короткострокових кредитів, а потім повернути борг із певним відсотком (або частками відсотка) до 9 годин київському банку. Очевидно, що в цьому і іншому аналогічному випадку виникає задача нарахування відсотків за дуже малі проміжки часу, тобто по суті мова йде про безперервне нарахування відсотків і їхньої безперервної капіталізації.

При аналізі інвестицій також виникає аналогічне завдання, оскільки багато виробничих і економічних процесів безперервні за своєю природою і такою ж повинна бути відповідна їм фінансова модель. У попередніх підрозділах ми побудували кілька моделей нарахування відсотків при різній довжині періоду нарахування (конверсійного періоду) – від 1 дня до 1 року. Спрямовуючи довжину періоду нарахування до 0, побудуємо тепер математичну модель безперервного нарахування відсотків, розглянемо способи практичного застосування безперервної моделі, а також зрівняємо результати дискретного і безперервного нарахування відсотків. Для стислості іноді говорять «безперервні відсотки», маючи на увазі безперервне нарахування і капіталізацію відсотків, тобто нескінченно малий період нарахування.

Розглянемо випадок постійної інтенсивності нарощення. Приймемо за базовий період 1 рік і позначимо ціле число періодів нарахування за рік через m, а довжину періоду нарахування через $h=1/m$ років, $m=1,2,3,\ldots$. Тоді $i^{(m)}=i^{(1/h)}$ – відповідна додатна річна ставка, і в силу формули (1.36) вона пов'язана з ефективною річною ставкою $i_{еф}$ співвідношенням:

$$i+i_{еф}=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left[1+h\cdot i^{1/h}\right]^{1/h},\ m=1,2,3,\ldots;\ 0<h\le 1.\ (1...50)$$

Для простоти позначимо: $i^{(1/h)}=i_h$ – номінальна процентна ставка за один період нарахування довжиною h років. Тоді з (1.50) при $h=m=1$ одержуємо:

$$i^{еф}=i^{(1)}=i_1. \tag{1.51}$$

Для практики ефективну річну ставку (1.51) зручніше позначати просто i. Зробимо невелике математичне пояснення. Для цього запишемо коефіцієнт $A(h)$ нарощення за будь-який період $(t,t+h)$ довжиною $h=1/m$ на розглянутому інтервалі $(0,T)$ у вигляді:

$$A(h)=\begin{cases} 1+h\cdot i_h & \text{для простих відсотків,}\\ (1+i_h)^h\approx 1+h\cdot i_h & \text{для складних відсотків.}\end{cases}$$

Оскільки h мале, то різниця між простими і складними відсотками дуже мала. Оскільки $A(0)=1$, то $\Delta A(h)=A(h)-A(0)\approx h\cdot i_h$ – зростання 1 грошової одиниці за малий час h (рисунок 1.7, де h і t вимірюються в роках).

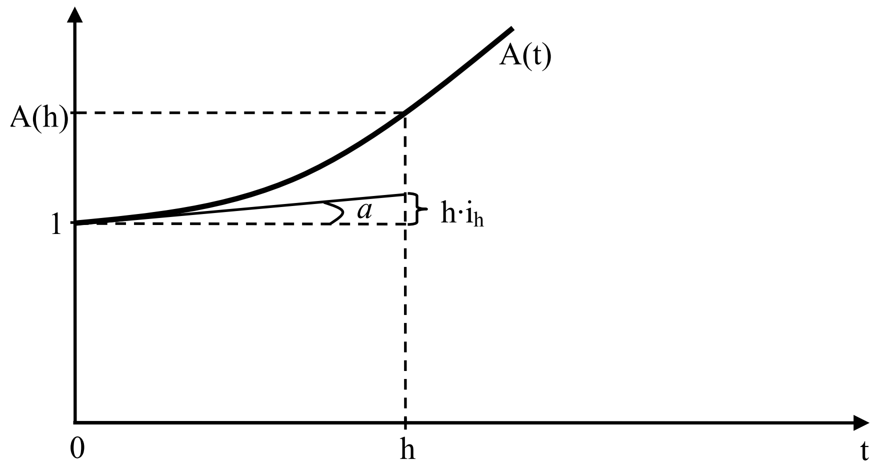


Рисунок 1.7 – Графік зміни коефіцієнта нарощення від часу t

Якщо $A(t)$ диференційовна в точці 0 праворуч, то $A'(0)=tg\,\alpha\approx i_h$, де α – кут нахилу дотичної до $A(t)$ у точці $t=0$.

З визначення розглянутих ставок і результатів п. 1.8 (формула 1.48) слідує, що якщо ефективна ставка i фіксована, тобто номінальна ставка i_h при $m \to \infty$ і $h=1/m \to 0$ монотонно убуває, залишаючись додатною. Тому в $i_h=i^{(1/h)}$ існує позитивне граничне значення, яке ми позначимо через δ:

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = i^{(\infty)} = \lim_{h\to 0} i^{(h)} = i_0 = \delta . \qquad (1.52)$$

Межа δ номінальної ставки $i^{(m)}$ при $m \to \infty$ називається *силою росту* (force of interest) або *інтенсивністю нарощення за рік при безперервному нарахуванні відсотків*. Величину δ можна назвати також *номінальною річною ставкою при безперервному нарахуванні відсотків*.

Ефективна річна ставка *i* і номінальна річна ставка δ пов'язані співвідношенням:

$$1 + i = e^{\delta} . \qquad (1.53)$$

$$\delta = \ln(1 + i) . \qquad (1.54)$$

Ефективна річна ставка *d* дисконтування і номінальна річна ставка δ пов'язані співвідношенням:

$$1 - d = \upsilon = e^{-\delta} . \qquad (1.55)$$

Задача 10. Знайдіть нарощене за 5 років значення суми $S(0)=10^6$ грн., якщо воно реінвестується по постійній ставці $i^{(m)}=25\%$ при таких значеннях *m*: а) 1 раз у рік, б) 2 рази у рік, в) безупинно, г) обчислити $i_{еф}$ для безперервного нарахування відсотків.

Рішення:

а) $S(5) = (1+0{,}25)^{5} \cdot 10^6$ грн. $= 3{,}05 \cdot 10^6$ грн.,

б) $S(5) = (1+0{,}25/2)^{10} \cdot 10^6$ грн. $= 3{,}25 \cdot 10^6$ грн.,

в) $S(5) = (e^{0{,}25})^{5} \cdot 10^6$ грн. $= 3{,}49 \cdot 10^6$ грн.,

г) $i_{еф} = (e^{0{,}25})^5 - 1 = 0{,}284025$.

Залежно від умов задачі може виявитися зручним прийняти один із чотирьох основних параметрів δ*, i, v* і *d* за вихідний і виразити через нього значення трьох інших. У таблиці 1.10 об'єднані раніше отримані співвідношення між δ*, i, v* і *d.*

Кожний рядок цієї таблиці показує, як параметр, що стоїть в позначенні цього рядка, виражається через три інші. Кожний стовпець таблиці показує, як через параметр, що стоїть в позначенні цього стовпця, виражаються три інші.

Таблиця 1.10 – Функціональний зв'язок між параметрами δ*, i, υ, d*

Функція	Аргумент			
	δ	*i*	*υ*	*d*
δ	δ	ln(1+i)	-ln *υ*	- ln (1 – d)
i	e^{δ} - 1	i	$\frac{1}{\upsilon}-1$	$\frac{1}{1-d}-1$
υ	$e^{-\delta}$	$\frac{1}{1+i}$	*υ*	1 – *d*
d	1 - $e^{-\delta}$	$\frac{i}{1+i}$	1 - *υ*	*d*

Розглянемо випадок нарощення і дисконтування при безперервному нарощенні відсотків. Припустимо, що в даний момент t_0 проводиться інвестиція в сумі $S(t_0)$ по постійній ефективній річній ставці *i*. Тоді в силу формули (1.13) для складних відсотків нарощена до моменту $t=t_0+\tau$ сума складає:

$$S(t) = AV[S(t_0)] = S(t_0) \cdot (1+i)^{\tau} = S(t_0) \cdot e^{\delta\tau}, \tau > 0. \qquad (1.56)$$

де час виміряється в роках, а *i* і δ=ln(1+i) – десяткові дроби, AV – нарощена вартість (скорочення AV – Accumulated Value).

Якщо ж нам потрібно у майбутньому у момент $t > t_0$ сплатити або одержати суму *S(t)*, то її сучасна приведена вартість PV (скорочення PV – Present Value) у даний момент t_0 складе:

$$S(t_0) = PV[S(t)] = S(t) \cdot (1+i)^{-\tau} = S(t) \cdot e^{-\delta\tau}, \tau > 0. \qquad (1.57)$$

При постійній ефективній річній ставці *i* і номінальній річній ставці $\delta=ln(1+i)$ коефіцієнт нарощення залежить лише від довжини τ інтервалу нарощення, вимірюваного в роках, і складає:

$$A(\tau) = \frac{S(t_0+\tau)}{S(t_0)} = e^{\delta\tau}, \tau \ge 0. \qquad (1.58)$$

Коефіцієнт дисконтування за τ років дорівнює:

$$\upsilon(\tau)=\frac{S(t_0)}{S(t_0+\tau)}=e^{-\delta\tau}=\frac{1}{A(\tau)},\tau\geq 0. \qquad (1.59)$$

Відзначимо тепер, що *A(τ)* – коефіцієнт нарощення 1 грошової одиниці на інтервалі $(t_0,t_0+\tau)$ при русі по цьому інтервалу зліва направо, тобто в позитивному напрямку рівність: $\upsilon(\tau)=A(-\tau)$ можна інтерпретувати як негативне нарощення, що збігається з дисконтуванням, оскільки рух по інтервалу (t, t+τ) відбувається справо наліво, тобто у негативному напрямку. Аналогічним образом інтерпретується рівність: $\upsilon(-\tau)=A(\tau)$.

Отже, у розглянутому випадку коефіцієнти нарощення і дисконтування взаємозамінні і з математичної точки зору можна було б користуватися тільки одним з них. Однак для наочності зручніше користуватися двома коефіцієнтами відповідно до прямого змістовного смислу кожного з них.

Таким чином як при дискретному, так і при безперервному нарахуванні складних відсотків справедливе фундаментальне співвідношення:

$$A(\tau)\cdot\upsilon(\tau)=1,\ \tau\geq 0. \qquad (1.60)$$

Зокрема, при $\tau=1$ одержуємо з (1.58)-(1.60) раніше встановлені співвідношення (таблиця 1.9):

$$A(1)=e^{\delta}=1+i;$$

$$\upsilon=\upsilon(1)=e^{-\delta}=\frac{1}{1+i};$$

$$(1+i)\cdot\upsilon=1.$$

Відзначимо тепер, що якщо функцію $e^{\delta\tau}$ задати на інтервалі $\tau\in(-T, T)$, то (рисунок 1.8) при $\tau>0$ вона збігається з $A(\tau)$, а при $\tau<0$ – з $\upsilon(\tau)$:

$$e^{\delta\tau}=\begin{cases}\upsilon(\tau) & ,\ -T<\tau\leq 0,\\ A(\tau) & ,\ 0\leq\tau<T.\end{cases}$$

При цьому $A'(0)=\delta$ – інтенсивність нарощення за базову одиницю часу.

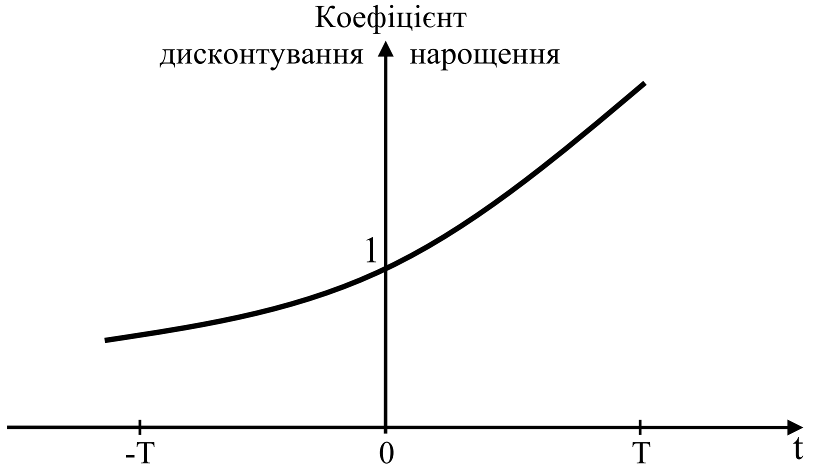


Рисунок 1.8 – Графік зміни коефіцієнтів нарощення і дисконтування від τ

Задача 11. Сума 5000 доларів покладена в банк під схему безперервного нарахування відсотків з постійною інтенсивністю росту $\delta=10\%$ за рік. Знайдіть нарощену наприкінці року t суму $S(t)$ при t=1, 2, 3, 5, 7 і 10.

Рішення: Тут $S(t)=5000\cdot e^{0,1t}$. Відповідь наведена в таблиці:

t, років	0	1	2	3	5	7	10
S(t), дол.	5000	5525,85	6107,01	6749,29	8243,61	10068,76	13591,4

Задача 12. Припустимо, що сучасна вартість 5000 доларів, які містер *A* повинен одержати по банківському депозиту через 2 роки при постійній інтенсивності δ, дорівнює подвоєній сучасній вартості 1000 доларів, які містер *B* повинен одержати по депозиту через 4 роки при тому же δ. Потрібно знайти δ.

Рішення: Відповідно до умови $5000 \cdot e^{-2\delta} = 1000 \cdot e^{-4\delta}$.

Тоді: $e^{2\delta} = 5,\ \delta = 0,5 \cdot \ln 5 = 0,80472$. Відповідь δ=80,742%.

*Задача 13***.** Позичальник *B* повинен сплатити кредиторові за векселем 5000 доларів на 01.01.2004; 6500 доларів на 01.01.2005; 7000 доларів на 01.07.2005. Знайдіть сучасну вартість боргу $C(t)$ на момент 01.01.2002 при δ=0,06 за рік.

Рішення: (01.01.2002) = 5000·υ(2) + 6500·υ(3) + 7000·υ(3,5) =

$= 5000\cdot e^{-0,12} + 6500\cdot e^{-0,18} + 7000\cdot e^{-0,21} = \$\ 15537,95.$

Відповідь: 15537,95 доларів.

1.10. Вплив інфляції на ставку відсотка

З економічної теорії відомо, що інфляція (або темп інфляції) становить частку *r* у рік, якщо той самий набір товарів коштує наприкінці року в *(1+r)* разів більше, ніж на початку цього року. Можна також сказати, що в *(1+r)* разів зменшилася купівельна спроможність однієї грошової одиниці. Тобто *інфляція* – це ріст цін на товари і послуги, процес знецінення грошей, зниження їхньої купівельної спроможності.

Останє означає, що якщо на початку року на 1 грн. можна було купити, наприклад, 300 грам цукру, то наприкінці року тільки, скажемо, 250 грам. Ясно, що інфляція зменшує реальну ставку відсотка. Це буде вже ставка відсотка з урахуванням інфляції. Дійсно, одна грошова одиниця зростає за рік в *(1+i)* разів через нарощення відсотків, але її купівельна спроможність зменшується в *(1+r)* разів через інфляцію. Таким чином, її реальна цінність – купівельна спроможність стане *(1+i)/(1+r)*, а нарощена за рік сума:

$$S_r = S_0 \cdot \frac{(1+i)}{(1+r)}, \qquad (1.61)$$

де *r* – річний темп інфляції.

З (1.61) слідує, що річна реальна ставка відсотків складе:

$$i_r = \frac{S_r - S_0}{S_0} = \frac{(i-r)}{(1+r)}. \qquad (1.62)$$

При досить великому *r* ставка відсотків i_r може стати навіть від’ємною. Звідси видно, що в банківській справі, якщо кредитор не відреагує на інфляцію достатнім збільшенням ставки, він буде працювати собі в збиток, а позичальник при цьому буде збагачуватися. Щоб вирівняти умови, варто компенсувати знецінювальний вплив індексу цін *p=1+r*. Цього можна досягти, спираючись на нарощення по ставці *j*, визначеної з умови: *(1+j)=(1+i)· (1+r)*, тобто:

$$j = i + r + i \cdot r. \qquad (1.63)$$

Вважаючи в (1.62) *i=j*, одержимо, що $i_r=i$. Таким чином, використовуючи скоректовану ставку (1.63), кредитор одержить реальний відсоток, який дорівнює тому доходу, який би він мав в умовах без інфляції.

При невисокій інфляції величини *i* і *r* незначні, і їхнім добутком у формулі (1.63) можна знехтувати. У цьому випадку виправлення на інфляцію обмежується величиною темпу *r*, і ставку коректують за формулою:

$$j = i + r. \tag{1.64}$$

При рості купівельної спроможності грошей (*дефляції*), ставка *j* буде розраховуватися за формулою: $j=i-r_d-i\cdot r_d$, де r_d – темп дефляції.

Задача 14. Банк видав кредит на 1 рік у сумі 10000 грн. при ставці відсотка 10% і за умови повернення кредиту з розрахунком темпу інфляції/дефляції. Знайдіть, яку суму потрібно повернути позичальнику якщо: а) темп інфляції 3%, б) темп дефляції 1,2%. Знайдіть різницю сум при розрахунку інфляції і дефляції в порівнянні з 0% інфляції/дефляції.

Рішення:

а) за формулою (1.63) знайдемо скоректовану ставку відсотка:

$$j_{інф} = 0{,}1 + 0{,}03 + 0{,}1 \cdot 0{,}03 = 0{,}133$$

За формулою розрахунку нарощеної суми простих відсотків (1.5) найдемо суму повернення:

$$S_{інф} = 10000 \cdot (1 + j_{інф}) = 10000 \cdot (1 + 0{,}133) = 11330 \text{ грн.}$$

б) скоректована ставка відсотка при дефляції буде рівною:

$$j_{деф} = 0{,}1 - 0{,}012 + 0{,}1 \cdot 0{,}012 = 0{,}0868$$

$$S_{деф} = 10000 \cdot (1 + j_{деф}) = 10000 \cdot (1 + 0{,}0868) = 10868 \text{ грн.}$$

При 0% інфляції/дефляції позичальнику потрібно було б повернути суму 10000+1000=11000 грн. При інфляції 3% різниця нарощеної суми складе 11330-11000=330 грн., при дефляції 1,2% різниця нарощеної суми складе [10868-11000]=132 грн.

Задачі до розділу 1

1. Договір передбачає такі ставки простих відсотків: а) за перший квартал – 230% річних, за другий і третій – 240% річних, за четвертий – 200% річних; б) за перший квартал – 10% щомісяця, за другий і третій квартали – 40% щомісяця, за четвертий квартал – 15% щомісяця. Визначити коефіцієнт нарощення за рік?

2. Річна ставка простих відсотків дорівнює 16,5%. Через скільки років початкова сума подвоїться?
3. У день народження онука бабуся поклала в банк $3000 під 7% річних. Якою буде ця сума до сімнадцятиріччя онука?
4. Нехай 120000 грн. видано в кредит на 8 місяців під прості відсотки по ставці 10% на місяць. Визначите нарощене значення боргу наприкінці кожного місяця?
5. Договір передбачає таку схему нарахування простих відсотків: за перший рік 30%, у кожному наступному півріччі ставка підвищується на 5%. Потрібно визначити коефіцієнт нарощення за 4,5 роки?
6. Позичальник одержав кредит на 6 місяців під 50% річних з умовою повернути 2 млн. грн. Яку суму одержав позичальник у момент укладання договору і чому дорівнює дисконт?
7. Яку суму інвестор повинен внести сьогодні під прості відсотки по ставці 30% річних, щоб нагромадити 450 тис. грн.: а) за півроку; б) за два роки; в) за шість років?
8. Сума 800 тис. грн. інвестується на 3 роки під 80% річних. Знайдіть нарощену суму і складні відсотки за цей строк?
9. При якій ставці складних відсотків за 7 років сума подвоюється?
10. Кредит розміром 600 тис. грн. виданий під складні відсотки на 1 рік по ставці 10% на місяць. Знайдіть повну суму боргу до кінця строку?
11. Знайдіть складні відсотки за півтора року, нараховані на 900 тис. грн. по ставці 30% у квартал?
12. Річна ставка складних відсотків дорівнює 6%. Через скільки років початкова сума подвоїться?
13. 8 липня в банк поклали суму 100000 до запитання під ставку 18% річних складних відсотків. Яку суму зніме вкладник 1 грудня?
14. На строковий вклад у банку зараховано 1000 дол. по ставці 15% річних. Знайдіть накопичені на рахунку суми через 2, 3, 4 і 5 років за умови нарахування: а) простих і б) складних відсотків. Побудуйте відповідні графіки?
15. Кредит у розмірі 2 млн. грн. виданий на строк 2,5 роки по ставці 60% річних. Обчисліть суму боргу на кінець строку за класичним і комбінованим методом нарощення складних відсотків?
16. Потрібно знайти сучасне значення боргу, повна сума якого через 4 роки складе 2,5 млн. грн. Відсотки нараховуються по таких ставках: а) 110% відсотків наприкінці кожного року; б) 17% наприкінці кожного кварталу; в) 90% річних наприкінці кожного місяця?

17. Обчисліть відсутні в таблиці множники, побудуйте графіки залежності i від T_2 простих і складних відсотків. Проведіть їхній аналіз.

i, %	5	10	15	25	55	75	100
$T_2^{пр}$	20	10					
$T_2^{сл}$	14,2	7,3					

18. Потрібно знайти фактичну вартість векселя?

> *20000 $ Вінниця, 1 квітня 2006 року*
> *Зобов'язуюся сплатити через 90 днів після зазначеної дати за розпорядженням містера А 20000 $ з відсотками по ставці 17,5% у рік.*
> *Підпис Містер Б*

19. Знайдіть сучасне значення інвестиції, якщо нарощена до кінця п'ятого року сума складає 15 млн. грн. Відсотки нараховуються по таких ставках: а) 120% наприкінці кожного року; б) 60% наприкінці кожного півріччя?
20. Знайдіть нарощене за 6 років значення суми $S(0)=10^5$ грн., якщо воно реінвестується по постійній ставці $i^{(m)}=35\%$ при таких значеннях m: а) 1 раз у рік, б) 2 рази в рік, в) безупинно, г) обчислити $i_{еф}$ для безперервного нарахування відсотків?
21. Яка сума повинна бути інвестована сьогодні для нагромадження 500 тис. грн. під кінець року при нарахуванні відсотків по ставці: а) 160% річних наприкінці кожного кварталу; б) 140% річних наприкінці кожного півріччя?
22. За відомим значенням $i^{(12)}$ знайдіть еквівалентні їм значення $i^{(2)}$ і занесіть у таблицю.

$i^{(12)}$, %	24	50	100	150	200
$i^{(2)}$, %	25				

23. Знайдіть ефективну процентну ставку, еквівалентну номінальній ставці 140% при щомісячному нарахуванні відсотків?
24. Знайдіть нарощену на 120 тис. грн. суму, інвестовану на 3 місяці по номінальній ставці 90% річних?
25. Для номінальної ставки 80% з нарахуванням відсотків 3 рази в рік знайдіть еквівалентну ставку, відсотки по який виплачуються щомісяця?
26. Сума 14000 дол. покладена в банк під схему безперервного нарахування відсотків з постійною інтенсивністю росту $\delta=14\%$ за рік. Знайдіть нарощену наприкінці року t суму $S(t)$ при t=1, 2, 3, 5, 7 і 10?

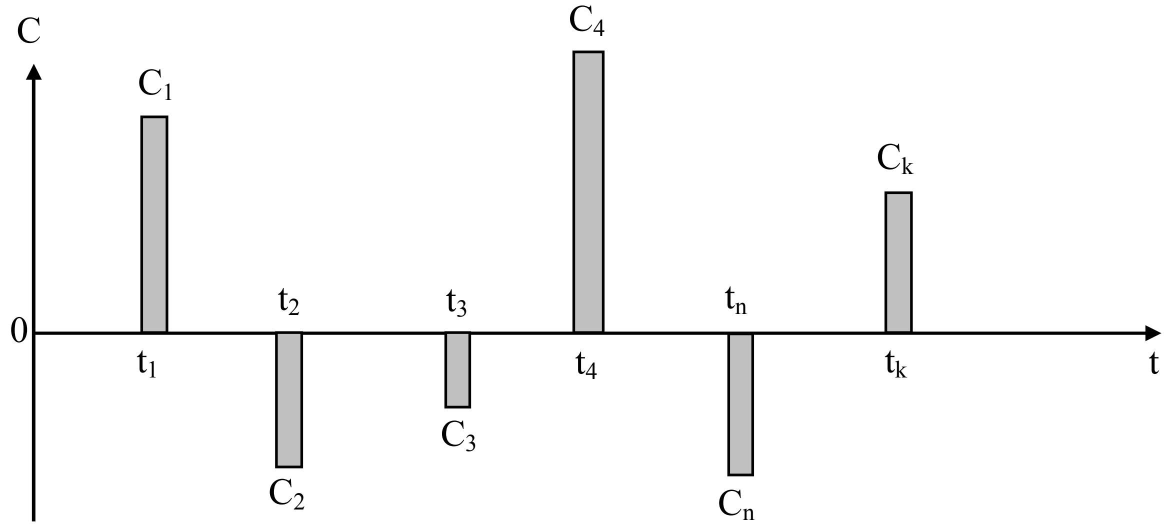
27. Приймемо, що сучасна вартість 15000 дол., які містер *A* повинен одержати по банківському депозиту через 4 роки при постійній інтенсивності δ, дорівнює подвоєній сучасній вартості 7500 дол., які містер *B* повинен одержати по депозиту через 7 років при тому ж δ. Потрібно знайти δ?
28. Позичальник *B* повинен сплатити кредитору за векселем 3000 дол. на 01.01.2004; 4500 дол. на 01.01.2005; 5500 дол. на 01.07.2005. Знайдіть сучасну вартість боргу $C(t)$ на момент 01.01.2002 при δ=0,08 за рік?
29. Банк видав кредит на 1 рік у сумі 800000 грн. при ставці відсотка 40% і за умови повернення кредиту з розрахунком темпу інфляції/дефляції. Знайдіть, яку суму потрібно повернути позичальнику якщо: а) темп інфляції 5%, б) темп дефляції 2,3%. Знайдіть різницю сум при розрахунку інфляції й дефляції в порівнянні з 0% інфляції/дефляції?
30. Яку ставку повинен призначити банк, щоб при річній інфляції 12% реальна ставка виявилася 6%?

Розділ 2. Потоки платежів, ренти

Потоки платежів дуже часто зустрічаються на практиці. Заробітна плата виплачується, як правило, у вигляді потоку платежів 2 рази на місяць, приблизно через 15 днів. Плата за квартиру – потік, як правило, щомісячних платежів. Сім'я відкладає на покупку автомобіля, вносячи щомісяця на рахунок у банк деяку суму, і т.ін. Тому вивчення потоків платежів дуже важливе в сучасній ринковій економіці.

2.1. Основні поняття потоків платежів

Потік платежів – це множина розподілених у часі виплат і надходжень. Урахуємо спрямованість платежу, використовуючи *позитивні* величини для надходжень і відповідно *негативні для виплат.* Відповідно до прийнятої знакової формалізації двосторонній потік зручно показати у вигляді графічної схеми.



Рисинок 2.1 – Графік двостороннього потоку платежів

Потік платежів – це послідовність величин самих платежів (зі знаками) і моментів часу, коли вони здійснені. Потік називається кінцевим або нескінченним залежно від кількості платежів у ньому.

Нехай $R=\{C_k, t_k\}$ – потік платежів, у ньому t_k – моменти часу, C_k – платежі. Крім того, припускається, що відома ставка відсотка i, звичайно незмінна протягом усього потоку.

Величиною потоку в момент T називається сума платежів потоку, дисконтованих до певного моменту:

$$R(T) = \sum_k C_k (1+i)^{T-t_k} . \qquad (2.1)$$

Досить знайти величину потоку в якийсь момент *R(T)*, тоді в будь-який інший момент *T′* величина потоку складе:

$$R(T') = R(T) \cdot (1+i)^{T'-T} . \qquad (2.2)$$

Величина *R(0)* називається *сучасною величиною потоку*; якщо є останній платіж, то величина потоку в момент цього платежу називається *кінцевою величиною потоку*.

Потоки платежів є невід'ємною частиною різноманітних угод на фінансовому ринку: кредитному, із цінними паперами, а також при управлінні фінансами підприємств і здійсненні інвестиційних проектів і в багатьох інших задачах економічної теорії й практики. Прикладами потоків можуть служити надходження внесків у пенсійний фонд; календар «порціонної» видачі кредиту і погашень по ньому; купонні виплати власникам облігацій; розтягнуті в часі інвестиції в проект і доходи від його реалізації і т.ін.

Зацікавлені в платежах сторони переслідують певні цілі, успішність у досягненні яких, крім іншого, залежить від розмірів платежів і часу їхнього надходження, тобто від параметрів потоку $\{C_i, t_i, k\}$ (рисунок 2.1).

Отримувачі доходів прагнуть до їхнього збільшення і оцінюють свій успіх сумарним доходом, заробленим за повний термін дії платежів, – t_k. Зрозуміло, що з урахуванням часової нерівноцінності грошей вони не обмежуються простою алгебраїчною сумою всіх платежів, а оцінюють їх як зважену суму, де вагами є множники нарощення кожного платежу на певну дату в майбутньому, наприклад, t_k.

Питання про вибір ставки нарахування відсотків, що входить у вагові коефіцієнти, вирішується залежно від наявних альтернатив використання грошового капіталу, наприклад – внесення коштів на депозит банку по позиковому відсотку *i*. Через однозначний математичний зв'язок нарощення з дисконтуванням за базову оцінку потоку платежів можна прийняти й алгебраїчну суму дисконтованих платежів на будь-який минулий момент.

В фінансовому аналізі ці узагальнені характеристики (оцінки) послідовності платежів називаються *нарощеною сумою (S)* і *сучасною величиною потоку (A)*.

Їхні числові значення дають майбутній і відповідно випереджаючий фінансові еквіваленти розподіленого потоку платежів. Можна сказати, що чиста наведена величина дорівнює тій грошовій масі, яка, будучи покладена на депозит у банку по ставці *i*, виросте до певної дати до величини суми, нарощеної по всьому потоці, і на ту ж дату.

У якості ще однієї узагальнювальної характеристики зупинимося на показнику *внутрішньої норми прибутковості (q)*. Змістовно цій характеристиці відповідає таке значення ставки відсотка, при якому нарощена сума потоку витрат у точності збігається з нарощеною сумою від потоку надходжень, інакше кажучи, ця ставка характеризує ефективність, з якою використовуються кошти. Звідси, зокрема, слідує, що, дисконтуючи або нараховуючи по даній ставці, ми прийдемо до нульових значень як приведеної, так, природно, і нарощеної характеристик.

Ці умови одночасно служать і рівнянням для відшукання обговорюваного показника. Наведемо елементарний приклад. Нехай потік складається із двох членів: виплати $(-S_0)$, і надходження $(+S_T)$. Тоді рівняння відносно внутрішньої норми прибутковості q прийме вигляд: $-S_0 \cdot (1+q)^T + S_T = 0$ звідки:

$$q = \left[\frac{S_T}{S_0}\right]^{\frac{1}{T}} - 1. \qquad (2.3)$$

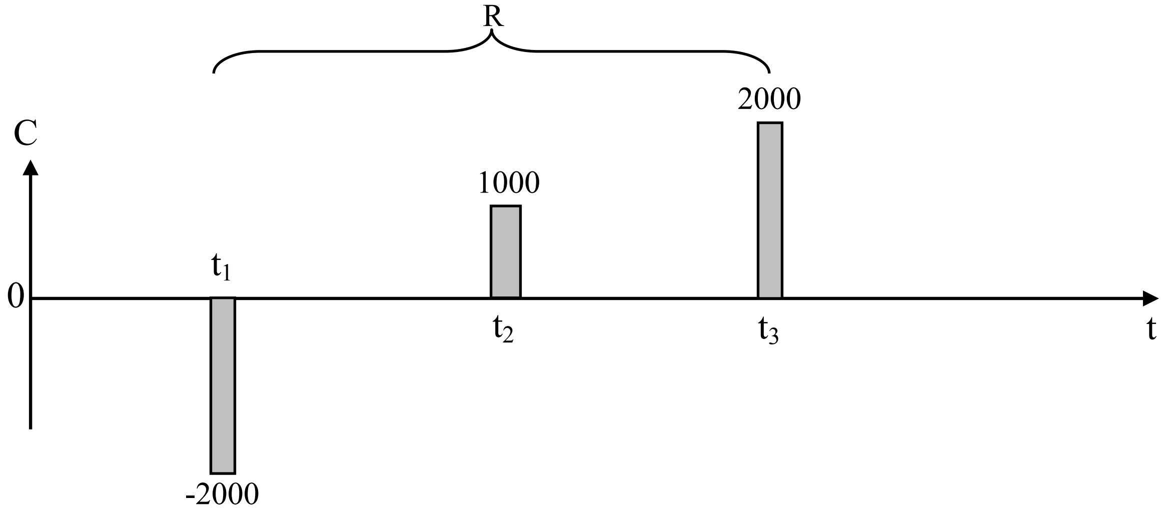
Видно, що в цьому окремому випадку внутрішня прибутковість збігається з ефективною ставкою відсотка, як вона була визначена формулою (1.37).

Грунтуючись на введених означеннях, легко зрозуміти, що з позицій одержувача доходів потокова ситуація тим краща, чим вище значення її узагальнених характеристик: чистого приведеного доходу, нарощеної суми, внутрішньої норми прибутковості.

Розглянуті у фінансовому аналізі потоки платежів дуже різноманітні: строки виплат, та й самі виплати можуть бути детермінованими величинами, але можуть мати і ймовірнісний характер. Так, наприклад, на відміну від власника облігації з фіксованою купонною ставкою, акціонер, оцінюючи свої шанси на майбутні доходи, має у своєму розпорядженні лише можливі судження про дивіденди. *У даному розділі ми обмежимося лише детермінованим випадком*, який властивий аналізу потоків платежів *в умовах визначеності.*

При повній визначеності платежі задаються фіксованими значеннями виплат C_i і моментів їхнього надходження t_i, $i=\overline{1,k}$. Цих даних достатньо для розрахунку основних системних параметрів: *S, A, q*. Однак можуть виникнути випадки, коли заданими є узагальнені характеристики і неповний набір параметрів потоку. У таких випадках може знадобитися знайти відсутні параметри або параметр.

Приклад 1. Нехай потік є потік платежів *R*={(-2000,1); (1000,2); (2000,3)} (зображений схематично на рисунку). Знайдемо характеристики цього потоку при ставці відсотка *i*=10%.



Спочатку знайдемо сучасну величину потоку:

$$R(0)=-2000\cdot(1+0{,}1)^{-1}+1000\cdot(1+0{,}1)^{-2}+2000\cdot(1+0{,}1)^{-3}=510{,}8$$

Тепер можна знайти й скінченну величину потоку:

$$R(3)=R(0)\cdot(1+i)^3=679{,}8$$

Потік позитивних платежів з постійними проміжками між ними називається *рентою*. Часто самі платежі також є однаковими.

2.2. Класифікація фінансових рент

Фінансові операції часто носять тривалий характер і складаються не з разового платежу, а з їхньої послідовності, тобто потоку платежів, можливо, різних знаків. Прикладом можуть служити погашення позики, орендна плата, інвестиція у виробництво або в цінні папери і т.ін.

Нехай фінансова операція за договором починається в момент часу t_0, а закінчується в момент t_n, а виплата суми Y_k відбувається в момент

t_k, $k=0,1,...,n$, причому $t_0<t_1<t_2<...<t_n$. При теоретичному аналізі звичайно допускають $t_0=0$.

Якщо всі виплати Y_k одного знака і відбуваються через однакові інтервали часу $\tau=t_k-t_{k-1}$, $k=1,2,...,n$, то така послідовність платежів називається *фінансовою рентою або аннуїтетом* (annuity) незалежно від призначення цих виплат. Для зручності аналізу рент всі виплати будемо вважати позитивними.

Ренти часто зустрічаються на практиці. Їхнім прикладом є квартирна плата, внески по погашенню споживчого кредиту, пенсія, регулярна виплата відсотків по банківському депозиту або по цінних паперах і т.ін. Спочатку розглядалися лише щорічні (anno – рік латинською мовою) виплати, звідти і відбулася їхня назва «аннуїтет». Пізніше вони стали включати і всі послідовності платежів одного знака через будь-які однакові інтервали часу.

Перерахуємо тепер основні параметри і проведемо класифікацію рент. Насамперед необхідно вибрати базову одиницю часу і задати постійну ефективну ставку i складного відсотка, по якій проводяться всі розрахунки по ренті, указати спосіб нарахування відсотка і інші технічні подробиці.

Потім необхідно задати Y_k – *член ренти.* Якщо всі виплати однієї величини (розміру), тобто $Y_k=Y$, то рента називається *постійною*, у протилежному випадку – *змінною.* Члени змінної ренти можуть змінюватися за заздалегідь заданим правилом. Ми обмежимося лише розглядом постійних рент.

Далі необхідно задати τ – *період ренти* або *період виплат*, тобто календарну довжину постійного інтервалу між двома послідовними виплатами. Задаючи ще число n виплат, ми одержуємо $n\tau$ – *календарний строк ренти.* При теоретичному аналізі часто приймають τ за базову одиницю часу, так що $t_k=k$, $k=0,1,...,n$, а число n виплат збігається зі строком ренти.

Виплата ренти може проводитися один раз або l разів за рік, нарахування відсотків – один раз або m разів за рік. Це – *дискретні* (l,m) - *кратні ренти,* причому ми розглянемо тільки випадок $l=m$. Коли виплати і нарахування відсотків проводяться дуже часто (наприклад, щотижня), їх простіше аналізувати як безперервні і називати *безперервна рента*.

Якщо виплата проводиться наприкінці кожного періоду, то рента називається *постнумерандо* або *звичайною* (ordinary annuity), а якщо на початку періоду, то *пренумерандо* або авансованою (annuity due).

Іноді виплати можуть проводитися в середині кожного періоду, прикладом чого може служити щомісячна виплата пенсії в певний для кожного пенсіонера день. Характеристики цього випадку будуть укладені між відповідними характеристиками рент пренумерандо й постнумерандо.

З погляду строку ренти діляться на *безумовні* (annuity certain), коли заздалегідь домовляються про дату першої й останньої виплати, і *умовні* (contingent annuity), коли дата першої і/або останньої виплат залежить від того, відбудеться або не відбудеться деяка подія. Прикладом умовної ренти може служити пенсія (life annuity), виплата якої починається після досягнення громадянином певного віку і припиняється після смерті пенсіонера. Аналіз умовних рент – один з фундаментальних розділів страхової математики, результати якої покладені в основу розрахунків страхових тарифів. Без цього неможлива законна діяльність страхових фірм і пенсійних фондів. Оскільки розрахунки умовних рент пов'язані з ймовірностями певних подій і вимагають знання хоча б елементів теорії ймовірностей і математичної статистики, то ми не будемо їх розглядати і обмежимося лише *безумовними рентами*. Однак вивчення безумовних рент важливо саме по собі і, крім того, служить гарним вступом у вивчення умовних рент.

Якщо $n=\infty$, то відповідна рента називається *безстроковою,* або *вічною* (perpetuity). Хоча така рента на перший погляд може здатися нам дивною, але випадок $n=\infty$ має не тільки теоретичний інтерес. Прикладом тут можуть служити «консолі» – безстрокові облігації британського казначейства, випущені ще в XIX сторіччі. Виплати по них проводяться два рази в рік звичайно під 2,5% річних, а сама облігація може бути викуплена в будь-який час за бажанням її власника.

Якщо період ренти збігається з періодом нарахування відсотків, то рента називається *простою,* у протилежному випадку – *загальною.* Ми будемо розглядати тільки прості постійні безумовні ренти і, якщо це не викликає сумнівів, називати їх коротко «рента», Тип виплат постнумерандо або пренумерандо буде вказуватися додатково.

У додатках В і Г містяться таблиці, які можна використовувати при розборі прикладів і вирішення задач.

2.3. Фінансовий аналіз базових рент пренумерандо і постнумерандо

Приймемо період τ ренти за базову одиницю часу, тоді її строк складе n цих одиниць, де n – будь-яке ціле число, $n \geq 1$. Нехай кожний член ренти дорівнює Y гр. од., а ставка складного відсотка за базову одиницю часу дорівнює i (ефективна ставка). Для стислості ренту пренумерандо позначимо через R_0, а ренту постнумерандо – через R_1. Для зручності приймемо момент t_0 початку договору ренти за 0. Щоб уникнути в математичній моделі виплат на границі інтервалів, розіб'ємо інтервал $[0, n)$ – термін дії договору – на n прилягаючих, але непересічних інтервалів довжини 1: $[0,1), [1,2), \dots, [n-1,n)$.

Лівий кінець кожного із цих інтервалів включений у нього, а правий – ні. Для наочності виберемо також деяке мале додатне число ε і уявимо собі, що в інтервалі $[k-1, k)$ виплата постнумерандо відбувається в момент $k-\varepsilon$, а виплата пренумерандо в інтервалі $[k, k+1)$ – у момент $k+\varepsilon$, $k=1,2,\dots,n-1$. Такий підхід дозволяє уникнути плутанини при підрахунку загального числа виплат до моменту k (рисунок 2.2).

Наприклад, нехай період ренти дорівнює одному місяцю, виплата постнумерандо відбувається в перший, а пренумерандо – в останнійій робочий день місяця. Тоді в математичній моделі можна прийняти, що $\varepsilon = 1/3 \cdot 1/30 = 0{,}01$.

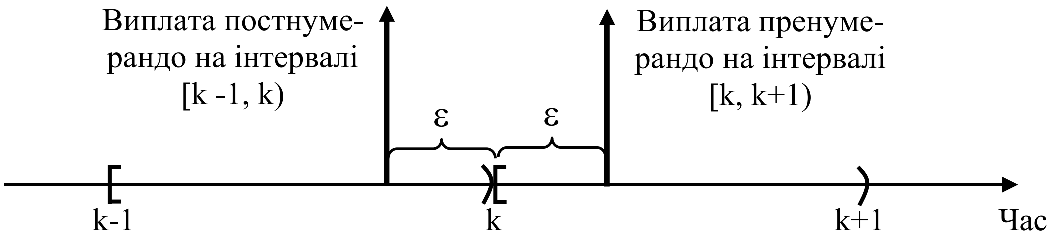
Як правило, у дійсності ми не будемо користуватися цією конкретизацією, а будемо вважати, що виплати постнумерандо безпосередньо передують, а виплати пренумерандо відразу ідуть за числом (датою) k – межею між суміжними періодами ренти. Формально це означає, що ε дуже мале.

Приклад 1. Розглянемо 5-річну ренту з річним платежем 1000 грн., процентна ставка i=10%.

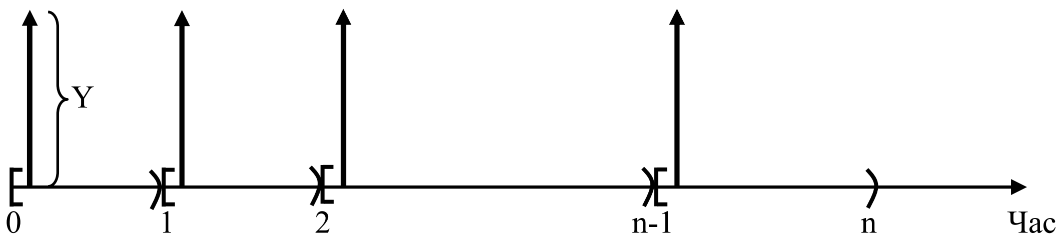
Річні платежі		1000	1000	1000	1000	1000
Сума з нарахуванням відсотків			1100	2310	3641	5105,1
	0	1	2	3	4	5
Загалом на рахунку		1000	2100	3310	4641	6105,1

Пояснимо рух грошових сум. Наприкінці 1-го року в банк вноситься 1000 грн. Наприкінці 2-го року ця сума зростає до 1100 грн. за рахунок нарахованих 10%. Разом із черговим внесеним платежем в 1000 грн. на рахунку вже 2100. Наприкінці 3-го року ця сума зростає до

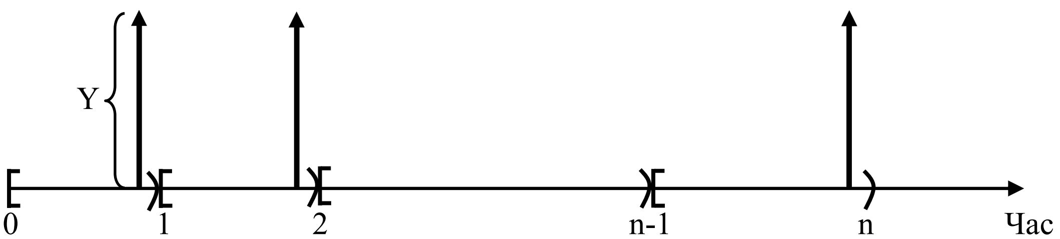
2310 грн. за рахунок нарахованих 10%. Разом із черговим внесеним платежем на рахунку тепер уже 3310 грн. і т.ін. Нарощена сума ренти дорівнює 6105,1 грн. Сучасну величину ренти знайдемо, дисконтуючи до моменту 0 нарощену суму 6105,1. Одержуємо $6105{,}1/1{,}1^5 = 3791$ грн.



а) Порядок виплат на межі інтервалів [k-1,k) и [k, k+1), k=1,2,… n-1



б) Рента R_0 – пренумерандо



в) Рента R_1 – постнумерандо

Рисунок 2.2 – Графік рент пренумерандо і постнумерандо

Закінчивши побудову моделі виплат, перейдемо до чисто фінансового аналізу. У розділі 1 ми встановили, що вартість кожної грошової суми залежить від моменту її одержання, так що при підсумовуванні різночасних грошових сум потрібно спочатку привести їх до одного моменту часу, що цікавить нас.

Нехай $S_0(t)$ – сумарна вартість всіх виплат ренти R_0, приведена до моменту t, а $S_1(t)$ – аналогічна величина для ренти R_1, $0 \le t \le n$. Виведемо тепер формули для сумарної вартості цих рент у момент 0 початку договору про ренту *(сучасна* або *поточна вартість* або *PV ренти)* і в момент n кінця договору про ренту *(нарощена вартість* або *AV ренти)*. Ці величини потрібні для правильного визначення ціни продажу або покупки ренти. Введемо позначення:

$$PV(R_0) = S_0(0),$$
$$PV(R_1) = S_1(0),$$
$$AV(R_0) = S_0(n),$$
$$AV(R_1) = S_1(n).$$

Приводячи всі виплати до моменту *0*, одержимо за допомогою формул для суми членів геометричної прогресії сучасні вартості рент пренумерандо і постнумерандо (див. рисунок 2.2):

$$S_0(0) = Y \cdot (1 + \upsilon + ... + \upsilon^{n-1}) = Y \cdot \frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon} = Y \cdot \frac{1-\upsilon^n}{d}, \qquad (2.4)$$

$$S_1(0) = Y \cdot (\upsilon + \upsilon^2 + ... + \upsilon^n) = Y \cdot \upsilon \cdot \frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon} = Y \cdot \upsilon \cdot \frac{1-\upsilon^n}{d} = Y \cdot \frac{1-\upsilon^n}{i}. \qquad (2.5)$$

Знаменником прогресії тут служить введений раніше коефіцієнт дисконтування:

$$\upsilon = \frac{1}{1+i} = 1 - d.$$

Перейшовши тепер від вартості рент у момент *0* до їхньої вартості в момент *n*, одержимо нарощені вартості рент пренумерандо і постнумерандо:

$$S_0(n) = (1+i)^n \cdot S_0(0) = Y \cdot \upsilon^{-n} \cdot \frac{1-\upsilon^n}{d}, \qquad (2.6)$$

$$S_1(n) = (1+i)^n \cdot S_0(0) = Y \cdot \upsilon^{-n} \cdot \frac{1-\upsilon^n}{i}. \qquad (2.7)$$

Для вартості рент із одиничними виплатами *Y=1* гр. од. у міжнародній фінансовій практиці широко застосовуються спеціальні позначення. Так, сучасні вартості в момент *0* таких рент постнумерандо і пренумерандо позначають, відповідно:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{S_1(0)}{Y} = \upsilon + \upsilon^2 + ... + \upsilon^n,$$
$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{S_0(0)}{Y} = 1 + \upsilon + ... + \upsilon^{n-1}. \tag{2.8}$$

Звідси випливають прості співвідношення:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-\upsilon^n}{i},$$
$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-\upsilon^n}{d}. \tag{2.9}$$

Нарощені вартості в момент *n* рент постнумерандо і пренумерандо позначають відповідно:

$$s_{\overline{n}|i} = AV \cdot a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + 1,$$
$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = AV \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i). \tag{2.10}$$

Звідси слідує, що

$$s_{\overline{n}|i} = \upsilon^{-n} \cdot \frac{1-\upsilon^n}{i},$$
$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \upsilon^{-n} \cdot \frac{1-\upsilon^n}{d}. \tag{2.11}$$

Величини $a_{\overline{n}|i}$, і $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ називають *коефіцієнтами дисконтування* (у страховій математиці $a_{\overline{n}|i}$ називають *аннуїтетом постнумерандо*, а $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ – *аннуїтетом пренумерандо*), а $s_{\overline{n}|i}$ і $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ – *коефіцієнтами нарощення ренти.* Відзначимо, що якщо величина *i* ефективної процентної ставки фіксована, то в нижньому індексі часто пишуть $\overline{n}|$ замість $\overline{n}|i$.

Зручність введених величин полягає в тому, що для одержання вартості ренти з виплатою *Y* досить відповідну вартість ренти з одиничною виплатою (2.9), (2.11) помножити на *Y*. Величини (2.9), (2.11) легко виразити через кожну з них, кожна з них є простою функцією від *n* і *i,* їх легко обчислити за допомогою калькулятора. Вони мають цікаві і корисні властивості, частина з яких буде розглянута нижче.

Для зручності читача значення $s_{n\neg i}$ наводяться в додатку В, а значення $a_{n\neg i}$ в додатку Г. У таблицях 2.1 і 2.2 наведені вибірково значення коефіцієнтів нарощення і дисконтування ренти.

Таблиця 2.1 – Коефіцієнти нарощення ренти $s_{n\neg i}$

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278	3,310	3,342
4	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573	4,641	4,710
5	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985	6,105	6,228
6	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523	7,716	7,913
7	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200	9,487	9,783
8	8,892	9,214	9,549	9,897	10,260	10,637	11,028	11,436	11,859
9	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488	13,021	13,579	14,164
10	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487	15,193	15,937	16,722

Таблиця 2.2 – Коефіцієнти дисконтування ренти $a_{n\neg i}$

n \ i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2,829	1,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531	2,487	2,444
4	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240	3,170	3,102
5	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791	3,696
6	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355	4,231
7	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868	4,712
8	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335	5,146
9	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995	5,759	5,537
10	8,530	8,110	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145	5,889

Величини $s_{n\neg i}$ і $a_{n\neg i}$ пов'язані очевидним співвідношенням:

$$\begin{aligned} s_{n\neg i} &= a_{n\neg i} \cdot (1+i)^n \quad \text{або} \\ s_{n\neg i} &= a_{n\neg i} \cdot M(n,i). \end{aligned} \tag{2.12}$$

де M(n,i) – мультиплікувальний множник, який розглянутий нами у п. 1.5.

Коефіцієнт нарощення $s_{n\neg i}$ показує, у скільки разів *нарощена вартість ренти* більша її річного платежу. Аналогічний зміст має і *кое-*

фіцієнт дисконтування ренти $a_{n\neg i}$: він показує, у скільки разів *сучасна вартість ренти* більша її річного платежу.

Задача 1. Потрібно знайти сучасну і нарощену вартість річної ренти з Y=1000, n=8, i=8%.

Рішення: Знаходимо за таблицями $a_{n\neg i}(8,8)=5,747$, $s_{n\neg i}(8,8)=10,637$. Виходить, сучасна вартість ренти дорівнює 5747, нарощена 10637. Для контролю, подивившись у таблицю мультиплікувальних множників (таблиця 1.6), знаходимо M(8,8)=1,851. Перевірка: 5,747·1,851=10,638.

Помітимо, що позначення для величин (2.8)-(2.11) і для ряду інших введені ще наприкінці XIX сторіччя Міжнародним союзом актуаріїв – страхових і фінансових математиків – і повсюди застосовуються у фінансових розрахунках і дотепер. Для того щоб полегшити читачу вивчення більш докладних курсів фінансового аналізу, використання довідників, таблиць і фінансових калькуляторів, ми також будемо користуватися стандартними міжнародними позначеннями.

Приклад 2. Нехай рента виплачується щокварталу, відсотки також виплачуються щокварталу по ставці i=1, 5, 10, 20% за квартал. У таблицях, витягнутих відповідно з додатків Г і В, наводяться значення коефіцієнтів дисконтування $a_{n\neg i}$ і нарощення $s_{n\neg i}$ рент постнумерандо для n=4, 20, 50, 100 і зазначених значень i.

$a_{n\neg i}$	i			
	1	5	10	20
$a_{4\neg i}$	3,9020	3,5459	3,1699	2,5887
$a_{20\neg i}$	18,0456	12,4622	8,5136	4,8696
$a_{50\neg i}$	39,1961	18,2559	9,9148	4,9995
$a_{100\neg i}$	63,0289	19,8479	9,9993	5,0000
$a_{\infty\neg i}$	100	20	10	5

$s_{n\neg i}$	i			
	1	5	10	20
$s_{4\neg i}$	4,060	4,31	4,64	5,37
$s_{20\neg i}$	22,019	33,07	57,28	186,7
$s_{50\neg i}$	64,463	209,35	1164	45497
$s_{100\neg i}$	170,481	2610,02	137796	$4,141\cdot10^8$

Перегляд даних цих таблиць по рядках показує, як з ростом *i* зменшується сучасна вартість рент $a_{n\neg i}$ і як зростає їхня нарощена вартість $s_{n\neg i}$. Перегляд даних цих таблиць по стовпцях показує, як з зростанням *n* повільно зростають $a_{n\neg i}$ і дуже швидко – $s_{n\neg i}$. Цікаво відзначити, що вже при $i \geq 10\%$ значення $a_{n\neg i}$ із зростанням *n* швидко сходяться до граничного значення $a_{\infty\neg i}$. Так, $a_{50\neg 10}$ відрізняється від $a_{\infty\neg 10}=10$ менше, ніж на 1%, а $a_{50\neg 20}$ практично збігається з $a_{100\neg 20}$ і з $a_{\infty\neg 20}=5$.

Задача 2. Кредит у сумі 5 млн. грн. погашається 12 рівними щомісячними внесками. Процентна ставка по кредиту встановлена в розмірі *i*=1, 3, 5% на місяць. Потрібно знайти суму щомісячного внеску *Y(i)* при платежі а) постнумерандо, б) пренумерандо.

Рішення:

а) Для внесків постнумерандо $Y_1(i)$ знаходиться з рівняння еквівалентності:

$$Y_1(i) \cdot a_{12\neg i} = 5000000 \text{ грн.}$$

Звідси за допомогою додатка Г (коефіцієнтів дисконтування рент) одержуємо:

$$Y_1(1) = \frac{5000000}{11{,}25508} = 444{,}244 \text{ тис. грн.,}$$

$$Y_1(3) = \frac{5000000}{9{,}95400} = 502{,}311 \text{ тис. грн.,}$$

$$Y_1(5) = \frac{5000000}{8{,}86325} = 564{,}127 \text{ тис. грн.}$$

б) Для внесків пренумерандо $Y_0(i)$ знаходиться з рівняння еквівалентності:

$$Y_0(i) \cdot \ddot{a}_{12\neg i} = 5000000 \text{ грн.}$$

Звідси за допомогою співвідношення: $\ddot{a}_{n\neg i} = \dfrac{i \cdot a_{n\neg i}}{d}$ одержуємо:

$$Y_0(1) = \frac{5000000}{11{,}36763} = 439{,}845 \text{ тис. грн.,}$$

$$Y_0(3) = \frac{5000000}{10{,}25262} = 487{,}680 \text{ тис. грн.,}$$

$$Y_0(5) = \frac{5000000}{9{,}3064} = 537{,}264 \text{ тис. грн.}$$

Задача 3. Нехай Y=1000, i=8%. Знайти тривалість ренти із сучасною вартістю ренти S_l=4000.

Рішення:

Маємо $a_{\overline{n}|8} = \frac{S_1}{Y} = 4$. За таблицею коефіцієнтів дисконтування рент знаходимо, що $a_{\overline{5}|8} = 3{,}993$. Виходить, тривалість ренти буде приблизно n=5.

Задача 4. У ході судового засідання з'ясувалося, що з вини Пенсійного фонду г. N протягом 10 років недоплачували 100 грн. пенсії щомісяця. Суд поставив за обов'язок фонду виплатити всі недоплачені гроші з відсотками (12% річних). Яка сума виплати?

Рішення: Необхідна сума є нарощена величина ренти з одиничним платежем 100 грн. і числом платежів 120. Обчислимо цю величину:

$$S = [(1+0{,}01)^{120}-1]/0{,}01 \approx (e^{1,2}-1)/0{,}01-230.$$

Відповідь, треба виплатити приблизно 23000 грн.

2.4. Властивості коефіцієнтів дисконтування і нарощення рент

Наведемо тепер кілька тверджень про властивості коефіцієнтів дисконтування і нарощення рент. Оскільки докази досить прості, то частину з них ми не наводимо і рекомендуємо виконати їх самостійно. При цьому будемо давати і фінансову інтерпретацію багатьом з отриманих формул, що допоможе читачу освоїти як формальний, так і змістовний фінансовий підхід. Для зручності як і раніше вважаємо, що базова одиниця часу дорівнює періоду ренти.

1) Якщо i=0, то v=1 і для будь-яких n, n=1,2,...

$$a_{\overline{n}|0} = \ddot{a}_{\overline{n}|0} = s_{\overline{n}|0} = \ddot{s}_{\overline{n}|0} = 1+1+\ldots+1 = n. \tag{2.13}$$

Це слідує як з формального визначення зазначених величин, так і з їхнього фінансового змісту: при відсутності нарощення і дисконтування повна вартість ренти в будь-який момент часу дорівнює просто сумі всіх виплат.

2) Розглянемо тепер більш докладно випадки n=0 і n=1.

Випадок n=0 означає, що виплати відсутні. Тому зручно розглянути і цей випадок, прийнявши:

$$a_{\overline{0}\rceil i} = \ddot{a}_{\overline{0}\rceil i} = s_{\overline{0}\rceil i} = \ddot{s}_{\overline{0}\rceil i} = 0. \tag{2.14}$$

При *n*=1 за визначенням (2.8) одержимо, що:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_{\overline{1}\rceil i} = 1, \\ &a_{\overline{1}\rceil i} = \upsilon. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Як і слід було сподіватися, цей результат слідує і з (2.9).

3) Якщо $n \geq 1$.

$$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} = 1 + a_{\overline{n-1}\rceil i} \tag{2.16}$$

При *n*>2 доведення відразу слідує з: $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} = 1 + (\upsilon + \upsilon^2 + ... + \upsilon^{n-1})$, а при *n*=1 – з (2.14).

4) Дійсні і такі вирази:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} = 1 + (\upsilon + \upsilon^2 + ... + \upsilon^n) - \upsilon^n = 1 + a_{\overline{n}\rceil i} - \upsilon^n, \\ &\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} = \frac{1}{\upsilon^n} + \left(\frac{1}{\upsilon^{n-1}} + ... + \frac{1}{\upsilon} + 1\right) - 1 = \frac{1}{\upsilon^n} + s_{\overline{n}\rceil i} - 1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Дійсно, у ренті пренумерандо перша виплата відбувається в момент *0*, але в ній відсутня виплата *1* гр. од. у момент *n*.

5) При *i>0* і будь-якому *n≥1* справедливі такі співвідношення:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} = (1 + i) \cdot a_{\overline{n}\rceil i}, \\ &\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} = (1 + i) \cdot s_{\overline{n}\rceil i}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$s_{\overline{n+1}\rceil i} = 1 + \ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}. \tag{2.19}$$

З (2.18) слідує, що при *i>0* і будь-якому *n>1* справедливо:

$$\begin{aligned} &\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} > a_{\overline{n}\rceil i}, \\ &\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} > s_{\overline{n}\rceil i}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

З фінансової точки зору це очевидно, тому що послідовність виплат пренумерандо вигідніше для одержувача ренти – вона починається раніше.

6) З (2.9) слідує, що:

$$1 = i \cdot a_{n\neg i} + \upsilon^n, \tag{2.21}$$

$$1 = d \cdot \ddot{a}_{n\neg i} + \upsilon^n. \tag{2.22}$$

Дійсно, нехай вкладник поклав *1* гр. од. на банківський депозит на строк *n* місяців по ставці *i* за місяць. Тоді при щомісячній виплаті відсотків і поверненні внеску в розмірі *1* гр. од. після закінчення *n* місяців сучасна вартість цього депозиту в початковий момент еквівалентна *1* гр. од. як при виплаті суми *i* гр. од. наприкінці кожного місяця, так і суми *d* гр. од. на початку кожного місяця.

Можна інтерпретувати (2.21) і як погашення боргу в *1* гр. од. рівними щомісячними платежами в сумі *i* гр. од. наприкінці місяця *1,2, ... , n-1* і поверненню (*1+i*) гр. од. наприкінці місяця *n*.

Аналогічним чином, (2.22) описує погашення боргу в *1* гр. од. рівними щомісячними платежами в сумі *d* гр. од. на початку місяця *1,2,..., n-1*, *n* і поверненню *1* гр. од. наприкінці місяця *n*.

7) Нехай тепер *i>0*, а *n* необмежено зростає, так що $\lim\limits_{n\to\infty} \upsilon^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = 0$. Тоді для сучасної вартості безстрокової ренти одержимо з (2.9):

$$\begin{aligned} a_{\infty\neg i} &= \lim_{n\to\infty} a_{n\neg i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\upsilon^n}{i} = \frac{1}{i}, \\ \ddot{a}_{\infty\neg i} &= \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{n\neg i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\upsilon^n}{d} = \frac{1}{d}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Таким чином, сучасна вартість навіть необмеженого числа виплат кінцева, оскільки далекі гроші мало що стоять сьогодні. При великій інфляції знецінювання далеких грошей відбувається особливо швидко. Ілюстрацією тут може служити таблиця 2.1, 2.2 і приклад 2, а також наступна задача.

Задача 5. Нехай щорічно виплачується безстрокова рента з Y=10^6 грн. Потрібно знайти сучасну вартість цієї ренти постнумерандо і пренумерандо при річній ставці i=5, 10, 100%.

Рішення:

Тут $a_{\infty\neg 5} = 20$, $a_{\infty\neg 10} = 10$, $a_{\infty\neg 1} = 1$. Тому що $\ddot{a}_{\infty\neg i} = (1+i)\cdot a_{\infty\neg i}$, то $\ddot{a}_{\infty\neg 5} = 21$, $\ddot{a}_{\infty\neg 10} = 11$, $\ddot{a}_{\infty\neg 1} = 2$.

Тому сучасна вартість безстрокових рент постнумерандо складе відповідно 20, 10 і 1 млн. грн., а пренумерандо – 21, 11 і 2 млн. грн.

Ми бачимо, що при *i=1*, тобто постійній і великій інфляції, сучасна вартість безстрокової ренти постнумерандо збігається з величиною тільки однієї виплати, а для пренумерандо – вона у два рази більша.

Відзначимо ще, що гіпотетичному випадку повної відсутності інфляції, коли вартість будь-якої суми грошей залишається постійною, відповідає випадок *i=d=0*. Тоді з (2.23) слідує, що величини $a_{\infty\neg 0}$ і $\ddot{a}_{\infty\neg 0}$ стають нескінченно великими, що відповідає їхньому визначенню і фінансовому змісту випадку *i=0*.

8) Для безстрокової ренти при будь-якому *i>0*

$$\ddot{a}_{\infty\neg i} - a_{\infty\neg i} = \frac{1}{d} - \frac{1}{i} = 1. \tag{2.24}$$

З фінансової точки зору це очевидно: сучасна вартість безстрокової ренти при виплаті пренумерандо на *1* гр. од. – величину першої виплати – перебільшує сучасну вартість ренти постнумерандо. Як ілюстрація тут також може служити попередня задача 4.

9) Щоб дати виплаті безстрокової ренти пряму фінансову інтерпретацію, запишемо (2.23) у вигляді:

$$\begin{aligned} i\cdot a_{\infty\neg i} &= 1, \\ d\cdot \ddot{a}_{\infty\neg i} &= 1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Тоді перше співвідношення означає відсоток у розмірі *1* гр. од., виплачуваний наприкінці кожної одиниці часу із суми $a_{\infty\neg i}$, поміщеної в початковий момент на банківський депозит по постійній ефективній ставці *i*. Друге співвідношення також означає відсоток у розмірі *1* гр. од., але виплачуваний на початку кожної одиниці часу за інших рівних умов.

Задача 6. Потрібно знайти суму, яку необхідно покласти на рахунок приватного пенсійного фонду, щоб він зміг виплачувати своїм учасникам щомісяця 10^5 фунтів стерлінгів. Для простоти приймемо, що фонд може інвестувати свої кошти по постійній ставці 0,5% на місяць.

Рішення: В умовах стійкої фінансової системи як перше наближення для рішення цього завдання можна використати модель безстрокової ренти із щомісячною виплатою $Y=10^5$ фунтів стерлінгів при $i=0,005$. Оскільки не обговорено, якого числа виплачується щомісячна рента, то ми розглянемо схеми виплат наприкінці і на початку кожного місяця. У першому випадку одержимо:

$$S_1(0)=\frac{Y}{i}=\frac{10^5}{0{,}005}=2\cdot 10^7=20 \text{ млн. фунтів стерлінгів,}$$

у другому:

$$S_0(0)=\frac{Y}{d}=\frac{Y\cdot(1+i)}{i}=2\cdot 10^7\cdot 1{,}005=20 \text{ млн. } 100 \text{ тис. фунтів стерлінгів.}$$

Для контролю можна скористатися співвідношенням (2.24):

$$S_0(0)-S_1(0)=Y\cdot(\ddot{a}_{\infty\neg i}-a_{\infty\neg i})=Y=100 \text{ тис. фунтів стерлінгів.}$$

Приклад 3. Дамо тепер ще одну інтерпретацію коефіцієнтів дисконтування ренти. Нехай клієнт бажає протягом *n* послідовних періодів часу однакової довжини регулярно одержувати *Y* гр. од. за кожний період. Тоді при постійній ставці *i* за цей період клієнт може покласти на банківський депозит суму $Y\cdot a_{n\neg i}$ гр. од. при виплаті *Y* гр. од. наприкінці кожного з *n* періодів, після чого внесок буде анульований (див. рисунок 2.3).

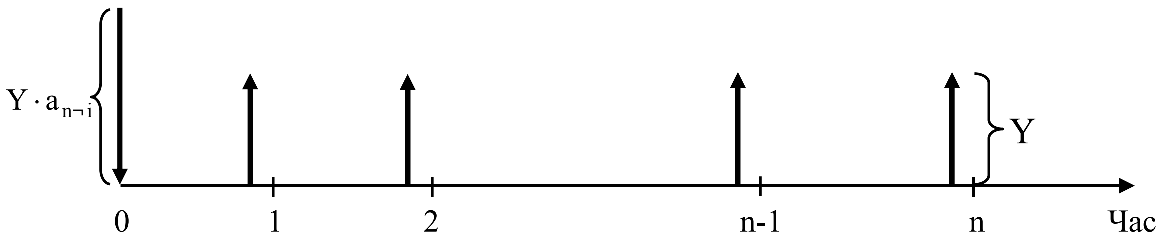


Рисунок 2.3 – Еквівалентність суми $Y\cdot a_{n\neg i}$ і *n* виплат по Y постнумерандо

Очевидно, що при великих *n* банку важко гарантувати постійну ставку *i* і він повинен або встановити її досить низькою, або періодично переглядати.

Разом з тим якщо вважати $Y \cdot a_{n\neg i}$ нетто-вартістю (собівартістю) відповідної ренти, то, додаючи до неї величину накладних витрат, податки і страховку, можна розрахувати справедливу продажну ціну ренти.

Приклад 4. Дамо тепер ще одну інтерпретацію коефіцієнтів нарощення рент. Нехай клієнт має у фінансовій організації накопичувальний рахунок, на який він регулярно вносить *Y* гр. од. на початку кожного періоду однакової довжини. Тоді при постійній ставці *i* за цей період він може одержати після закінчення *n* періодів суму $Y \cdot \ddot{s}_{n\neg i}$ (див. рисунок 2.4).

Рисунок 2.4 – Накопичена сума $Y \cdot \ddot{s}_{n\neg i}$ при *n* внесках по Y пренумерандо

Задача 7. Бізнесмен орендував віллу за $10000 у рік. Яка викупна ціна оренди при річній ставці відсотка 5%?

Рішення: Викупна ціна є сучасна величина всіх майбутніх орендних платежів і дорівнює $S_1 = \frac{Y}{i} = \frac{10000}{0,05} = 200000$ дол. Між іншим, це в точності річні процентні гроші, які став би одержувати орендодавець із $200000, покладених у банк під згадану процентну ставку.

2.5. Відстрочені, m-кратні і безперервні ренти

Розглянемо такі види рент як: відстрочені, m-кратні і безперервні.

1. Відстрочені ренти

Розглянемо узагальнення базових рент, коли перша з послідовності *n* одиничних виплат відбувається в момент *h+ε* для пренумерандо і *h+1-ε, h>0* – для постнумерандо (див. рисунок 2.5–2.6.).

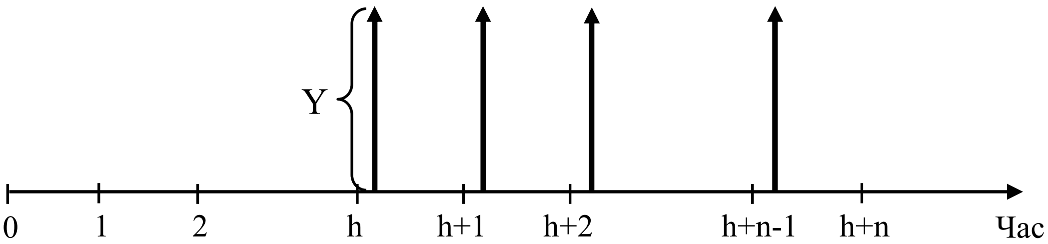


Рисунок 2.5 – Відстрочена на *h* рента пренумерандо

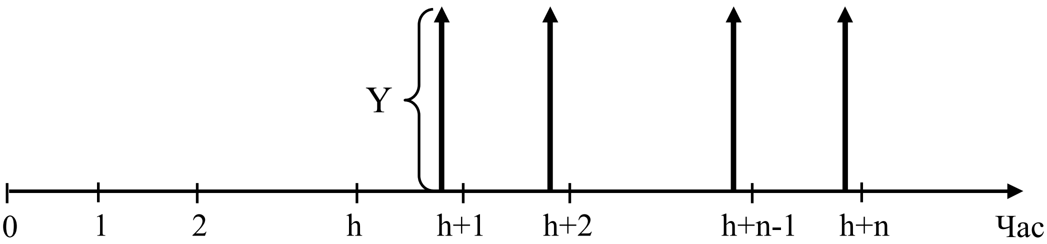


Рисунок 2.6 – Відстрочена на *h* рента постнумерандо

Відстроченою на h одиниць часу рентою (deferred annuities) називається такий потік платежів коли перша з послідовності *n* одиничних виплат відбувається в момент $h+\varepsilon$ для пренумерандо і $h+1-\varepsilon$, $h>0$ – для постнумерандо, а його сучасну вартість у момент 0 позначають через ${}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ для виплат пренумерандо і через ${}_{h|}a_{\overline{n}|i}$ – для виплат постнумерандо, $n=1,2,...,h>0$. При $h=0$ відстрочена рента збігається з базовою. З викладеного вище можна записати формулу (2.26).

$$\begin{aligned}
{}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n}|i} &= \upsilon^h + \upsilon^{h+1} + ... + \upsilon^{h+n-1} = \upsilon^h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k = \upsilon^h \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}, \\
{}_{h|}a_{\overline{n}|i} &= \upsilon^{h+1} + \upsilon^{h+2} + ... + \upsilon^{h+n} = \upsilon^h \cdot \sum_{k=1}^{n} \upsilon^k = \upsilon^h \cdot a_{\overline{n}|i},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Також для обчислення сучасної вартості відстроченої ренти можна використати формулу (2.9) при будь-яких значеннях $h>0$, включаючи дробові. Разом з тим при будь-якому цілому $h=1,2,...$ і $n=1,2,..$ можна використати формулу (2.27).

$$\begin{aligned}
{}_{h|}\ddot{a}_{\overline{n}|i} &= (1 + \upsilon + ... + \upsilon^{h+n-1}) - (1 + \upsilon + ... + \upsilon^{h-1}) = \ddot{a}_{\overline{n+h}|i} - \ddot{a}_{\overline{h}|i}, \\
{}_{h|}a_{\overline{n}|i} &= (\upsilon + \upsilon^2 + ... + \upsilon^{h+n}) - (\upsilon + \upsilon^2 + ... + \upsilon^h) = a_{\overline{n+h}|i} - a_{\overline{h}|i}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Таким чином, при цілому $h \geq 1$ для обчислення коефіцієнтів дисконтування відстроченої ренти можна користуватися як (2.26), так і (2.27), а при будь-якому $h>0$, включаючи дробові, тільки (2.26).

Як і слід було сподіватися з фінансових міркувань, коефіцієнти дисконтування (2.26)-(2.27) відстроченої ренти при $h=0$ збігаються з $\ddot{a}_{n\neg i}$ і $a_{n\neg i}$.

З (2.26) і (2.27) можна одержати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{n+h\neg i} &= \ddot{a}_{n\neg i} + \upsilon^h \cdot \ddot{a}_{n\neg i}, \\ a_{n+h\neg i} &= a_{n\neg i} + \upsilon^h \cdot a_{n\neg i}. \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Задача 8. Клієнт бажає придбати в банку ренту із щомісячною виплатою йому, а у випадку його смерті – дружині або дітям 1000 доларів в останній робочий день кожного місяця протягом 4 років. При постійній ставці i=0,5; 1; 2% на місяць потрібно оцінити собівартість для банку цієї ренти на момент продажу для випадків початку виплати: а) негайно, б) відстроченої на півтора року, в) відстроченої на 3 роки.

Решение. Для вирішення цієї задача складемо насамперед таблицю величин $_{h|}a_{48\neg i}$ для зазначених значень i і h. Із цією метою спочатку обчислимо або візьмемо з таблиць $a_{n\neg i}$, значення $a_{48\neg i}$, а потім скористаємося формулами (2.26), якщо цих таблиць немає, або формулами (2.27), якщо ці таблиці є. У результаті одержимо таблицю значень $_{h|}a_{48\neg i}$ – коефіцієнтів дисконтування для відстроченої на h ренти, наведену нижче.

h	*i*		
	0,005	0,01	0,02
0	42,5803	37,9740	30,6731
18	25,4179	21,5757	15,6811
36	9,7093	7,8665	5,1843

Для відповіді на поставлене питання досить кожне значення $_{h|}a_{48\neg i}$, у наведеній таблиці помножити на величину виплати, рівну в нашому випадку 1000 доларів. Обчислена нами таблиця показує, як швидко зменшується сучасна вартість ренти з формальною виплатою її власнику 48 тис. доларів з ростом величини h відстрочки і ставки i.

2. m-кратні ренти

Як це часто буває на практиці, виберемо тепер за базову одиницю часу 1 рік. Позначимо ефективну ставку через i і приймемо, що за рік проводиться m рівновіддалених виплат по $1/m$ гр. од. кожна, причому відсотки нараховуються також m разів, $m=1,2,...$. Загальне число виплат за інтервал часу в n років складе $n\cdot m$, а загальна сума виплат при $i=0$ складе n гр. од. Для ренти постнумерандо виплати проводяться і відсотки нараховуються в моменти часу як показано на рисунку 2.7, а для ренти пренумерандо – у моменти часу рисунок 2.8.

$$\overbrace{\frac{1}{m},\frac{2}{m},...,\frac{m-1}{m},1}^{\text{m виплат}},...,n-1,\overbrace{n-1+\frac{1}{m},...,n-\frac{1}{m},n}^{\text{m виплат}}.$$

Рисунок 2.7 – Нарахування m-кратної ренти постнумерандо

$$\overbrace{0,\frac{1}{m},\frac{2}{m},...,\frac{m-1}{m}}^{\text{m виплат}},1,...,\overbrace{n-1,n-1+\frac{1}{m},...,n-\frac{1}{m}}^{\text{m виплат}}.$$

Рисунок 2.8 – Нарахування m-кратної ренти пренумерандо

Помітимо, що передостання операція постнумерандо і остання операція пренумерандо здійснюється в момент:

$$n-1+\frac{m-1}{m}=n-\frac{1}{m}. \tag{2.29}$$

Позначимо коефіцієнти дисконтування рент постнумерандно і пренумерандо у випадку m виплат і m нарахувань, відповідно $a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}}$ і $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}}$, а коефіцієнти нарощення – відповідно $s^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}}$ і $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}}$. Для стислості в проміжних результатах ми будемо іноді опускати $i^{(m)}$ у нижньому індексі.

Приводячи вартість всіх виплат ренти постнумерандо до моменту 0, одержимо:

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{mn} \upsilon^{k/m} = \frac{\upsilon^{1/m}}{m} \cdot \frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon^{1/m}}. \qquad (2.30)$$

Тому що $\upsilon=1/(1+i)$, то

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{\upsilon^{1/m}}{1-\upsilon^{1/m}} = \frac{1}{m \cdot ((1+i)^{1/m}-1))} = \frac{1}{i^{(m)}}. \qquad (2.31)$$

Тут ми скористалися формулою (1.37), що пов'язує номінальну ставку $i^{(m)}$ з ефективною річною ставкою i.

Отже,

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{1-\upsilon^n}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} \cdot a_{\overline{n}|i}. \qquad (2.32)$$

Аналогічним чином,

$$s^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} (1+i)^{k/m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/m} - 1} = (1+i)^n \cdot \frac{1-\upsilon^n}{i^{(m)}}. \qquad (2.33)$$

Тому, як і слід було чекати з фінансових міркувань,

$$s^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = (1+i)^n \cdot a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}}. \qquad (2.34)$$

Здійснюючи аналогічні алгебраїчні викладення для ренти пренумерандо, одержимо:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{1-\upsilon^n}{d^{(m)}} = \frac{d}{d^{(m)}} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}, \qquad (2.35)$$

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} = (1+i)^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}. \qquad (2.36)$$

Для досить великих n граничний перехід у формулах (2.32) і (2.35) при $i>0$ дозволяє одержати такі співвідношення для вічних *m-кратних* рент:

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|i^{(m)}} = \lim_{n\to\infty} \cdot a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}}, \qquad (2.37)$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|i^{(m)}} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{1}{d^{(m)}}. \qquad (2.38)$$

Таким чином, ми узагальнили випадок однократних рент на випадок (*l,m*) – кратних у тому найбільш частому випадку, коли число *l* виплат за рік збігається з кількістю *m* нарахувань за рік.

Помітимо, що рента з *m* виплатами по *1/m* гр. од. за рік, номінальною річною ставкою $i^{(m)}$ і строком *n* років еквівалента однократній ренті з періодом *1/m* років, виплатою по *1/m* гр. од., процентною ставкою $i^{(m)}/m$ років за період і строком *nm* періодів.

Дійсно, тому що в силу (2.9)

$$\frac{1}{m} a_{\overline{nm}|i^{(m)}/m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1-\left(\frac{1+i^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{\frac{i^{(m)}}{m}} = \frac{1-\upsilon^{n}}{i^{(m)}}, \qquad (2.39)$$

то

$$\frac{1}{m} \cdot a_{\overline{nm}|i^{(m)}/m} = a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}}. \qquad (2.40)$$

3. Безперервні ренти

Нехай на інтервалі від початкового моменту *0* до кінцевого моменту *n>0* рента виплачується дуже часто, так що її можна вважати безперервною. Очевидно, що при безперервній виплаті різниця між рентами пренумерандо і постнумерандо зникає. Сучасну вартість ренти, виплачуваної безупинно з постійною інтенсивністю одна грошова одиниця за одну одиницю часу при безперервному нарахуванні відсотків з постійною інтенсивністю δ, позначимо $\bar{a}_{\overline{n}|\delta}$. Оскільки за інтервал *(t, t+*Δ*t)* малої довжини Δ*t* буде виплачена Δ*t* гр. од., а приведена на момент *0* вартість цієї суми складе $e^{-\delta t}\Delta t$, то після підсумовування по інтервалу *(0,n)* і переходу до межі по Δ*t*→*0* одержимо:

$$\bar{a}_{\overline{n}|\delta} = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot dt. \qquad (2.41)$$

Тут n – будь-яке невід'ємне число, не обов'язково ціле. Якщо $\delta=0$, то $\bar{a}_{n\neg 0}=n$, що слідує із фінансових міркувань. Оскільки при безперервному нарахуванні відсотків $\upsilon=e^{-\delta}$, то при $\delta>0$ з (2.41) слідує, що:

$$\bar{a}_{n\neg\delta}=\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}=\frac{1-\upsilon^{n}}{\delta} \tag{2.42}$$

або

$$\bar{a}_{n\neg\delta}=\frac{i}{\delta}\cdot a_{n\neg i}. \tag{2.43}$$

Нехай h – будь-яке додатне число, не обов'язково ціле, а ${}_{h|}\bar{a}_{n\neg\delta}$ – сучасна вартість відстроченої на h одиниці часу ренти, виплачуваної безупинно з інтенсивністю 1 на інтервалі $(h, h+n)$. Тоді

$${}_{h|}\bar{a}_{n\neg\delta}=\int_{h}^{h+n}e^{-\delta t}\cdot dt=\int_{0}^{h+n}e^{-\delta t}\cdot dt-\int_{0}^{h}e^{-\delta t}\cdot dt=e^{-\delta h}\cdot\int_{h}^{n}e^{-\delta t}\cdot dt. \tag{2.44}$$

Отже, відстрочену безперервну ренту легко виразити через негайну:

$${}_{h|}\bar{a}_{n\neg\delta}=\bar{a}_{n+h\neg\delta}-\bar{a}_{h\neg\delta}=\upsilon^{h}\cdot\bar{a}_{n\neg\delta}. \tag{2.45}$$

Повторюючи міркування, зроблені при виведенні формули (2.41) для коефіцієнтів нарощення $\bar{s}_{n\neg\delta}$ безперервної негайної ренти, одержимо:

$$\bar{s}_{n\neg\delta}=\int_{0}^{n}e^{\delta(n-t)}\cdot dt. \tag{2.46}$$

Звідси слідує, що

$$\bar{s}_{n\neg\delta}=e^{n\delta}\cdot\bar{a}_{n\neg\delta}, \tag{2.47}$$

$$\bar{s}_{n\neg\delta}=\frac{i}{\delta}\cdot s_{n\neg i}. \tag{2.48}$$

Формулу (2.47) можна ще виразити так:

$$\bar{s}_{\overline{n}|\delta} = (1+i)^n \cdot \bar{a}_{\overline{n}|\delta}. \qquad (2.49)$$

Для безстрокової ренти при $\delta>0$

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|\delta} = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_{\overline{n}|\delta} = \frac{1}{\delta}. \qquad (2.50)$$

З (2.9) і (2.42) слідує, що для будь-яких $n=1,2,\ldots$ і будь-яких $m=1,2,\ldots$

$$i \cdot a_{\overline{n}|i} = i^{(m)} \cdot a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = \delta \cdot \bar{a}_{\overline{n}|\delta} = d^{(m)} \cdot \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} = d \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 - \upsilon^n \ldots \qquad (2.51)$$

У п. 1.8 було показано, що при будь-якому $m=2,3,\ldots$ еквівалентні ставки нарахування відсотків задовольняють нерівності:

$$i > i^{(m)} > \delta > d^{(m)} > d.$$

Із цієї нерівності і рівності (2.51) для будь-яких $n=1,2,\ldots$ і будь-яких $m=1,2,\ldots$ випливає нерівність:

$$a_{\overline{n}|i} < a^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} < \bar{a}_{\overline{n}|\delta} < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i^{(m)}} < \ddot{a}_{\overline{n}|i}. \qquad (2.52)$$

Ця нерівність дозволяє банку правильно розрахувати собівартість ренти, а клієнту при фіксованій ціні ренти, фіксованому строку n і фіксованій ефективній ставці i вибрати найбільш вигідну для нього схему виплат. Очевидно, що за інших рівних умов найбільш вигідною є виплата пренумерандо на початку кожного періоду ренти.

Задачі до розділу 2

1. Знайдіть сучасну і нарощену величини потоку {(-2000,1); (1000,2); (1000,3); (1000,4)} при i=5%?
2. Сім'я хоче нагромадити \$19000 на машину, вкладаючи в банк \$900 щорічно. Річна ставка відсотка в банку 11%. Як довго їй доведеться збирати?
3. Сім'я хоче через 10 років купити дачу за \$25000. Яку суму (однакову) їй потрібно щороку із цих 10 років додавати на свій рахунок у

банку, щоб нагромадити \$25000, якщо річна ставка відсотка в банку 17% ?

4. Кожні півроку на банківський рахунок письменника видавництво перераховує 2000 грн., на які банк нараховує кожні півроку 8% за схемою складних відсотків. Скільки буде на рахунку через 4 роки?
5. Для меліоративних робіт держава перераховує фермеру \$1500 у рік. Гроші надходять на спеціальний рахунок і на них нараховують кожні півроку 6% за схемою складних відсотків. Скільки нагромадиться на рахунку через 7 років?
6. У ході судового засідання з'ясувалося, що г. *N* недоплачував податків 1000 грн. щомісяця. Податкова інспекція хоче стягнути недоплачені за останні 2 роки податки разом з відсотками (1,5% щомісяця). Яку суму повинен заплатити г. *N*?
7. У ході судового засідання з'ясувалося, що з вини Пенсійного фонду г. *N* протягом 7 років недоплачували 55 грн. пенсії щомісяця. Суд поставив за обов'язок фонду виплатити всі недоплачені гроші з відсотками (14% річних). Яка сума виплати?
8. Замініть річну ренту з річним платежем \$700 і тривалістю 10 років семирічною річною рентою. Ставка відсотка 7% у рік?
9. Замініть річну десятилітню ренту з річним платежем \$2000 на ренту з піврічним платежем по \$500. Річна ставка відсотка 9%?
10. Син у банку мав на рахунку 18000 грн., на які щомісяця нараховувалися 0,6%. Син виїхав у десятилітнє відрядження за кордон, довіривши батьку за 10 років витратити весь його рахунок. Скільки буде отримувати на місяць батько?
11. Покупець запропонував два варіанти розрахунків при покупці дачі: 1) \$7000 негайно і потім по \$1000 протягом 5 років; 2) \$10000 негайно і по \$300 протягом 5 років. Який варіант вигідніше при річній ставці відсотка: а) 11%; б) 6%?
12. Розглянемо річну ренту при n=10, i=10%. Що більше збільшить нарощену величину ренти: збільшення тривалості на 1 рік або збільшення процентної ставки на 1%?
13. Яким повинен бути платіж кінцевої річної ренти тривалістю 7 років, щоб її сучасна величина була 18000 при ставці 8%?
14. Доведіть, що нарощена величина річної ренти завжди більша її сучасної величини?
15. Нехай рента Y=1000, i=8%. Необхідно знайти тривалість ренти із сучасною вартістю ренти постнумерандо S_l=4000?

16. У потоці платежів дозволяється переставляти платежі. Як їх треба переставити, щоб потік мав найбільшу сучасну величину? Чи має це яке-небудь практичне значення?
17. Розглянемо вічну ренту з річним платежем R при ставці відсотка i. Відомо, що її сучасна величина, тобто в момент 0, дорівнює R/i. Знайдіть її величину в довільний момент $t>0$. При якому t ця величина максимальна, мінімальна?
18. Бізнесмен орендував віллу за $30000 у рік. Яка викупна ціна оренди при річній ставці відсотка 7%?
19. Чи збільшиться сучасна величина вічної ренти, якщо платежі зробити у два рази частіше, але річну процентну ставку у два рази зменшити?
20. Кредит у сумі 6 млн. грн. погашається 15 рівними щомісячними внесками. Процентна ставка по кредиту встановлена в розмірі i=1, 3, 5% на місяць. Потрібно знайти суму щомісячного внеску $Y(i)$ при платежі а) постнумерандо, б) пренумерандо?
21. Проведіть детальний аналіз ренти тривалістю 4 роки, річним платежем R=1000 грн. і змінною процентною ставкою: 5% в 2-му році, 8% – в 3-му, 10% – в 4-му році. Як визначити сучасну величину цієї ренти?
22. Нехай щорічно виплачується безстрокова рента з $Y=10^5$ грн. Потрібно знайти сучасну вартість цієї ренти постнумерандо і пренумерандо при річній ставці i=5, 10, 100%?
23. Потрібно знайти суму, яку необхідно покласти на рахунок приватного пенсійного фонду, щоб він зміг виплачувати своїм учасникам щомісяця $10{,}5^7$ фунтів стерлінгів. Для простоти приймемо, що фонд може інвестувати свої кошти по постійній ставці 0,3% на місяць?
24. Для ренти з параметрами: річна ставка відсотка – 12%, річний платіж – 400 гр. од., тривалість ренти – 6 років, за допомогою комп'ютера отримані такі її характеристики: коефіцієнти приведення і нарощення – 4,11 і 8,12; сучасна і нарощена величини – 1644,6 і 3246,1. Перевірте комп'ютерні розрахунки?
25. Клієнт бажає придбати в банку ренту із щомісячною виплатою йому, а у випадку його смерті – дружині або дітям 7000 дол. в останнійій робочий день кожного місяця протягом 40 років. При постійній ставці i=0,5; 1; 2% на місяць потрібно оцінити собівартість для банку цієї ренти на момент продажу для випадків початку виплати: а) негайно, б) відстроченої на півтора року, в) відстроченої на 4 роки?

26. Для ренти з параметрами: річний платіж – 400 гр. од., тривалість ренти – 4 роки, сучасна величина – 1200 гр. од. за допомогою комп'ютера знайдена необхідна ставка відсотка – 13% річних і заодно отримані такі її характеристики: коефіцієнти приведення і нарощення – 2,97 і 4,85; нарощена величина – 1939,9. Перевірте комп'ютерні розрахунки?

Розділ 3. Кредитні розрахунки

Позика, кредит, суда – найдавніші фінансові операції. По-латинському «creditum» означає «суда». Всі три слова – «позика», «кредит», «суда» – означають одне і теж – надання грошей або товарів у борг на умовах зворотності і, як правило, зі сплатою відсотків. Той, хто видає гроші або товари в кредит, називається кредитор, хто бере – позичальник (або дебітор). Умови видачі і погашення кредитів (позик) дуже різноманітні. Розглянемо основні і найпоширеніші способи погашення позик.

3.1. Аналіз методів погашення позик

Розглянемо існуючі методи погашення позик:

1. Погашення позики одним платежем наприкінці строку

Нехай позика D видана на n років під i складних річних відсотків. До кінця n-го року нарощена його величина стане $D\cdot(1+i)^n$. Якщо передбачається віддати позику одним платежем, то це і є розмір даного платежу. Для полегшення розрахунків можна використати таблицю мультиплікувальних множників.

Задача 1. Позика величиною 20000 грн. була видана на 8 років під 10% річних. Якщо віддати цю позику одним платежем, який розмір цього платежу?

Рішення: За таблицею мультиплікувальних множників знаходимо M(8,10)=2,144. Виходить, шуканий платіж дорівнює 20000·2,144=42880 грн.

2. Погашення основного боргу одним платежем наприкінці періоду

Сама позика називається *основним боргом*, а нарощуваний добавок – *процентними* грошима. Нехай позика D видана на n років під i складних річних відсотка. За 1-й рік процентні гроші складуть $i\cdot D$. Якщо їх виплатити, то залишиться знову тільки основний борг у розмірі D. І так будемо виплачувати наприкінці кожного року нарощені за цей рік процентні гроші $i\cdot D$. В кінці n-го, останнього, року виплати складуть величину $i\cdot D+D$ – процентні гроші за останній рік і основний борг.

3. Погашення основного боргу рівними річними виплатами

Нехай позика D видана на n років під i складних річних відсотка. При розглянутому способі його виплати наприкінці кожного року виплачується n-та частка основного боргу, тобто величина D/n. В кінці 1-го року, крім того, сплачуються відсотки із суми D, якою користувалися протягом цього року, тобто ще $i \cdot D$. Увесь платіж в кінці 1-го року дорівнює $R_1=D/n+i \cdot D$. Наприкінці 2-го року виплата складе $R_2=D/n+i \cdot (D-D/n)$ і т.ін., так що в кінці $(k+1)$-го року платіж $R_{k+1}=D/n+i \cdot (D-D/n)$. Можна бачити, що платежі R_1, R_2, ... утворять убутну арифметичну прогресію з різницею $i \cdot D/n$, першим членом $R_1=D/n+i \cdot D$ і останнім $R_n=D/n+i \cdot D/n$.

Приклад 1. Нехай D=5000, n=5, i=10%. Виплати показані на рисунку 3.1.

Сума боргу: (залишок)	5000	4000	3000	2000	1000	0
Час (рік)	0	1	2	3	4	5
Виплати:						
• основна частина:	1000	1000	1000	1000	1000	
• процентна частина:	500	400	300	200	100	
Сума виплати:	1500	1400	1300	1200	1100	

Рисунок 3.1 – Виплати основного боргу рівними річними виплатами

4. Погашення позики рівними річними виплатами

Нехай позика D видана на n років під i складних річних відсотка. При розглянутому способі його виплати наприкінці кожного року виплачується однакова сума R. Знайти її просто: ці виплати можна розглядати як річну ренту тривалості n років і річним платежем R. Прирівняємо сучасну величину цієї ренти до величини позики D. Одержимо рівняння $D=R \cdot a(n,i)$. Тоді, $R=D/a(n,i)$.

Приклад 2. Нехай D=5000, n=5, i=10%. З таблиці коефіцієнтів дисконтування ренти постнумерандо (див. додаток Г) знаходимо a(5,10)=3,791. Виходить, R=5000/3,791= 1319.

5. Погашення позики рівними виплатами кілька разів у рік

Нехай виплати розміром y проводяться m разів у році, усього виплат nm. На ці виплати нараховуються відсотки також m разів у році по ставці i/m (можна вважати, що виплати йдуть у той же банк, що дав позику, і там нараховують на них відсотки). Ці виплати утворять відповідну ренту, нарощена величина якої є $S=y \cdot s(n \cdot m,i/m)$ – див. формулу (2.10-

2.11). Нарощена величина позики є $D\cdot(1+i/m)^{nm}$ і, прирівнючи, отримаємо рівняння для визначення y: $D\cdot(1+i/m)^{nm}=y\cdot s(nm,i/m)$, звідси $y=D\cdot(1+i/m)^{nm}/s(nm,i/m)$.

6. Загальний метод погашення позики

Нехай позика величиною D видана на n років під i складних річних відсотків. У загальному випадку платежі, що погашають позику, – це сума *платежів* D_k, які йдуть на виплату основного *боргу* D, і платежів I_k, що йдуть на виплату процентних грошей, які нараховуються на залишок основного боргу після попереднього платежу. Цей метод дозволяє планувати різні схеми виплат, як уже показано вище. Зазначену властивість спочатку продемонструємо на окремому випадку.

Нехай позика видана строком на 2 роки. Наприкінці першого року було виплачено в рахунок оплати основного боргу D_1 і на весь борг D, яким користувалися протягом року, нараховані відсотки $I_1=i$ теж були виплачені, так що наприкінці першого року сумарний платіж склав D_1+i. Наприкінці другого року був виплачений залишок основного боргу $D_2=D-D_1$ і відсотки за цей рік, рівні i_2, так що сумарний платіж склав $D-D_1+i(D-Di)$. Гроші D_1+i, виплачені наприкінці першого року, за другий рік виросли до $(D_1+i)\cdot(1+i)$. У підсумку за обидва роки було виплачено з урахуванням відсотків, нарахованих за платіж наприкінці першого року, $(D_1+i)\cdot(1+i)+(D-Di)\cdot(1+i)=(1+i)\cdot(D_1+ iD+D-Di)=D\cdot(1+i)^2$, що збігається з нарощеною сумою позики за два роки. За n – років сума буде дорівнювати $D\cdot(1+i)^n$, аналогічно формулі (1.13) нарощення за n періодів складних відсотків.

3.2. Фонд погашення, споживчий і пільговий кредит

Узята позика може погашатися різними способами. Наприклад, позичальник може створити спеціальний *фонд погашення* і накопичувати на ньому кошти, щоб погасити позику єдиним платежем наприкінці строку позики. Зрозуміло, що це має сенс, якщо в позичальника є можливість одержувати на гроші фонду погашення більші відсотки, ніж ті, під які він взяв позику.

Нехай позика розміром D узята на початку року на n років під ставку i складних відсотків у рік, тоді до кінця n-го року вона виросте до $D\cdot(1+i)^n$. Платежі в фонд погашення утворять ренту з річним платежем R і річною ставкою складних відсотків $g>i$. Тоді у фонді до кінця n-

го року нагромадиться сума $R \cdot s(n,g)=R \cdot [(1+g)^n-1]/g$, з якої і буде погашена позика в $D \cdot (1+i)^n$.

Приклад 3. Нехай $D=900,\ i=4\%,\ g=8\%,\ n=10$. Після підрахунків одержуємо, що щорічний платіж у фонд погашення дорівнює 92, тоді до кінця 10-го року в погашувальному фонді нагромадиться сума 1332,2 – нарощена величина позики.

При видачі *споживчого кредиту* відразу на всю суму кредиту нараховуються прості відсотки, вони додаються до величини самого кредиту і сума всіх виплат, що погашають кредит, повинна бути рівною цій величині. Існує кілька схем погашення споживчого кредиту.

а). Рівними виплатами. Нехай кредит розміром D узятий на n років, річна ставка простих відсотків i отже, усього треба набрати виплат на суму $D \cdot (1+ni)$. Якщо в рік передбачено (договором про кредит) m виплат, то одна виплата дорівнює $D \cdot (1+ni)/nm$.

Цікаво взнати ставку складного відсотка, за якою сучасна величина виплат по кредиту дорівнює його номінальній величині. Позначимо її j. Маємо рівняння: $[D \cdot (1+ni)/mn] \cdot a(mn,j/m)=D$ або $(1+ni)=mn \cdot a(mn,j/m)$.

б). Правило 78. При цьому способі основний борг D виплачується рівними частками, а процентні гроші в розмірі ni – виплатами зменшуваними в арифметичній прогресії, і остання виплата дорівнює різниці цієї прогресії. Якщо в рік передбачено m виплат (наприклад, 12 – при щомісячних виплатах), то найостанніша виплата дорівнює d – невідомій поки різниці прогресії, а перша – mnD. Але сума всіх цих виплат $d+2d+\ldots+mnd=(1+mn) \cdot mnd/2$ повинна дорівнювати процентним грошам, тобто $(1+mn) \cdot mnd/2 = niD$, звідки можна знайти d і всі виплати процентних грошей.

Практично це роблять так. Рахують суму номерів всіх виплат $N=(1+2+\ldots+mn)=(1+mn)mn/2$ і ділять процентні гроші на N частин; далі 1-й платіж дорівнює mn таких частин, 2-й платіж буде на одну частину менше і т.ін., останній платіж дорівнює рівно одній частині. Сума номерів місяців у році 1+2+...+12 дорівнює 78, звідси і назва цього правила.

Пільговий кредит видають по пільговій ставці, меншій звичайної ставки. Фактично тим самим позичальник одержує субсидію, що розраховують як різницю відповідних сучасних сум.

Нехай кредит розміром D виданий на n років по пільговій ставці g, меншій звичайної ставки i, і буде погашатися рівними виплатами. Ці виплати утворять річну ренту. Позначимо розмір однієї виплати y, тоді сучасна величина цієї ренти дорівнює $y \cdot a(n,g)$. Звідси знайдемо: $y=D/a(n,g)$. А якби виплати йшли по звичайній ставці i, то розмір кожної виплати був би $z=D/a(n,i)$. Різниця $z-y=D/a(n,i)-D/a(n,g)$ – це щорічні втрати кредитора, а сучасна величина ренти цих втрат по діючій ставці i, тобто $(z-y) \cdot a(n,i)=[D/a(n,i)-D/a(n,g)] \cdot a(n,i)=D[1-a(n,i)/a(n,g)]$ і є субсидія кредитора позичальнику. Ця субсидія називається ще *абсолютним грант-елементом*, а величина $1-a(n,i)/a(n,g)$ – *відносним грант-елементом*. Нарощена сума абсолютного гранта-елемента або, теж саме що, нарощена сума субсидії називається *загальними втратами кредитора*.

Приклад 4. Нехай D=1000, n=8, i=8%, g=5%. Знаходимо виплати по звичайній ставці з рівняння: $y \cdot a(8, 8)=1000$, за таблицею коефіцієнтів дисконтування ренти (див. додаток Г) знаходимо: $a(8,8)=5,747$; звідси y =174. Виплати по пільговій ставці знаходимо з рівняння: $z \cdot a(8,5)=1000$, за тією ж таблицею знаходимо: $a(8,5)=6,463$; звідки z=155. Отже, щорічні втрати кредитора рівні 19. Підрахуємо відносний і абсолютний грант-елементи: $1-a(n,i)/a(n,g)$=1-5,747/6,463=0,108; 1000·0,108=108. Нарешті, загальні втрати кредитора $108 \cdot (1+0,08)^8$, за таблицею мультиплікувальних множників (див. додаток А) знаходимо $(1+0,08)^8=1,851$. Отже, загальні втрати кредитора рівні 200.

3.3. Іпотечна позика, заміна і об'єднання позик, кредит і активи

Іпотечна позика видається на 10-30 років під невеликі відсотки. Звичайно її видають під заставу майна (землі, будинку і т.ін.). У випадку неповернення позики у встановлений строк закладене майно стає власністю кредитора. Традиційна іпотечна позика погашається рівними щомісячними виплатами, на які ж щомісяця нараховуються відсотки.

Нехай номінальний розмір позики D, видана вона на строк n років під річну ставку складних відсотків i. Рівні щомісячні виплати розміром y утворять ренту із частотою платежів і нарахуванням відсотків 12 разів у рік. Отже, її нарощена величина до кінця k-го року складе $y \cdot s(12 \cdot k,i/12)$ і для визначення y маємо рівняння $y \cdot s(12 \cdot n,i/12)=D \cdot (1+i/12)^{12 \cdot n}$.

Традиційно залишок, який ще потрібно виплатити, визначають на кінець будь-якого року. Визначимо залишок r_k на кінець k-го року. До кінця k-го року нарощена величина виданої позики є $D\cdot(1+i/12)^{12\cdot k}$, а нарощена величина ренти виплат є $y\cdot s(12\cdot k,i/12)$ і, звідки, залишок r_k є $D\cdot(1+i/12)^{12\cdot k} - y\cdot s(12\cdot k, i/12)$.

Задача 2. Нехай позика в 100000 грн. видана на 20 років під 3% річних. Необхідно визначити основні характеристики позики і залишок її на кінець 10-го року?

Рішення: Певні труднощі розрахунків полягають у тому, що мультиплікувальний множник $M(240, 3/12)$, а також коефіцієнт нарощення $s(240, 3/12)$ потрібно розраховувати за формулами, а не знаходити їх у таблицях.

Отже, $M(240,1/4)=(1+0{,}0025)^{240}=1{,}8207$, $s(240,1/4)=[(1+0{,}0025)^{240}-+1]/0{,}0025 = 0{,}8207/0{,}0025=328{,}28$. Тепер можна визначити щомісячну виплату: $y=100000\cdot 1{,}8207/328{,}28=554{,}6$. Визначимо залишок позики, на кінець 10-го року. Нарощена величина позики до цього моменту є $100000\cdot M(120,1/4)=134935$, нарощена величина виконаних виплат є $554{,}6\cdot s(120,l/4)=77488$, тобто залищок дорівнює 57447 грн.

Одну *позику можна замінити іншою* за умови рівності сучасних величин потоків виплат по цих позиках.

Задача 3. Громадянин *X* протягом 5 років щокварталу повинен був виплачувати 500 грн., погашаючи взяту позику. У зв'язку з його від'їздом за кордон через два роки він попросив перерахувати величину щоквартальної виплати, щоб встигнути розрахуватися. Ставка відсотків у банку – 8% річних. Скільки потрібно заплатити громадянину *X*, щоб погасити позику за 2-роки?

Рішення. Сучасна величина поточних виплат $500\cdot a(20,8/4)= =500\cdot 16{,}351 = 8175{,}5$. Тому шуканий щоквартальний платіж R повинен задовольняти рівняння $R\cdot a(8,8/4)=8175{,}5$, звідки:

$$R=8175{,}5/7{,}325=1116{,}1 \text{ грн.}$$

Використовуючи ту ж ідею, що і у задачі 3 (наведена вище), можна кілька позик *об'єднувати в одну*. Спочатку знаходять сучасні величини залишків позик, потім ці величини додають і одержують сучасну величину позики-об'єднання. Тепер можна підібрати параметри нової позики, які влаштовують кредитора і позичальника.

Актив – це наявні товари, цінні папери, валюта і т.ін. У цілому під активом можна розуміти будь-який товар у широкому економічному смислі. Активи, як правило, приносять деякий дохід їхньому власникові. Прибутковість активу виражають у відсотках річних від ціни активу на початок року. Активи також можна віддавати в кредит, але розрахунки при цьому значно ускладнюються. Одна із причин у тому, що багато активів з часом втрачають свої якості, через які вони цінятся. Враховуючи це, власник повинен вимагати більшу процентну ставку.

Зауваження. Між кредитором і позичальником існує еквівалентність фінансових зобов'язань. Якщо обернути платежі, то сучасні або нарощені суми потоків платежів однакові (або еквівалентні – у значенні математичної еквівалентності – формула 1.38).

Розглянемо, наприклад, сплату позики рівними річними виплатами. Кредитор позичив суму *P* під *i%* річних і одержував наприкінці кожного року певну суму. Але можна сказати і по-іншому: позикодавець дає кредитору ці річні виплати в борг, а наприкінці *n*-го року кредитор повертає суму з нарощеними процентними грошима. У випадку погашення позики одним платежем наприкінці строку позики аналогічне таке міркування: позичальник дає кредитору нарощену суму в борг у майбутньому, а зараз кредитор повертає йому еквівалентну суму. Розглянута еквівалентність є окремим проявом загальної ідеї еквівалентності фінансових зобов'язань сторін при укладанні фінансових угод.

Задачі до розділу 3

1. Позика була взята під 18% річних, виплачувати залишилося щоквартала по 800 грн. протягом двох років. Через зміну ситуації в країні процентна ставка знизилася до 6% річних. У банку погодилися з необхідністю перерахування щоквартальних виплат. Який повинен бути новий розмір виплати?
2. Перевірте план погашення основного боргу рівними річними платами, що розрахований за допомогою комп'ютера:

Процентна річна ставка 8%			Величина позики 600		
Виплати	168,0	158,4	148,8	139,2	129,6
Роки	1	2	3	4	5

3. За допомогою комп'ютера знайдений розмір річної виплати 200,4 грн. при погашенні позики 800 грн. рівними річними виплатами, позика видана на 5 років при річній ставці 8%. Перевірте комп'ютерні розрахунки?
4. На покупку дачного будинку взятий споживчий кредит 75000 грн. на 12 років під 9 простих відсотків. Його потрібно погашати рівними щоквартальними виплатами. Знайти розмір цієї виплати?

5. Магазин продає телевізори на виплату на 1 рік. Відразу ж до ціни телевізора 2000 додають 10% і всю цю суму треба погасити протягом року, причому вартість телевізора гаситься рівномірно, а надбавка – за правилом 78. Знайти щомісячні виплати?
6. Позика 50000 грн. узята на 9 років під 9% річних. Погашатися буде рівними щорічними виплатами основного боргу. Знайдіть щорічні виплати?
7. Позика 32000 грн. узята на 7 років під 9% річних. Погашатися буде щорічними рівними виплатами. Знайдіть розмір цієї виплати?
8. Позика 10000 грн. узята на 10 років під 5% річних. Погашатися буде починаючи з кінця шостого року щорічними рівними виплатами. Знайдіть розмір цієї виплати?
9. До категорії пільгових позик належить безпроцентна позика. Знайдіть відносний і абсолютний грант-елементи для такої позики при D=1000, n=5, i=10%?

Розділ 4. Фінансовий аналіз інвестиційних і інших комерційних проектів

Теорія інвестицій є досить складним і дуже цікавим розділом фінансової науки. У цьому розділі ми розглянемо декілька методів аналітичної оцінки ефективності інвестиційних і інших комерційних проектів, у яких спочатку вкладаються кошти в яку-небудь сферу (виробництво, будівництво, торгівля, цінні папери і т.ін.), а потім вони поступово вертаються, приносячи інвестору до кінця строку проекту певний прибуток. Завдання інвестора – на основі наявних на момент початку проекту даних про прибутковість вкладень у різні сектори ринку і їхньому прогнозі на період реалізації проекту вибрати оптимальний варіант вкладення наявних у нього фінансових коштів. Це – складне завдання, що містить у собі ряд моментів невизначеності і ризику. Проте побудова і використання для порівняльного фінансового аналізу навіть простих теоретичних моделей дозволяє багато чого прояснити, з'ясувати зв'язки між параметрами інвестиційного проекту, припустимі діапазони їхньої зміни і т.ін. Звичайно, використання теоретичних моделей для фінансового аналізу реальних проектів не може замінити досвіду і інтуїції професіоналів, а лише допомагає їм прийняти правильне рішення.

У фінансовому аналізі, як і в інших галузях науки і практики, доцільно йти від простих моделей до більш складних, враховуючи велику кількість факторів і параметрів. При цьому розраховані на широке застосування моделі не повинні бути занадто складними. Навіть прості моделі разом з експертними оцінками динаміки майбутніх значень основних макроекономічних і галузевих показників дозволяють одержати песимістичну, оптимістичну і якусь середню очікувану оцінку прибутковості розглянутого проекту.

Використання ймовірносно-статистичних методів і статистичного моделювання на ЕОМ робить прогноз більш точним, але і більш складним. Вибір методів значною мірою залежить від вартості, тривалості і значимості проекту. Однак при всіх обставинах вивчення інвестицій повинно починатися з найпростіших і прозорих аналітичних моделей, що дозволяють з'ясувати сутність проблеми за допомогою найбільш простого математичного апарату, досліджуваного ще в середній школі.

При цьому в програму середніх шкіл як з математичним, так і з економічним нахилом необхідно включати початок теорії ймовірностей і математичної статистики, як це фактично часто і робиться. Однак за винятком одного простого прикладу, п. 5.1 ми не будемо використовувати ймовірнісні поняття і обмежимося тільки детермінованими моделями.

Для цього насамперед необхідно побудувати модель детермінованого потоку грошових витрат і надходжень у розглянутому інвестиційному проекті з різними за величиною і знаком платежами. Ідучи від простого до більш складного, розглянемо спочатку дискретні в часі, а потім – безперервні і дискретно-безперервні моделі потоку платежів (cash flow, тобто буквально – потік готівки).

4.1. Моделі потоку платежів

1. Модель дискретного потоку платежів

У цьому підрозділі ми узагальнимо моделі рентних потоків платежів, які наведені в розділі 2.

Нехай деякий інвестиційний проект (скорочено *ІП*) починається в момент $t_0=0$ з капіталовкладення в розмірі $x(0)$ гр. од., а потім у моменти $t_1, t_2,...t_n$, $0=t_0<t_1<t_2<...<t_n$, відбувається витрата $x(t_s)$ і/або надходження $y(t_s)$ гр. од., s=1,2,...,n. Ці дві операції часто називають *транзакцією*, і в бухгалтерській книзі обидві вони записуються зі знаком плюс, але в різні графи. Таким чином, можна сказати, що в момент 0 відбувається тільки одна транзакція, а в кожний момент $t_1,t_2,...,t_n$ відбувається або одна, або дві транзакції.

Наприклад, у випадку, коли фінансова звітність готується щомісяця, а інфляція є помірною, так що всі платежі можна при розрахунках віднести на кінець відповідного місяця, то природно як базову одиницю можна вибрати один місяць. Тоді n – період проекту в місяцях, $t_s=j$ – моменти платежів, а $x(s)$ і $y(s)$ означають відповідно витрати і надходження за місяць s від початку проекту, $s=1,2,..., n$.

Оскільки як платежі, так і звітність по них за період проекту можуть проводитися через різні інтервали часу, то будемо надалі, якщо не обговорено протилежне, вимірювати час у роках, а відстань $t_s–t_{s-1}$ уважати довільною.

Введемо тепер вектори:

$$\vec{t}=(0, t_1, t_2, \dots t_n), \tag{4.1}$$

$$\vec{x}=(x(0), x(t_1), x(t_2), \dots ,x(t_n)), \tag{4.2}$$

$$\vec{y}=(0, y(t), y(t_2), \dots, y(t_n)), \tag{4.3}$$

а потоки витрат і надходжень позначимо відповідно через $\pi(\vec{t},\vec{x})$ і $\pi(\vec{t},\vec{y})$.

Тоді приведені до моменту *0*, тобто сучасні вартості (Present Value = PV) цих потоків відповідно рівні:

$$PV\pi(\vec{t},\vec{x}) = x(0) + \sum_{s=1}^{n} x(t_s)\cdot\upsilon(t_s), \tag{4.4}$$

$$PV\pi(\vec{t},\vec{y}) = \sum_{s=1}^{n} y(t_s)\cdot\upsilon(t_s), \tag{4.5}$$

де $\upsilon(t_s)$ – коефіцієнт дисконту на інтервалі $(0,t_s)$.

Будемо проводити фінансовий аналіз для інвестора, тобто вважати його витрати негативними величинами, а надходження – позитивними. Тоді $C(0)=-\ x(0)$ – початкова інвестиція, а $C(t_s)=y(t_s)-x(t_s)$ – нетто-платіж інвестора в момент t_s, тобто $C(t_s)<0$ означає платежі інвестора, а $C(t_s)>0$ – надходження на його рахунок, $s=1,2,...,n$. Тепер замість двох потоків платежів досить розглянути один нетто-потік $\pi(\vec{t},\vec{C})$, де $\vec{C}=(C(0),\ C(t_1),\ C(t_2),...,\ C(t_n))$. Чиста сучасна вартість (Netto Present Value = NPV) цього потоку складе:

$$NVP\pi(\vec{t},\vec{C}) = PV\pi(\vec{t},\vec{y}) - PV\pi(\vec{t},\vec{x}) = -x(0) + \sum_{s=1}^{n} C(t_s)\cdot\upsilon(t_s). \tag{4.6}$$

Аналогічним чином, чисте нарощене значення (Netto Accumulated Value = NAV) потоку $\pi(\vec{t},\vec{C})$ на будь-який момент $t>0$ складе:

$$NAV_t\pi(\vec{t},\vec{C}) = \sum_{s:t_s\le t} C(t_s)\cdot A(t_s,t). \tag{4.7}$$

Тут $A(t_s,t)$ – коефіцієнт нарощення на інтервалі (t_s,t), $t_s<t$, а $\sum\limits_{s:t_s\le t}$ означає, що підсумовування проводиться по всіх транзакціях, що відбулися до моменту t включно.

Зокрема, при $T\ge t_n$ одержимо з (4.7) чисте нарощене значення всіх платежів потоку:

$$NAV_T \pi(\vec{t}, \vec{C}) = \sum_{s=0}^{n} C(t_s) \cdot A(t_s, T). \tag{4.8}$$

Задача 1. Аналізується пропозиція про вкладення коштів у деякий трирічний інвестиційний фінансовий проект, у якому передбачається дохід за перший рік 125, за другий – 150, за третій – 160 умовних грошових одиниць (тут і далі одна умовна грошова одиниця може дорівнювати зручної для розглянутого прикладу сумі – 1 тис. грн.; 1 млн. дол. і т.ін.). Надходження відбуваються наприкінці відповідного року, а ефективна процентна ставка прогнозується на перший рік – 20%, на другий – 35, на третій – 40% річних. Чи є ця пропозиція вигідною у порівнянні зі середньоринковими умовами, якщо в проект потрібно вкласти початкові капіталовкладення в розмірі: 1) 235; 2) 265; 3) 280 умовних гр. од.?

Рішення: Щоб відповісти на це питання, обчислимо спочатку за допомогою виведених вище формул сучасну вартість потоку доходів за три роки (в умовних гр. од.):

$$PV\pi(\vec{t}, \vec{y}) = \frac{125}{1{,}20} + \frac{150}{1{,}20 \cdot 1{,}35} + \frac{160}{1{,}20 \cdot 1{,}35 \cdot 1{,}40} = 104{,}17 + 92{,}59 + 68{,}76 = 265{,}52.$$

Тоді чисте сучасне значення цього потоку платежів у силу формули (4.6) складе: 1) 30,52; 2) 0,52; 3) -14,48 умовних гр. од.

Отже, перше наближення краще середньоринкових умов, друге – приблизно відповідає середньоринковим умовам, а третє – гірше і його треба безумовно відкинути. Питання про те, чи варто прийняти першу пропозицію, залежить від альтернативних можливостей інвестування коштів.

Помітимо, що під середньоринковими або макроекономічними умовами тут розуміється рівень прибутковості, що переважає на ринку в момент аналізу вигідності інвестиційних проектів. При цьому для визначення коротко-термінових ринкових ставок прибутковості найчастіше орієнтуються на відповідні по строках ставки банківського відсотка, а для середньострокових і довгострокових інвестицій – на звичайно більш помірні показники прибутковості по державних цінних паперах з відповідними строками погашення. Це в першу чергу належить до чисто фінансових проектів інвестицій у цінні папери. Якщо ж аналізується проект інвестицій у виробництво, будівництво або торгівлю, то необхідно використовувати також середньогалузеві показники прибутковості аналогічних за класом підприємств.

Нагадаємо тепер, що завжди:

$$A(t,t) = \upsilon(0) = 1, \quad t > 0, \tag{4.9}$$

і що при безперервному нарахуванні відсотків з інтенсивністю *δ(t)* у рік:

$$A(t_j, t) = \exp\left\{ \int_{t_j}^{t} \delta(s)ds \right\}, \tag{4.10}$$

$$\upsilon(t_j) = \exp\left\{ -\int_{0}^{t_j} \delta(s)ds \right\}. \tag{4.11}$$

При постійній інтенсивності $\delta(t)=\delta=\ln(1+i)$, $t \in (0, t_n)$, коефіцієнти нарощення і дисконтування залежать лише від довжини τ відповідного інтервалу:

$$A(\tau) = e^{\delta\tau} = (1+i)^{\tau}, \tag{4.12}$$

$$\upsilon(\tau) = \frac{1}{A(\tau)} = e^{-\delta\tau}. \tag{4.13}$$

У цьому випадку формули (4.6)-(4.8) приймають особливо простий вигляд:

$$NPV\pi(\vec{t}, \vec{C}) = -x(0) + \sum_{s=1}^{n} C(t_s) \cdot e^{-\delta t_s}, \tag{4.14}$$

$$NAV_t\pi(\vec{t}, \vec{C}) = \sum_{s:t_{s \le t}} C(t_s) \cdot e^{(t-t_s)^{\delta}}, \tag{4.15}$$

$$NAV_T\pi(\vec{t}, \vec{C}) = \sum_{s=1}^{n} C(t_s) \cdot e^{(T-t_s)\delta}, T \ge t_n. \tag{4.16}$$

В ілюстративних прикладах ми будемо, як правило, для простоти розглядати саме цей випадок, коли *δ(t)=const*. Однак якщо при аналізі проекту є можливість задати *δ(t),* наприклад, у вигляді кусково-постійної або кусково-лінійної функції, то варто скористатися формулами (4.6)-(4.11) Це дозволить одержати більш реальний прогноз для NPV і NAV розглянутого потоку.

2. Модель безперервного потоку платежів

У комерційній практиці часто зустрічається випадок, коли в деякій фірмі поряд з великими і рідкими (наприклад, раз на місяць) платежами відбуваються часті (наприклад, щоденні), але порівняно невеликі грошові витрати і надходження. Якщо баланс грошових надходжень підраховується також часто, то ці порівняно невеликі і часті платежі можна при теоретичному фінансовому аналізі описати за допомогою моделі безперервного потоку платежів. При помірному значенні ефективної ставки $i=e^{\delta}-1$ це призведе до невеликої методичної похибки в підрахунку NPV_t π, а розрахунки стануть більш прозорими і простими. При цьому треба врахувати, що набагато більші похибки в прогнозі NPV_t π, для розглянутого проекту вносять звичайно помилки в оцінку величини майбутніх платежів і найефективнішої ставки i. Тому наступним кроком є перехід від розглянутої в цьому розділі детерміністської моделі до більш складної, але зате і більш гнучкої ймовірнісно-статистичної моделі, яку ми тут розглядати не будемо.

Приймемо, що базовою одиницею часу є рік і що на інтервалі $[0,T]$ витрати проводяться безупинно з інтенсивністю $p_-(t)$ гр. од. у рік, а платежі надходять безупинно з інтенсивністю $p_+(t)$ гр. од. у рік, $t\in[0,T]$. Для простоти запису приймемо, що обидві інтенсивності є безперервними функціями часу, хоча всі подальші результати легко поширюються і на випадок кусково-безперервних інтенсивностей.

Підсумовуючи платежі з урахуванням їх знаків з позиції інвестора, одержимо:

$$p(t) = p_+(t) - p_-(t) \text{ (гр. од. у рік)} \tag{4.17}$$

– безперервна інтенсивність нетто-потоку платежів у момент $t\in[0,T]$. Тому величина платежу на малому інтервалі $(t, t+\Delta t)$ приблизно складе:

$$p(t)\cdot \Delta t=p_+(t)\cdot \Delta t - p_-(t)\cdot \Delta t \text{ (гр. од.)}. \tag{4.18}$$

При цьому $p(t)<0$ відповідає витраті, $p(t)>0$ надходженню, а $p(t)=0$ – відсутності як витрат, так і надходжень в околі моменту t.

З курсу математичного аналізу слідує, що при зроблених припущеннях сума $M(t)$ всіх платежів на інтервалі $(0,t)$, $t \le T$, дорівнює:

$$M(t) = \int_0^t p(s)ds, \quad (4.19)$$

а на інтервалі *(t, t+τ), 0≤ t<t+τ≤ T*, становить:

$$M(t + \tau) - M(t) = \int_t^{t+\tau} M'(s)ds = \int_t^{t+\tau} p(s)ds\,. \quad (4.20)$$

Якщо $\tau=\Delta t$, то на інтервалі $(t,\ t+\Delta t)$ сумарний платіж становить $M(t+\Delta t)-M(t)$, і якщо Δt мале, а *p(t)* безперервна на цьому інтервалі, то:

$$M(t + \Delta t) - M(t) \approx M'(t)\cdot\Delta t = p(t)\cdot\Delta t \text{ гр. од.} \quad (4.21)$$

Тому дисконтоване на момент *0* значення платежу на $(t,\ t+\Delta t)$ приблизно дорівнює $\upsilon(t)\cdot p(t)\cdot\Delta t$, а після підсумовування по всьому інтервалі (*0,T*) і переході до межі при $\Delta t\to 0$ одержимо дисконтоване значення всього безперервного потоку $\pi\cdot[p(t),\ t<T]$ нетто-платежів:

$$NPV\cdot\pi[p(t), t < T] = NPV\cdot\pi[p_+(t), t < T] - NPV\cdot\pi[p_-(t), t < T] = \int_0^T p(t)\cdot\upsilon(t)dt. \quad (4.22)$$

Таким чином, модель безперервного потоку платежів дозволяє аналізувати ті етапи інвестиційного проекту, коли не було значних вкладень або надходжень. Вона придатна також для коротко- і середньострокового аналізу інших видів комерційної діяльності із двосторонніми частими і невеликими платежами. При цьому за базову одиницю часу – особливо в умовах інфляції – можна прийняти не рік, а більш короткий інтервал – добу, тиждень або місяць.

Звичайно, тоді значення всіх параметрів варто перерахувати на знову обрану базову одиницю часу.

3. Модель безперервно-дискретного потоку платежів

Для середньо- і довгострокових проектів рух потоку готівки часто носить змішаний характер – поряд з окремими великими платежами існують інтервали, на яких платежі можна вважати безперервними. Для опису такого дискретно-безперервного потоку на інтервалі [*0, T*] проекту необхідно задати:

а) послідовність $\vec{t}=(0,\ t_1,\ t_2,\dots,\ t_n)$, $0=t_o<t_1<t_2<\dots <t_n \le T$, моментів і послідовність $\vec{C}=(C(0),\ C(t_1),\ C(t_2),\dots,C(t_n))$ сум платежів у ці моменти;

б) вказати підінтервали всередині $[0,T]$, на яких інтенсивність $p(t)$ безперервних платежів відмінна від 0. Тоді в силу формул (4.6) і (4.22) чиста приведена на момент 0 вартість змішаного дискретно-безперервного потоку платежів складе:

$$NPV \cdot \pi\left[\vec{t},\vec{C};p(t),t<T\right]=\sum_{s=0}^{n} C(t_s)\cdot \upsilon(t_s)+\int_0^T \upsilon(s)\cdot p(s)ds. \quad (4.23)$$

Аналогічним чином, чисте нарощене значення цього потоку на будь-який момент $t\in[0,T]$ складе:

$$NAV_t \cdot \pi\left[\vec{t},\vec{C};p(t)\right]=\sum_{s:t_{s\le t}} C(t_s)\cdot A(t_s,t)+\int_0^t A(s,t)\cdot p(s)ds, \quad (4.24)$$

де $A(s,\ t)$ – коефіцієнт нарощення на інтервалі (s,t).

4. Зв'язки коефіцієнтів у моделях потоку платежів

Якщо $\delta(t)$ на $[0,\ T]$ – невід'ємна змінна інтенсивність відсотка за базову одиницю часу, що починається в момент t, то при $0\le t_1<t_2\le T$:

$$A(t_1,t_2)=\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\right\} \quad (4.25)$$

– коефіцієнт нарощення однієї грошової одиниці на інтервалі $(t_1,\ t_2)$ при русі по ньому зліва направо, а

$$d(t_1,t_2)=\exp\cdot\left\{-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\right\} \quad (4.26)$$

– коефіцієнт дисконтування однієї грошової одиниці з моменту t_2 на момент t_1, тобто при русі по інтервалу $(t_1,\ t_2)$ справа наліво. З курсу математичного аналізу відомо, що при $\beta<a$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t)dt = -\int_{\beta}^{\alpha} \delta(t)dt < 0. \qquad (4.27)$$

Тому (4.25)-(4.26) при $t_1 < t_2$ спричиняють такі рівності:

$$A(t_1,t_2) = \frac{1}{d(t_1,t_2)} = d(t_2,t_1), \qquad (4.28)$$

$$A(t_2,t_1) = \frac{1}{d(t_2,t_1)} = d(t_1,t_2). \qquad (4.29)$$

Якщо ж $t_1 > t_2$, то коефіцієнт нарощення $A(t_2,t_1)$ відіграє роль коефіцієнта дисконтування $d(t_1,t_2)$ і в силу (4.25) і (4.27) збігається з ним. Аналогічним чином, при $t_1 < t_2$ коефіцієнт дисконтування $d(t_1,t_2)$ відіграє роль коефіцієнта нарощення $A(t_2,t_1)$ і в силу (4.26) і (4.27) збігається з ним. Тому формули (4.25)-(4.26) і (4.28)-(4.29) справедливі як при $t_1 < t_2$, так і при $t_1 > t_2$.

Помітимо тепер, що оскільки в розглянутому випадку

$$d(0,t) = \exp\left\{-\int_0^t \delta(s)ds\right\} := \upsilon(t)$$

і завжди

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)ds = \int_0^{t_2} \delta(s)ds - \int_0^{t_1} \delta(s)ds,$$

то (4.25), (4.26) при будь-яких t_1 і t_2 можна записати у вигляді:

$$A(t_1,t_2) = \frac{\upsilon(t_1)}{\upsilon(t_2)}, \quad d(t_1,t_2) = \frac{\upsilon(t_2)}{\upsilon(t_1)}. \qquad (4.30)$$

Звідси також слідує справедливість (4.28), (4.29).

Таким чином, коефіцієнти нарощення і дисконтування взаємозамінні і з математичної точки зору можна було б користуватися тільки одним з них. Однак в інтересах наочності прийнято користуватися двома коефіцієнтами.

5. Зрівнювальний час у моделях потоку платежів

Боржник зобов'язався погасити свій борг послідовними платежами величиною $x_1, x_2, ..., x_n$ у моменти відповідно $t_1, t_2, …, t_n$. Отже, мова йде про однобічний потік платежів $\pi(\vec{t}, \vec{x})$. Позначимо суму всіх недисконтованих платежів через $x = \sum_{s=1}^{n} x_s$, а вагу s-го платежу – через $w_s = x_s/x$, $\sum_{s=1}^{n} w_s = 1$.

Боржник пропонує кредитору погасити свою заборгованість одним платежем суми x у момент:

$$t^* = \sum_{s=1}^{n} w_s t_s, \tag{4.31}$$

який є зваженим середнім арифметичним для моментів всіх виплат. Оскільки в (4.31) не входить процентна ставка, то кредитор пропонує боржнику здійснити платіж x у момент T, визначений з умови еквівалентності потоків платежів $\pi(\vec{t}, \vec{x})$ і $\pi(T, x)$ при відомому δ:

$$\sum_{s=1}^{n} x_s \cdot e^{-\delta t_s} = x e^{-\delta T}. \tag{4.32}$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на x, знайдемо з нього T у вигляді:

$$T = -\frac{1}{\delta} \cdot \ln\left(\sum_{s=1}^{n} w_s e^{-\delta t_s}\right). \tag{4.33}$$

Величина T називається *зрівнювальним часом,* для даного потоку платежів при *фіксованому* δ.

Теорема 1. Якщо $\delta > 0$, то $t^* > T$, тобто t^* вигідніше для боржника, а T – для кредитора.

Доведення. Для спрощення доведення виберемо таку грошову одиницю, щоб всі x_s, були цілими числами. Тоді в лівій частині рівності

(2.23) кожний елемент $x_s e^{-\delta t_s}$, *s=1,2,...,* *n*, можна представити у вигляді суми x_s, однакових додатних чисел $e^{-\delta t_s}$, загальне число яких у сумі (2.23) буде *x*, а їх середнє арифметичне дорівнює $\sum_{s=1}^{n} w_s \cdot e^{-\delta t_s}$, або в силу (4.32) $e^{-\delta T}$.

Оскільки відомо, що середнє арифметичне будь-яких $n \geq 2$ додатних чисел завжди більше або дорівнює їх середньому геометричному (перевірте, що $(y_1 + y_2)/2 \geq \sqrt{y_1 y_2}, (y_1 + y_2 + y_3)/3 \geq \sqrt[3]{y_1 y_2 y_3}$ і рівність можлива лише при рівності всіх *n* чисел групи), то:

$$e^{-\delta T} = \frac{1}{x} \sum_{s=1}^{n} x_s \cdot e^{-\delta t_s} > \left(\prod_{s=1}^{n} e^{-\delta t_s x_s} \right)^{1/x} = \exp\left\{ -\delta \sum_{s=1}^{n} w_s \cdot t_s \right\} = e^{-\delta t^*}. \quad (4.34)$$

Тому що $e^{-\delta T} > e^{-\delta t^*}$, то $t^* > T$ при $\delta > 0$.

Помітимо, що оскільки t^* не залежить від *δ*, то t^* можна використовувати як наближену оцінку для *T*, похибка якої залежить від *δ*.

4.2. Внутрішня норма прибутковості інвестиційного проекту

Економічний аналіз ефективності планованих середньострокових і особливо довгострокових інвестицій є складним завданням. Для вибору найкращих об'єктів і варіантів вкладення коштів в усьому світі використовуються кілька методик. Найчастіше вони основані на використанні таких чотирьох показників для порівняння варіантів інвестицій:

1) *чиста поточна вартість,*
2) *внутрішня норма прибутковості,*
3) *період окупності,*
4) *індекс рентабельності.*

Першим показником є розглянута в попередньому підрозділі *чиста поточна вартість* проекту, що збігається з NPV породжуваного проектом потоку платежів. Дійсно, від’ємне значення NPV говорить про недоцільність для інвестора розглядати варіант потоку платежів $\pi(\vec{t}, \vec{C}; p(t), t < T)$ при даному наборі значень $\vec{t}, \vec{C}, p(t)$ і ефективній річній ставці *i*. Серед варіантів з додатним NPV π природно вибрати той, у якого NPV π більше. Однак цей кращий по NPV π варіант треба ще порівняти з варіантом вкладення коштів на банківський депозит, що може виявитися більш рентабельним і до того ж менш ризикованим.

Для цієї мети служить другий показник – *внутрішня норма прибутковості* (Internal Rate of Return = IRR):

$$i_0 = e^{\delta_0} - 1, \tag{4.35}$$

де i_0 є коренем рівняння:

$$f(i) = NPV\pi = \sum_{s=0}^{n} \frac{C(t_s)}{(1+i)^{t_s}} + \int_0^T \frac{p(t)}{(1+i)^t} dt = 0, \quad i>0. \tag{4.36}$$

Це рівняння називається *рівнянням вартості* або *рівнянням прибутковості* для проекту на момент *0*.

Зміст рівняння (4.36) полягає в тому, що приведені на момент $t_0=0$ початку проекту значення потоків витрат і доходів збігаються, тобто проект є безприбутковим.

Якщо в рівнянні $f(i)=0$ існує єдиний додатний корінь i_0, то його називають ставкою прибутковості проекту або *внутрішньою нормою прибутковості (IRR)* за базову одиницю часу.

Якщо $i_0<i$, де i – ефективна ринкова ставка відсотка, то відповідний проект потрібно відкинути, а якщо $i_o>i$ – відповідний проект у принципі можна прийняти, вибравши із всіх варіантів проект із найбільшим значенням i_o. Таким чином, економічне завдання вимагає вирішення чисто математичного завдання – знаходження коренів рівняння (4.36).

Очевидно, що якщо потік π платежів заданий, то:

$$f(0) = \sum_{s=0}^{n} C(t_s) + \int_0^T p(t)dt \tag{4.37}$$

– недисконтована сума всіх нетто-платежів за строк проекту. При цьому з фінансового смислу слідує, що потрібно відкинути всі варіанти з $f(0)\leq 0$ і розглядати лише варіанти, для яких $f(0)>0$.

Далі, при дуже великих значеннях i маємо:

$$f(\infty) = \lim_{i\to\infty} f(i) = C(0) = -x(0) < 0, \tag{4.38}$$

де $C(0)$ – початкова інвестиція.

Розглянемо декілька прикладів знаходження i_0, почавши із проектів з дискретними потоками платежів. Спочатку наведемо найпростіший приклад, у якому i_0 визначається не чисельним методом, а аналітично.

Приклад 1. а) нехай у момент 0 інвестор вкладає в деякий проект суму X гр. од., розраховуючи одержувати наприкінці кожного року $1,2,...n$, постійну суму jX, а наприкінці року n повернути і суму X.

Тут j відіграє роль норми прибутковості за один рік. Обчислимо i_0 аналітично. Для цього дискретного джерела платежів рівняння вартості (4.36) приймає вигляд полінома від υ:

$$f(i) = -X + jX\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^s} + \frac{X}{(1+i)^n} = -X + jX\sum_{s=1}^{n}\upsilon^s + X\upsilon^n = 0, \qquad (4.39)$$

де $\upsilon=(1+i)^{-1}$ – коефіцієнт дисконтування. Оскільки

$$\sum_{s=1}^{n}\upsilon^s = \upsilon\cdot\frac{1-\upsilon^n}{1-\upsilon} = \frac{1-\upsilon^n}{i},$$

то після підстановки і ділення обох частин рівняння (4.39) на $X>0$ одержимо:

$$-1 + j\cdot\frac{1-\upsilon^n}{i} + \upsilon^n = 0. \qquad (4.40)$$

Очевидно, що $i_0=j$ – єдиний корінь цього полінома і, отже, є внутрішньою нормою прибутковості відповідного проекту.

б) цей приклад можна інтерпретувати і як схему погашення боргу в X гр. од., узятого на n років по річній ставці j, з умовою виплати наприкінці кожного року $1,2,..., n$ відсотків у сумі jX і поверненням наприкінці року n початкової суми X боргу (рисунок 4.1).

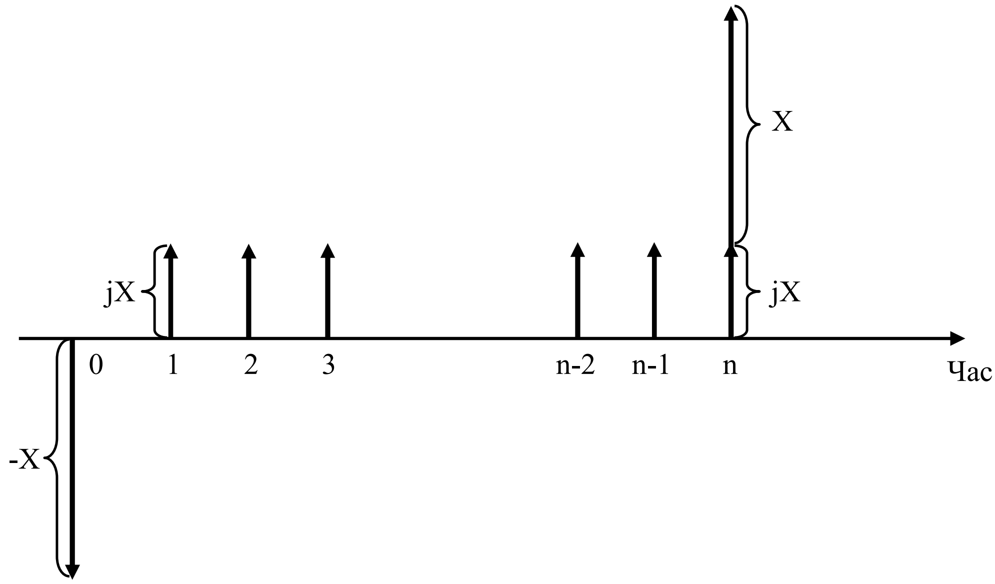


Рисунок 4.1 – Ілюстрація до прикладу 1.б

Тоді за допомогою ренти постнумерандо (4.39) можна записати у вигляді:

$$X = jX \cdot a_{n\neg i} + X\upsilon^n.$$

Скорочуючи обидві частини рівності на $X>0$, одержуємо формулу (2.21), еквівалентну формулі (4.40).

Наведемо тепер без доведення дві теореми які для дискретного потоку платежів містять достатні умови існування внутрішньої норми прибутковості i_0.

*Теорема 2***.** Якщо всі негативні платежі передують всім позитивним або навпаки, то i_0 визначено.

Теорема 3. (Узагальнює попередню). Нехай $t_0<t_1< ...<t_n$ і

$$C_m = \sum_{s=1}^{m} C(t_s),\ m=1,2,\ldots n, \qquad (4.41)$$

– накопичена сума всіх нетто-платежів інвестора від моменту *0* до моменту t_m включно.

Якщо $C\neq0$, $C_n\neq0$ і якщо після винятку нульових значень послідовність $(C, C_1,..., C_n,)$ має рівно одну зміну знака, то рівняння прибутковості (4.36) має єдиний позитивний корінь, тобто i_0 визначено.

Відзначимо, що потік платежів у прикладі 1 задовольняє умови теореми 2. Для більш складних дискретних потоків платежів роботу із знаходження коренів рівняння вартості варто починати з перевірки виконання умов теорем 2 і 3.

Відзначимо, що рівняння вартості *f(i)=0* можна записати у вигляді: $(1+i)^{t_n} \cdot f(i)=0$ і звести задача до знаходження коренів багаточлена із цілими степенями від змінної $x=1+i$ або $y=\upsilon$, якщо вибрати базову одиницю так, щоб всі $t_1,t_2,...,t_n$ були цілими числами. Для цього достатньо прийняти за базову од. часу замість року, наприклад, квартал або місяць, а потім перейти від отриманого кореня i_0 для базової од. часу до ефективного річного IRR.

Приклад 2. Інвестор вкладає 5 ум. гр. од. у момент *0*, потім 2 ум. гр. од. через 2 роки і одержує 10 ум. гр. од. через 5 років. Потрібно знайти IRR для цього проекту.

Рішення: Виберемо за базову од. часу *1* рік. Рівняння вартості на момент *0* для цього проекту має вигляд:

$$f(i) = -5 - 2\cdot(1+i)^{-2} + 10\cdot(1+i)^{-5} = -5 - 2\cdot\upsilon^2 + 10\cdot\upsilon^5 = 0. \qquad (4.42)$$

Побудуємо тепер таблицю 4.1 значень *f(i)* для *i* від 0,00 до 0,10 з інтервалами 0,01.

Таблиця 4.1

i	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
f(i)	3	2,55	2,14	1,74	1,37	1,02	0,69	0,38	0,091	-0,184	-0,44

У силу теореми 3 рівняння вартості (4.42) має єдиний додатний корінь i_0. Оскільки *f(0,08)>0,* а *f(0,09)<0,* скористаємося лінійною інтерполяцією із кроком *0,01*:

$$i_0^{(1)} = 0{,}08 + \frac{f(0{,}08)}{f(0{,}08) + |f(0{,}09|} \cdot (0{,}09 - 0{,}08) = 0{,}0833.$$

Якщо потрібна більша точність, то можна перейти до кроку 0,005 або скористатися іншими чисельними методами. У цьому прикладі більш точне значення i_0=8,3248%.

Замість (4.42) можна шукати корінь еквівалентного йому рівняння вартості на момент 5:

$$(1+i)^5 \cdot f(i) = -5\cdot(1+i)^5 - 2\cdot(1+i)^3 + 10 = 0.$$

Фінансовий смисл внутрішньої норми i_0 прибутковості проекту полягає в тому, що при вкладенні на банківський депозит сьогодні 5 ум.

гр. од. на 5 років і через 2 роки ще 2 ум. гр. од. на 3 роки при постійній річній ставці інвестор також одержить 10 ум. гр. од. через 5 років.

Приклад 3. Нехай деякому інвестиційному проекту відповідає такий потік нетто-платежів:

Таблиця 4.2

t_s	0	1	2	3	4
$C(t_s)$	–5	1	–3	8	4

Потрібно знайти *IRR*

Рішення: Насамперед складемо таблицю накопиченого потоку нетто-платежів:

Таблиця 4.3

m	0	1	2	3	4
C_m	–5	–4	–7	1	5

Тому що накопичений потік нетто-платежів має тільки одну зміну знака, то в силу теореми 3 рівняння вартості:

$$f(i) = -5 + \frac{1}{1+i} - \frac{3}{(1+i)^2} + \frac{8}{(1+i)^3} + \frac{4}{(1+i)^4} = 0$$

має єдиний додатний корінь i_0. Складаючи таблицю значень $f(i)$ для i від 0 до 0,50 спочатку із кроком 0,05, а потім для i від 0,20 до 0,25 із кроком 0,01, переконуємося, що корінь лежить між 0,22 і 0,23. Удаючись до процедури лінійної інтерполяції із кроком 0,005, одержимо i_0=0,2211.

Приклад 4. Розглянемо тепер проект, реалізація якого потребує T=13 років і припускає такий кусково-безперервний потік нетто-платежів (у тис. дол.):

$$C(0) = -20, \qquad C(1) = -10, \qquad C(13) = 6;$$
$$p(t)=3, \qquad 3 \le t \le 13.$$

Для наочності зобразимо цей потік платежів на рисунку 4.2.

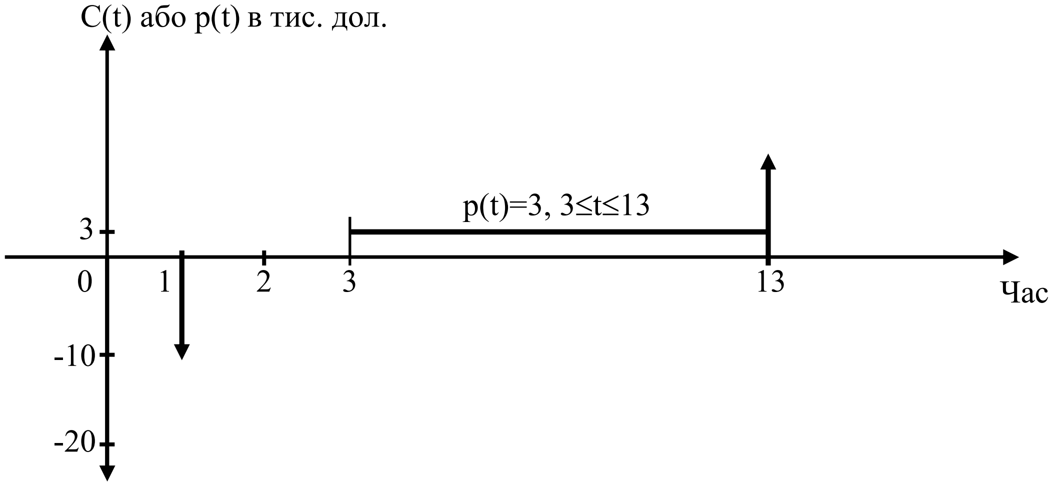


Рисунок 4.2 – Ілюстрація до прикладу 4

Рівняння прибутковості (4.36) для даного проекту при $i>0$ має вигляд:

$$f(i) = -20 - \frac{10}{1+i} + 3 \cdot \int_{3}^{13} \cdot \frac{dt}{(1+i)^{t}} + \frac{6}{(1+i)^{13}} =$$

$$= -20 - \frac{10}{1+i} + \frac{3}{\ln \cdot (1+i)} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^{3}} - \frac{1}{(1+i)^{13}} \right] + \frac{6}{(1+i)^{13}}.$$

Тут $f(0)$=–20–10+30+6=6, і оскільки $f(i)$ з ростом i монотонно убуває, то в $f(i)$ існує єдиний корінь i_0. Графік функції $f(i)$ при $0 \le i \le 0{,}05$ наводиться на рисунку 4.3.

Лінійна інтерполяція між f(0,020) і f(0,025) дає для i_0 наближене значення 0,022.

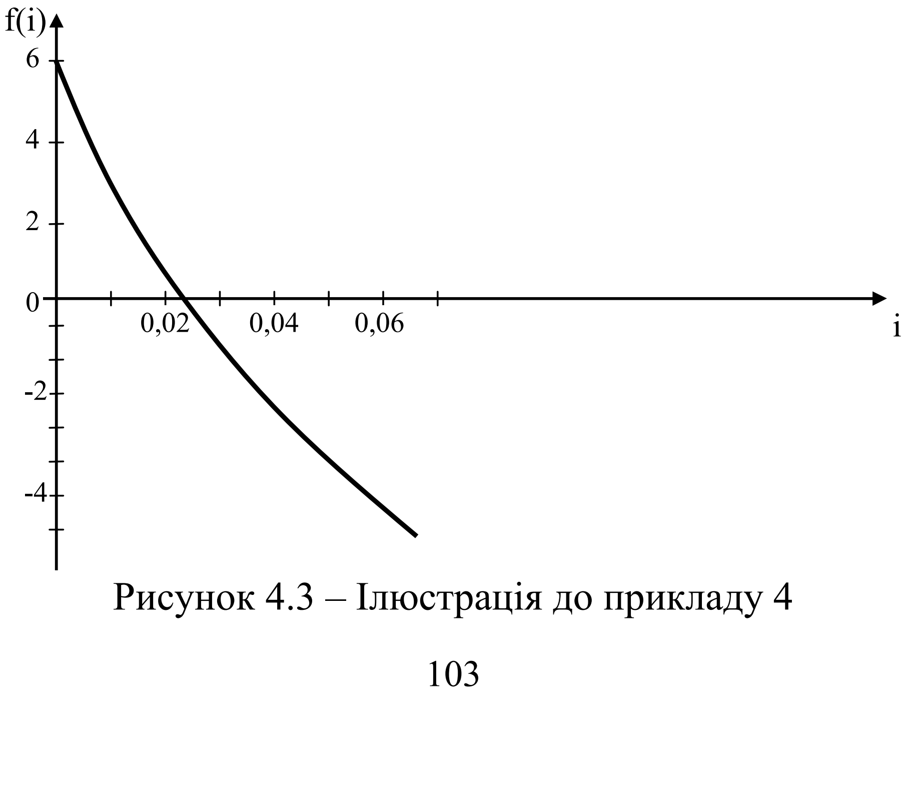


Рисунок 4.3 – Ілюстрація до прикладу 4

4.3. Строк окупності капіталовкладень і індекс рентабельності

Розглянемо ще два показники ефективності інвестиційних проектів і обговоримо методику їх застосування.

1. Строк окупності капіталовкладень

Третім показником при аналізі інвестиційних проектів (перші два розглянуті в п. 4.1 і 4.2.) є *строк окупності капіталовкладень* (payback period), за який можна повернути інвестовані в проект кошти. У своєму найпростішому варіанті цей показник не враховує фактор часу, тобто грошові суми не приводяться до одного моменту часу.

Розглянемо випадок дискретних потоків платежів і приймемо, що всі платежі віднесені до середини місяця (або іншої базової од. часу, наприклад кварталу або року), причому інвестиції проводяться в перші $L+1$ місяці, а потім ідуть дохідні місяці:

$$\overbrace{C_{0,}C_{1,}C_{2,}\dots,C_{L,}}^{\text{інвестиції}}\overbrace{C_{L+1,}C_{L+2,}\dots,C_{n.}}^{\text{чистий дохід}}$$

Тоді загальний обсяг інвестицій складе

$$K=\sum_{j=0}^{L}\left|C_j\right|,$$

а строк окупності m без приведення грошових сум до одного моменту часу можна знайти шляхом послідовного акумулювання щомісячних доходів, поки вони не перевищять K:

$$m=\min_{k:1\le k\le n}\left(\sum_{s=1}^{k}C_{L+s}\ge K\right). \qquad (4.43)$$

Інакше кажучи, строк окупності m задовольняє нерівність:

$$\sum_{s=1}^{m-1}C_{L+s}<K\le\sum_{s=1}^{m}C_{L+s}. \qquad (4.44)$$

У найбільш простому випадку, коли інвестиції в розмірі $|C_o|=K$ проводяться тільки один раз, а щомісячні суми чистого доходу однакові і рівні C_1, умови (4.44) можна записати у вигляді:

$$(m-1)\cdot C_1 > K \le m\cdot C_1. \qquad (4.45)$$

Тому строк окупності в цьому випадку складає приблизно *m* місяців.

У більш складному, але краще обґрунтованому з фінансової точки зору варіанті варто спочатку привести всі грошові суми до одного моменту часу – моменту завершення інвестицій, а потім визначати строк окупності проекту. Це уточнене значення (present value payback period) буде більше початкового.

Приклад 5. Виберемо за базову од. часу *1* рік, а за ум. гр. од. – *1000* дол. Приймемо, що інвестиції проводяться тільки один раз, тобто *L=0.* Дані про інвестиційний проект містяться в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4

	j						
	0	1	2	3	4	5	6
C_j	-90	10	20	30	30	40	51
$\sum_{s=0}^{j} C_s$	-90	-80	-60	-30	0	40	91

Нижній рядок цієї таблиці дає наростаючим підсумком суму неприведених витрат і доходів до року *j* включно. Очевидно, що в даному прикладі строк окупності становить 4 роки.

Приклад 6. Ускладнимо попередній приклад, прийнявши, що річна ставка *i=16%*, і приведемо всі грошові суми до моменту *0*. Результати містяться в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5

	j						
	0	1	2	3	4	5	6
C_j	–90	10	20	30	30	40	51
$(1+i)^{-j}$	1	0,862	0,743	0,641	0,552	0,476	0,410
$C_j(1+i)^{-j}$	–90	8,621	14,863	19,220	16,569	19,045	20,932
$\sum_{s=0}^{j} C_s(1+i)^{-s}$	–90	–81,379	–66,516	–47,296	–30,727	–11,68	9,250

У цьому випадку уточнений період окупності (PV=payback period) становить приблизно 5,5 років (замість 4 років). Помітимо, що чиста поточна, вартість NPV потоку платежів цього проекту дорівнює 9250 дол.

Таким чином, якщо *i=0*, то формула (4.43) для періоду окупності без приведення грошових сум до моменту *0* прийме вигляд:

$$m = \min_{k:1\le k\le n} (\sum_{j=0}^{k} C_j \ge 0), \tag{4.46}$$

а із приведенням при річній процентній ставці *i:*

$$m = \min_{k:1\le k\le n} \cdot (\sum_{j=0}^{k} C_j \cdot (1+i)^{-j} \ge 0). \tag{4.47}$$

Період окупності без приведення грошових сум до моменту *0* дозволяє фірмі довідатися, скільки часу необхідно для відшкодування вкладених коштів, що в деяких випадках може мати для фірми життєво важливе значення.

Недолік цього показника полягає в тому, що строк окупності занижується. Другий недолік цього показника – як із приведенням, так і без приведення грошових сум – полягає в тому, що він не враховує всі доходи після моменту повного відшкодування вкладених коштів, а вони можуть бути і великими. Однак приведена вартість віддалених платежів швидко падає, що зменшує значення другого недоліку, особливо при великій ставці *i*.

У цілому можна сказати, що строк окупності є не стільки критерієм вибору інвестиційного проекту, скільки обмеженням: якщо строк окупності більше припустимої для даної фірми величини, то проект просто виключається зі списку розглядуваних.

2. Індекс рентабельності

Індекс рентабельності (benefit cost ratio або Present Value Index) проекту являє собою відношення суми всіх дисконтованих грошових доходів від інвестицій до суми всіх дисконтованих інвестиційних витрат.

Якщо індекс рентабельності менше *1*, то проект повинен бути відхилений, а серед проектів, у яких індекс більше *1*, варто віддати перевагу проекту з найбільшим індексом рентабельності. Однак варто мати на увазі, що не завжди проект із найбільшим індексом рентабельності буде мати і найвищу чисту поточну вартість.

Приклад 7. Припустимо, що існують два проекти – *А* і *В*. Для проекту *А* приведена вартість всіх грошових доходів становить 10^6 дол., а інвестицій – $5 \cdot 10^5$ дол. Для проекту *В* відповідно 225000 і 100000 дол. Відомо також, що NPV π проекту *А* більше, ніж у *В*.

Індекси рентабельності цих програм відповідно рівні:

$$r_A = \frac{10^6}{5 \cdot 10^5} = 2, \qquad r_B = \frac{225000}{100000} = 2{,}25$$

Тому з погляду індексу рентабельності проект *В* переважніший. Однак проект *А* дозволяє інвестувати більше коштів і має більшу чисту приведену вартість NPV π, тобто економічно може виявитися більш привабливим. Це показує, що індекс рентабельності не є однозначним критерієм ефективності проекту.

3. Загальні зауваження про методику вибору інвестиційного проекту

Розглянуті чотири фінансових показники ефективності інвестиційних проектів можуть не дозволити однозначно вибрати один з можливих варіантів інвестицій. Тому звичайно додержуються такої методики.

Насамперед всі суми, що враховуються, очищаються від податків. Потім якщо для фірми особливо важливий період окупності, то спочатку на його основі відкидають неприйнятні варіанти. Якщо цей показник для фірми не дуже важливий, то його не застосовують взагалі.

Далі звичайно застосовують два із трьох фінансових показників: *чиста поточна вартість, внутрішня норма прибутковості і індекс рентабельності.* На основі свого досвіду фінансові аналітики фірми вважають один із критеріїв основним, а інші – додатковими. Опитування в США показало, що переважна більшість великих фірм як пару «основний – додатковий критерій» використовують найчастіше пару IRR – NPV, а на другому місці пару NPV – IRR. Якщо при виборі інвестиційного проекту за допомогою обраної пари виникають помітні розбіжності, то залучають третій показник або проводять більш глибокий фінансовий аналіз.

Зарубіжний досвід показує, що великі фірми використовують формальний інвестиційний аналіз набагато частіше, ніж дрібні. Це, пояснюється тим, що вибір варіанта серед невеликих за коштами і за тривалістю інвестиційних проектів найчастіше очевидний і до аналізу. Разом з тим для формального інвестиційного аналізу більш складного, дорогого і тривалого інвестиційного процесу можна розробити спеціальну економіко-математичну модель, у якій врахована велика кількість вимог, умов, припущень і відповідних їм параметрів. У випадку програмної реалізації цієї моделі вказуються діапазони вимірювання параметрів, так що обчислення можуть проводитися для мінімального, максимального і середнього значень кожного з параметрів. При цьому період проекту може бути розбитий на послідовні етапи і тоді аналіз виконується поетапно. Із виконанням окремих етапів проекту в нього можуть вноситися корективи, які також можна врахувати в моделі і програмі. Звичайно, у такій моделі можна враховувати і різні варіанти прогнозу змін процентної ставки i усередині окремих етапів. Взагалі, у всіх фінансових показниках надійність прогнозу змін i відіграє величезну роль, тому що при великій динаміці i варто різко скорочувати період реалізації розглянутих проектів.

Крім того, при виборі проекту враховуються і нефінансові критерії, пов'язані з екологією, безпекою персоналу і населення, рішеннями законодавчої і виконавчої влади, суспільною думкою і т.ін.

Задачі до розділу 4

1. Аналізується пропозиція про вкладення коштів у деякий трирічний інвестиційний фінансовий проект, у якому передбачається дохід за перший рік 25, за другий – 70, за третій – 100000 грн. Надходження відбуваються наприкінці відповідного року, а ефективна процентна ставка прогнозується на перший рік – 10%, на другий – 15, на третій – 20% річних. Чи є ця пропозиція вигідною у порівнянні зі середньоринковими умовами, якщо в проект потрібно зробити початкові капіталовкладення в розмірі: 1) 275; 2) 365; 3) 480 умовних грошових одиниць?
2. Інвестор вкладає 2 млн. грн. у момент 0, потім 200000 грн. через 3 роки і одержує 10 млн. грн. через 9 років. Потрібно знайти IRR для цього проекту?
3. Нехай деякому інвестиційному проекту відповідає такий потік нетто-платежів:

t_s	0	1	2	3	4
$C(t_s)$	-10	10	17	2	7

Потрібно знайти *IRR?*

4. Інвестор вкладає 1000 грн. у момент 0, потім 10000 тис. грн. через

2 роки і одержує 50000 грн. через 20 років. Потрібно знайти IRR для цього проекту?

5. Нехай деякому інвестиційному проекту відповідає такий потік нетто-платежів:

t_s	0	1	2	3	4	5	6	7
$C(t_s)$	-157	10	-12	177	200	-45	356	896

Потрібно знайти IRR?

Розділ 5. Індекси інфляції і нерівності у розподілі сімейних доходів

5.1. Врахування інфляції

1. Індекс і темпи росту інфляції

Інфляція є дуже складним і важливим фінансово-економічним явищем сучасного світу. Вона залежить від багатьох факторів і є предметом вивчення ряду розділів економічної теорії, у яких широко застосовуються методи теорії ймовірностей і математичної статистики. Оскільки інфляція проявляється в падінні реальної купівельної спроможності грошей і загальному підвищенні рівня цін усередині країни, то її необхідно враховувати при здійсненні середньострокових і особливо довгострокових фінансових операцій. Тому ми розглянемо найпростіші способи її урахування.

Темпи інфляції виміряються за допомогою системи індексів інфляції, які характеризують середню зміну рівня цін для деякого фіксованого набору (кошика) товарів і послуг за певний період часу. Склад цих товарів залежить від мети дослідження. Наприклад, в українських газетах зараз регулярно друкується індекс інфляції (зростання цін) за тиждень, місяць або рік, який розрахований на основі продовольчого споживчого кошика для різних регіонів країни. Якщо ж мова йде про прожитковий мінімум, то в нього включаються поряд із продовольством також промислові товари, різні послуги і т.ін. Індекс інфляції розраховується також для різних галузей виробництва і для валового національного продукту (ВНП) країни за різні проміжки часу (місяць, квартал, півріччя, рік).

Розглянемо тепер для визначеності *споживчий кошик* з k назв і приймемо, що товар або послуга s входить у кошик у кількості q_s відповідних одиниць, а ціна за цю одиницю в момент t складає $x_s(t)$ гр. од. за одиницю товару s, $s=1,2,..., k$. Тоді вартість кошика в момент t дорівнює:

$$X(t) = \sum_{s=1}^{k} x_s(t)\, q_s \text{ гр. од.} \qquad (5.1)$$

Індексом інфляції (росту споживчих цін) за час від t_1 до t_2 називається безрозмірна величина:

$$H(t_1,t_2)=\frac{X(t_2)}{X(t_1)},\quad t_2>t_1, \tag{5.2}$$

а темпом інфляції за цей період називається:

$$h(t_1,t_2)=\frac{X(t_2)-X(t_1)}{X(t_1)}=H(t_1,t_2)-1. \tag{5.3}$$

З визначення слідує, що:

$$H(t_1,t_2)=1+h(t_1,t_2) \tag{5.4}$$

Індекс інфляції *H* показує, у скільки разів, а темп *h* (після множення на 100) – на скільки відсотків виросли ціни за розглянутий період. Відзначимо, що визначення (5.3) формально збігається з визначенням (1.2) ставки відсотка в п. 1.1. Тому $h(t_1,t_2)$ можна теоретично назвати і ставкою інфляції, але це не прийнято робити, оскільки інфляція – стихійний процес, який погано піддається регулюванню.

Наступна теорема аналогічна правилу (принципу стабільності ринку), яке наведено п. 1.3 для коефіцієнта нарощення за схемою складних відсотків.

Теорема 1. Якщо $t_0<t_1<t_2<...t_n$,, то індекс інфляції на інтервалі (t_0,t_n) дорівнює добутку індексів інфляції на кожному зі складових (t_0,t_n) підінтервалів (t_{s-1},t_s):

$$H(t_0,t_n)=1+h(t_0,t_n)=\prod_{s=1}^{n}[1+h(t_{s-1},t_s)]. \tag{5.5}$$

Доведення. З (5.2)–(5.4) слідує, що зростання споживчого кошика відбувається за формулою складних відсотків, де $h(t_{s-1},t_s)$ відіграє роль процентної ставки на підінтервалі (t_{s-1},t_s):

$$X(t_n)=X(t_{n-1})\cdot[1+h(t_{n-1},t_n)]=X(t_{n-2})\cdot[1+h(t_{n-2},t_{n-1})]\cdot$$
$$\cdot[1+h(t_{n-1},t_n)]=...=X(t_0)\prod_{s=1}^{n}[1+h(t_{s-1},t_s)]$$

Оскільки при цьому $X(t_n) = X(t_0) \cdot [1 + h(t_0, t_n)]$, то з порівняння двох останніх формул випливає формула (5.5).

Виберемо тепер базову одиницю часу, природну, для цілей конкретного дослідження, і назвемо індексом *H(t)* і темпом *h(t)* інфляції за одиничний інтервал *(t-1, t)*, відповідно:

$$H(t) = \frac{X(t)}{X(t-1)}, \quad h(t) = H(t) - 1. \tag{5.6}$$

Звідси слідує, що

$$X(t) = X(t-1) \cdot [1 + h(t)], \tag{5.7}$$

тобто ріст цін за *(t-1, t)* відбувається за схемою складних відсотків зі ставкою *h(t)*. На практиці *H(t)* звичайно виражають в абсолютних величинах, а *h(t)* – у відсотках. Наприклад, якщо *H(t)=1,5, h(t)=0,5,* то говорять, що за розглянутий інтервал часу ціни виросли в 1,5 рази, або, що еквівалентно, на 50%. Можна сказати, що *темп інфляції характеризує відносну швидкість приросту цін за базову одиницю часу.*

Приклад 1. У ряді випадків за прогнозом щомісячного темпу $h_{міс}$ інфляції на наступний рік потрібно визначити індекс $H_{рік}$ інфляції на наступний рік. Для цього скористаємося співвідношенням (5.5), з якого слідує, що:

$$H_{рік} = (1 + h_{міс})^{12} \tag{5.8}$$

Наведемо таблицю 5.1, що ілюструє формули (5.8) і (5.6).

Таблиця 5.1

$h_{міс}$	1%	2%	3%	4%	5%	10%	12%	15%	20%
$H_{рік}$ $h_{рік}$	1,13 13%	1,27 27%	1,43 43%	1,60 60%	1,80 80%	3,14 214%	3,90 290%	5,35 435%	8,92 792%

Приклад 2. Внесок у сумі 2 тис. грн. поміщений на банківський депозит з 1 січня із щомісячним нарахуванням складних відсотків по ставці *j*=6% на місяць. Потрібно знайти очікуваний реальний дохід

вкладника за рік, якщо в пресі опубліковані прогнози трьох організацій про місячний темп інфляції, згідно з яким темп $h_{міс}^{(k)}$ буде постійним і дорівнює відповідно 0,03, 0,05 і 0,010 для k=1,2,3. Вкладник оцінює ймовірності цих прогнозів відповідно як:

$$p_1 = 0{,}3, \quad p_2 = 0{,}5, \quad p_3 = 0{,}2.$$

Рішення. Номінальний коефіцієнт нарощення за 12 місяців складає $A_{рік}$=(1+0,06) ^{12}=2,01. Інфляція зменшує реальні значення цих коефіцієнтів у $H_{рік}^{(k)} = (1 + h_{міс}^{(k)})^{12}$ разів, k=1,2,3.

Реальний коефіцієнт нарощення $\widetilde{A}_{рік}^{(k)}$ і дохід $J^{(k)}$ за рік становлять, відповідно:

$$\widetilde{A}_{рік}^{(k)} = \frac{A_{рік}}{H_{рік}^{(k)}} = \frac{(1 + 0{,}06)^{12}}{(1 + h_{міс}^{(k)})^{12}},$$

$$J^{(k)} = 2 \text{ тис. грн. } (\widetilde{A}_{рік}^{(k)} - 1), \quad k = 1{,}2{,}3.$$

Початкові дані цього прикладу і результати обчислень для нього містяться в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

	k		
	1	2	3
j	0,06	0,06	0,06
$A_{рік}$	2,01	2,01	2,01
$h_{міс}^{(k)}$	0,03	0,05	0,10
p_k	0,3	0,5	0,2
$H_{міс}^{(k)}$	1,43	1,80	3,14
$\widetilde{A}_{міс}^{(k)}$	1,406	1,117	0,640
$J^{(k)}$ у грн.	812	234	-720

Оскільки прогноз номер k має ймовірність p_k, то середній реальний дохід вкладника складе:

$$\bar{J} = \sum_{k=1}^{3} p_k \cdot J^{(k)} = 216{,}6 \text{ грн.}$$

2. Індексація ставки відсотка

Нехай сума *S(0)* гр. од. була покладена на банківський депозит на *n* місяців із щомісячним нарахуванням складних відсотків по ставці

$j = i^{(12)}/12$ де $i^{(12)}$ номінальна річна ставка відсотків. Припустимо, що *h* – очікуваний місячний темп інфляції. Тоді через *n* місяців нарахована вкладнику сума складе номінально:

$$S(n) = S(0) \cdot (1 + j)^n,$$

а її реальна вартість через інфляцію складе лише:

$$S(n) = S(0)\frac{(1 + j)^n}{(1 + h)^n}.$$

Якщо $h=j$, то реальна вартість суми $S(0)$ збережеться, а при $h>j$ вона навіть зменшиться (у фінансовій літературі це явище називають *ерозією капіталу*). Лише при $h<j$ реальна вартість $S(0)$ за *n* місяців зросте, але в меншому ступені, ніж планувалося. Тому часто прибігають до збільшення (*індексації*) початкової або нетто-ставки відсотка на величину *інфляційної премії*.

Нехай *j* – початкова ефективна нетто-ставка відсотка, а *r* – відповідна їй *брутто-ставка*, тобто ставка за ту ж базову одиницю часу з поправкою на інфляцію (у загальному випадку брутто-ставка може містити додатково до нетто-ставки і поправки на інфляцію ще декілька елементів: накладні витрати, податки, прибуток і т.ін.). Для того щоб реальна вартість $S_{реальн}(n)$ збігалася з номінальною $S(n)$, необхідно збільшити коефіцієнт нарощення до:

$$1 + r = (1 + j) \cdot (1 + h)$$

Звідси

$$r = j + h + jh,$$

і якщо *j* і *h* за базову одиницю часу досить малі, то за брутто-ставку відсотка можна прийняти:

$$r \approx j + h$$

Якщо інфляція невелика, то за базову одиницю часу можна вибрати рік, а якщо вона велика, то місяць.

3. Урахування інфляції в інвестиційних проектах

Розглянемо найпростіший випадок, коли інвестор може одержати або дати кредит під однаковий відсоток і його можливості одержати кредит не обмежені. Звичайно інвестор повинен ураховувати, що всі або деякі компоненти майбутнього потоку платежів будуть піддані інфляції через ріст цін і заробітної плати. При цьому рівень інфляції для різних компонентів майбутнього потоку платежів може бути різним. Наприклад, заробітна плата може рости швидше або повільніше цін на деякі важливі товари, а ціни на деякі компоненти інвестицій можуть залишатися практично постійними навіть при високій інфляції.

Для простоти розглянемо випадок, коли усі компоненти платежів за період *(0,T)* аналізованого інвестиційного проекту піддаються однакової інфляції із прогнозованим темпом (ставкою) *h* за базову одиницю часу. Приймемо, що всі платежі індексуються з урахуванням *h*, так що прогнозні оцінки $C_h(t_0), C_h(t_1),..., C_h(t_n), 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \le T$, й $p_h(t)$, $0 \le t \le T$ для параметрів дискретно-безперервного потоку платежів приймають вигляд:

$$C_h(t_s) = (1+h)^{t_s} \cdot C(t_s), \quad p_h(t) = (1+h)^t \cdot p(t) \tag{5.9}$$

Тому в силу (4.36) дисконтована на момент *0* вартість потоку платежів при ставці *i* відсотка за базову од. часу складе:

$$NPV_h(i) = \sum_{s=0}^{n} \frac{C_h(t_s)}{(1+i)^{t_s}} + \int_0^T \frac{p_h(t)}{(1+i)^t} dt = \sum_{s=0}^{n} C(t_s) \cdot (1+j)^{-t_s} + \int_0^T p(t) \cdot (1+j)^{-t} dt. \tag{5.10}$$

Тут прийнято, що

$$1 + j = \frac{1+i}{1+h}$$

Тому

$$j = \frac{i-h}{1+h} \tag{5.11}$$

можна інтерпретувати як ставку відсотка з урахуванням інфляції, причому при $h \ge i$ інвестиції не мають смислу.

Якщо ж $h < i$, причому *h* і *i* досить малі (наприклад, не перевершують 0,05-0,10), то $j \approx i - h$.

З порівняння формул (5.10) і (4.36) слідує, що:

$$NPV_h(i) = NPV(j), \tag{5.12}$$

де в правій частині інфляція врахована за рахунок переходу від i до *j*.

Позначаючи внутрішню ставку прибутковості (IRR) у лівій частині (5.12) через $i_0^{(h)}$, а в правій – через i_0 у силу (5.11) одержимо:

$$\frac{i_0^{(h)} - h}{1 + h} = i_0$$

Звідси

$$i_0^{(h)} = i_0 \cdot (1 + h) + h, \qquad (5.13)$$

де i_0 – ставка прибутковості проекту без урахування інфляції.

Якщо $i_0 h$ досить мало, то $i_0^{(h)} \approx i_0 + h$.

5.2. Індекс нерівності в розподілі сімейних доходів

1. Крива Лоренца

У попередньому підрозділі ми розглянули індекс інфляції. Індексні системи широко застосовуються в економічному і фінансовому аналізі поряд зі статистичними моделями. Індексні числа підсумовують масу інформації про ціни різних товарів і послуг або про їхню кількість. Індексні числа відіграють ту ж роль, що і середнє значення, і мають ті ж переваги і недоліки: вони дають корисну підсумкову оцінку усій наявній сукупності даних, але за рахунок втрат багатьох деталей.

Спеціальне індексне число служить для вимірювання нерівності доходів.

Як приклад розглянемо взяті нами офіційні дані про сумарні щотижневі сімейні доходи у Великобританії за 1992 р., що містяться в таблиці 5.3.

Вибірка обсягом 7418 сімей зроблена за спеціальною програмою, причому всі доходи сім'ї, включаючи пенсії, ураховуються до сплати податків. Величини доходів розділені на 8 інтервалів, границі яких наводяться в стовпці 2. У стовпці 3 наводяться значення a_j – середини інтервалу j, а у стовпці 4 – число f_j сімей у групі (інтервалі) j, j=1,2,...,8.

Навіть швидкий погляд на вихідні дані, що містяться в стовпцях 2 і 4 цієї таблиці, говорить про суттєву нерівність у розподілі доходів. Наприклад, найбідніші 12% сімей одержують менш 80 фунтів стерлінгів у тиждень, а найбагатші 6% – принаймні, в 10 разів більше. Це – важлива інформація про нерівність доходів, але вона основана тільки на порівнянні двох крайніх груп розподілу доходів. Побудуємо тепер криву Лоренца, яка дає наочне графічне уявлення про весь розподіл доходів.

Для цієї мети служать стовпці 5-9 таблиці 5.3. Позначимо загальне число сімей через f, де $f = \sum_{j=1}^{8} f_j = 7418$.

Таблиця 5.3

Номер інтервалу j	Щорічний дохід, ф.ст.	Середина інтервалу a_j ф.ст.	Число сімей f_j	Відносне число сімей $f_j / f.$	Накоп. відносне число сімей x_j	$a_j f_j$, ф.ст.	$\frac{a_j f_j}{\sum_1^8 a_s f}$	y_j
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0-	40	909	0,122	0,122	36360	0,015	0,015
2	80-	105	949	0,128	0,250	99645	0,040	0,055
3	130-	165	955	0,129	0,379	157575	0,063	0,118
4	200-	240	905	0,122	0,501	217200	0,087	0,205
5	280-	325	1020	0,137	0,638	331500	0,133	0,338
6	330-	455	1356	0,183	0,821	616980	0,247	0,585
7	540-	670	866	0,117	0,938	580220	0,232	0,817
8	800-	1000	458	0,062	1.000	458000	0,183	1,000
$\sum$			$f = 7418$	1,000		2497480	1,000	

У стовпці 5 наводиться відносне число f_j / f сімей у групі *j*, а в стовпці 6 – накопичене відносне число:

$$x_j = \frac{1}{f.} \sum_{s=1}^{j} f_s \tag{5.14}$$

сімей у групах з 1 по *j* включно.

У стовпці 7 наводиться $a_j f_j$ – наближена оцінка загального доходу сімей із групи *j* у фунтах стерлінгах, а в стовпці 8 – частка $\frac{a_j f_j}{\sum_{s=1}^{8} a_s f_s}$ в загальному доході сімей із групи *j*. Нарешті, у стовпці 9 наводиться накопичена частка:

$$y_j = \sum_{s=1}^{j} a_s f_s / \sum_{s=1}^{8} a_s f_s \tag{5.15}$$

у загальному доході сімей із груп з 1 по *j* включно, *j*=1,2,...,8.

Якщо m – загальне число груп, то крива Лоренца проходить через опорні точки:

$$(0{,}0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_{m-1}, y_{m-1}),\ (1{,}1). \tag{5.16}$$

На рисунку 5.1 наводиться гладка крива Лоренца для розглянутого вище прикладу, а опорні точки виділені квадратом.

Крива Лоренца на рисунку 5.1 наочно відображає характер даних розглянутого прикладу. Наприклад, перша опорна крапка (0,122, 0,015) означає, що найбідніші 12% родин мають тільки 1,5% загального доходу. Четверта опорна крапка (0,501, 0,205) означає, що найбідніша половина родин має близько 20% загального доходу. Передостання опорна крапка (0,938, 0,817) означає, що найбільш багаті 6% сімей мають більше 18% загального доходу.

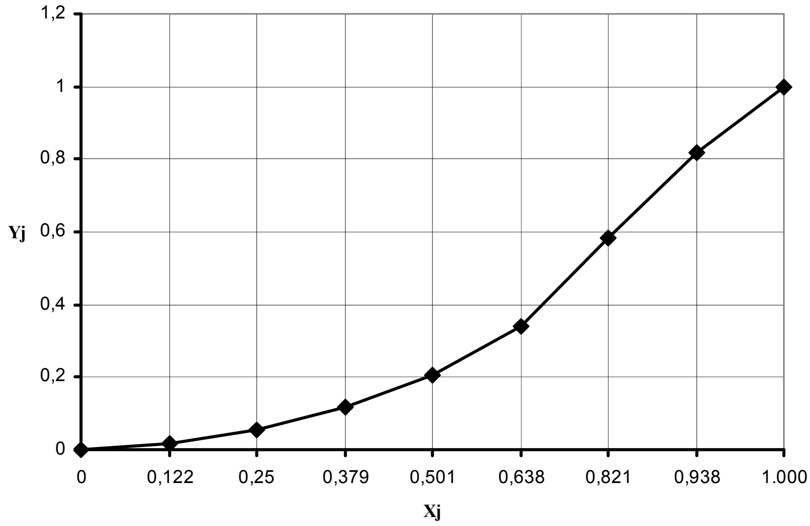


Рисунок 5.1 – Крива Лоренца за даними таблиці 5.3

Крива Лоренца в загальному випадку має такі очевидні властивості:

1. Оскільки 0% сімей мають 0% загального доходу, а 100% сімей мають 100% загального доходу, то крива Лоренца з'єднує початок координат – нульову опорну точку (0,0) – з m-й опорною точкою (1,1) – вершиною квадрата зі стороною 1, що спирається на осі координат.
2. Оскільки групи сімей упорядковані від найбідніших до найбагатших, то крива Лоренца лежить нижче бісектриси першого координатного кута. Сама бісектриса являє собою випадок повної рівності

сімейних доходів. Помітимо, що в розглянутому прикладі ступінь нерівності серед найбідніших родин більше, ніж серед багатих.

3. Оскільки з ростом *x* відповідні сімейні групи утримують усе більш багаті сім'ї, то накопичена частка *y* доходу зростає усе швидше. Тому крива Лоренца опукла вниз.

2. Коефіцієнт Джині

Цей коефіцієнт дає чисельну оцінку нерівності в розподілі доходів і може бути отриманий за допомогою кривої Лоренца.

На рисунку 5.2 знову зображена крива Лоренца, причому площа частини квадрата між нею і бісектрисою позначена через *A*, а між нею, віссю абсцис і правою стороною квадрата зі сторонами 1 позначена через *B*. Очевидно, що:

$$A + B = \frac{1}{2}. \tag{5.17}$$

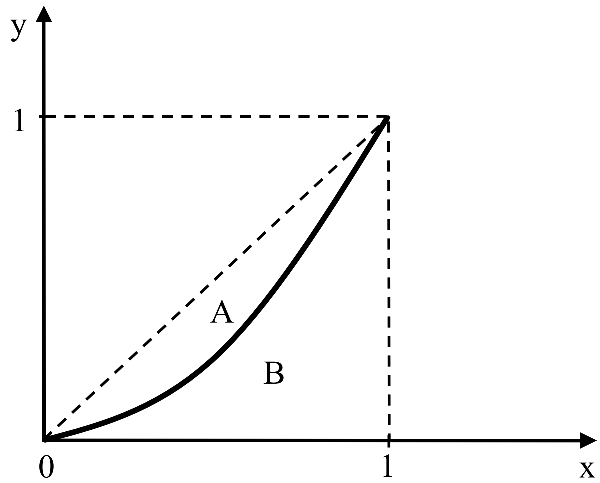


Рисунок 5.2 – Крива Лоренца (загальний випадок)

Коефіцієнтом Джині називається число:

$$G = \frac{A}{A + B} = 2A, \tag{5.18}$$

причому $0 \le G \le 1$.

Випадок *G=A=0* означає, що крива Лоренца збігається з бісектрисою, тобто має місце повна рівність доходів. Випадок *G=1, B=0* означає, що крива Лоренца перероджується у відрізок [0,1) осі абсцис і точку (1,1), тобто всі доходи одержує тільки одна сім'я. Обидва цих крайніх випадки представляють лише теоретичний інтерес, а на практиці справедлива нерівність *0<G<1*, причому з ростом *G* нерівність у розподілі доходів зростає. Тому коефіцієнт Джині дозволяє порівнювати між собою розподіли доходів у різних регіонах однієї країни, між країнами, вивчати його динаміку і т.ін.

Таким чином, для обчислення *G* за формулою (5.18) досить обчислити площу *B* під кривою Лоренца, а потім скористатися формулою (5.17).

Для обчислення площі *B* розглянемо рисунок 5.3, на якому великим планом зображена частина кривої Лоренца між точками x_{S-1} і $x_s, s = 1,2,...,m$.

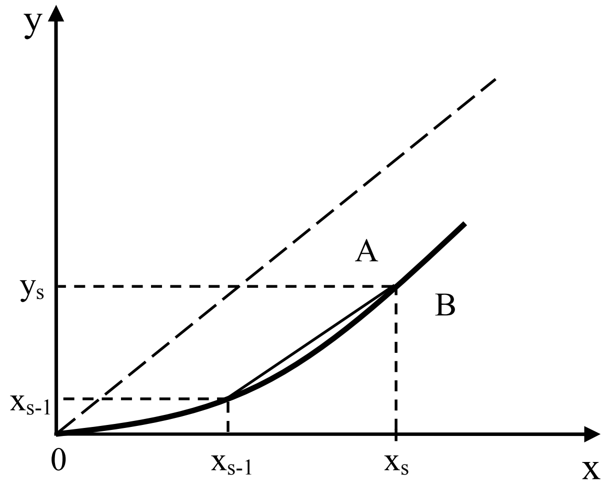


Рисунок 5.3 – Крива Лоренца (розрахунок коефіцієнта Джині)

Площу під кривою Лоренца на відрізку від x_{S-1} до x_s можна наблизити за допомогою трапеції з основами довжиною y_s і y_{s-1} і висотою $x_s - x_{s-1}$, причому похибка буде зменшуватися з ростом *m*. Тому:

$$B \approx \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}(x_s - x_{s-1})\cdot(y_{s-1} + y_s). \qquad (5.19)$$

Задачі до розділу 5

1. Внесок у сумі 23 тис. грн. поміщений на банківський депозит з 1 лютого із щомісячним нарахуванням складних відсотків по ставці *j*=9,5% на місяць. Потрібно знайти очікуваний реальний дохід вкладника за рік, якщо в пресі опубліковані прогнози трьох організацій про місячний темп інфляції, згідно з яким темп $h_{міс}^{(k)}$ буде постійним і дорівнює відповідно 0,04, 0,07 і 0,06 для k=1,2,3. Вкладник оцінює ймовірності цих прогнозів відповідно як: p_1 = 0,3, p_2 = 0,6, p_3 = 0,7.

Розділ 6. Характеристики фінансових інструментів

6.1. Загальні відомості про фінансові інструменти

Фінансовий інструмент – це будь-який документ, який може брати участь у фінансових операціях: акції, облігації, депозитні сертифікати, векселі і т.ін. Фінансові інструменти діляться на основні і похідні. До *основного* відносяться банківський рахунок, облігації і акції. Всі інші інструменти називаються *похідними*: депозитні сертифікати, векселі, форвардні і ф'ючерсні контракти, опціони і усілякі їхні комбінації. Найважливішими характеристиками фінансових інструментів є ціна (для облігацій – курс), прибутковість (поточна і повна), ліквідність і т.ін.

Власне, продаж і покупка зазначених фінансових інструментів і становлять фінансовий ринок. На такому ринку продають і купують цінні метали і коштовності, здійснюють різні операції з валютою інших країн і грошима своєї країни (дають і позичають).

Облігації – це цінні папери, звичайно на пред'явника. Облігації мають номінальну вартість, або номінал N, який присвоюють облігації в момент її емісії. Із часом ціна облігації може змінюватися, але звичайно говорять не про ціну облігації P, а про відношення ціни до номіналу і це відношення, виражене у відсотках, називають *курсом облігації* K. Отже, курс облігації $K=P/N$ або $P=K\cdot N$, а у відсотках – $K=100\cdot P/N$, $P=N\cdot K/100$.

Часто облігації мають купон, що характеризується купонною ставкою q, який дає власнику купонний дохід, що дорівнює частці q від номіналу. Наприклад, якщо q=10%, а N=1000 гр. од., то разовий купонний дохід дорівнює 100 гр. од. Купонний дохід виплачується періодично або тільки один раз, наприклад, при погашенні облігації. Купонний дохід розглядається як поточний.

Часто облігації мають встановлений період дії, після чого вони можуть бути погашені, тобто власник одержує їхню номінальну вартість.

Облігації звичайно називаються по імені їхнього емітента: державні, якщо їх випустила держава, муніципальні, корпоративні і інші.

Завдяки фіксованому поточному доходу облігації – досить популярні цінні папери, за своєю вартістю вони перевершують інші цінні папери.

Акція – це цінний папір, звичайно її власник занесений в особливий список (реєстр) акціонерів, що дає йому деякі права. Той, хто випускає (емітує) акції, називається *емітент*. Акція дає її власнику право на одержання дивідендів раз у квартал або з іншою періодичністю. Дивіденди формують поточний дохід власника акції. Якщо акції продаються і купуються, то вони мають ціну. Ціна акції визначається багатьма факторами, деякі з них носять випадковий характер. Акції мають номінальну вартість, але звичайно вона не має ніякого значення.

Акції діляться на дві великі групи: *звичайні* і *привілейовані*. Виплати дивідендів і повернення капіталу при банкрутстві емітента спочатку проводяться по привілейованих акціях і тільки після цього по звичайних. Недолік привілейованих акцій у тому, що якщо компанія успішно веде справи, то дивіденди на звичайні акції зростають, а на привілейовані – ні.

Відзначимо для подальшого, що прибутковість облігації є її внутрішня прибутковість, яку ми розуміємо в значенні потоку платежів і яка визначається номіналом облігації в значенні сучасної або нарощеної величини. Ціна ж залежить і від зовнішніх умов, зокрема, від ставки відсотка. Ціна цінного паперу формується попитом та пропозицією. При визначенні ціни цінного паперу продавці і покупці намагаються врахувати всі види доходів, які може принести цінний папір.

Якщо на одному ринку товар коштує дешевше, ніж на іншому, то можна купити товар на першому ринку, продати його на другому і одержати деякий прибуток. Звичайно, таке положення може бути лише тимчасовим. Найдеться багато бажаючих проводити такі операції – вони називаються *арбітражними*. Ця операція призведе до підвищення ціни на першому ринку і до її падіння на другому. Різниця цін може залишитися (виноград у Криму завжди буде дешевше, ніж у Києві), але вона не зможе компенсувати транспортних і інших витрат по цій операції. Фінансовий ринок принципово не відрізняється від звичайних товарних ринків. Мабуть, він більш розвинутий. Арбітражні операції проводяться і на ньому. Відзначимо, що часто арбітражні операції покупки і продажі здійснюються одночасно.

Розглянемо ціноутворення ф'ючерсних і форвардних контрактів з урахуванням можливості арбітражних угод.

Форвардні і ф'ючерсні контракти – це контракти на покупку або продаж певної кількості будь-якого товару на певну дату в майбутньому, але за ціною, встановленою в момент укладання контракту. Ф'ючерсні контракти відрізняються від форвардних лише тим, що вони знеособлені, є фактично стандартними і торгівля ними ведеться лише на спеціалізованих біржах, у той час як форвардні контракти можуть бути досить індивідуальні (наприклад, між банком і його клієнтом). У силу цього термін «ф'ючерс» можна вживати також і стосовно форвардних контрактів.

Розглянемо ціноутворення ф'ючерсів на покупку якогось активу рівно через рік. Нехай нинішня ціна активу дорівнює \$10000, банківська процентна ставка складає 10%. Припустимо, що цей актив приносить чистого доходу теж 10% у рік. Тоді справедлива ціна такого активу через рік складе 110% від нинішніх \$10000, тобто \$11000. Стільки і повинен коштувати ф'ючерс на покупку такого активу. Справді, припустимо, що цей ф'ючерс зараз продається за меншу суму: наприклад, за \$10000. Тоді арбітражер купить ф'ючерс, продасть зараз наявний у нього актив за \$10000, покладе виручені гроші в банк, через рік вони зростуть до \$10000+\$1000, по наявному в нього ф'ючерсу купить точно такий же актив, який продав рік назад, за \$10000 і одержить у підсумку прибуток \$1000.

Якщо ж ф'ючерс буде переоцінений, тобто він надає право продати через рік актив за більшою ціною, скажемо за \$12000, то арбітражер купує ф'ючерс, купує актив зараз за \$10000, скориставшись банківським кредитом під 10% річних. Через рік цей актив він продасть по ф'ючерсу за \$12000 і в підсумку отримає прибуток \$1000 (\$12000-\$10000-\$1000).

Торгівлю ф'ючерсами на біржах організує клірингова палата. Допустимо, що сьогодні \$2000 – ф'ючерсна ціна поставки активу через 3 дні, у момент t=3. Якщо завтра ф'ючерсна ціна поставки активу в момент t стане \$1900, то клірингова палата перерахує на рахунок постачальника \$100. Ці \$100 будуть, зняті з рахунку покупця і йому буде запропоновано поповнити свій рахунок. Якщо раптом (під впливом яких-небудь подій, чуток і т.ін.) післязавтра ф'ючерсна ціна поставки активу в момент t=3 підніметься до \$2200, то палата перерахує на рахунок покупця \$300, знявши їх з рахунку постачальника. Так клірингова палата забезпечує виконання контракту рівно за ціною \$2000.

Ліквідність є одним з найважливіших властивостей фінансових інструментів і взагалі активів, тому розглянемо цю властивість.

Говорять, що фінансовий інструмент, актив високоліквідний, якщо його можна швидко і без значних втрат перетворити в гроші. Це визначення якісне. З кількісної сторони можна визначити ліквідність за формулою:

$$l = \frac{1}{\Delta t \cdot \Delta P} \qquad (6.1)$$

де Δt – час обертання (продажу) активу в гроші, а ΔP – відносний розмір втрат, тобто частка втрат цінності активу при цьому обертанні в гроші.

На практиці ліквідність активів, що котируються на біржі і стандартизовані, звичайно оцінюють шляхом зіставлення числа заявок на покупку і продаж даного типу активів.

6.2. Характеристика курсу і прибутковості облігацій

1. Курс і прибутковість облігації без погашення з періодичною виплатою купонних відсотків

Дохід від такої облігації одержують тільки у вигляді купонних відсотків. Нехай ставка купона q, ставка відсотка i, номінал облігації N. Тоді купонні виплати $\{qN\}$ утворять вічну ренту. Дисконтуючи всі ці виплати по ставці відсотка i, одержимо сучасну величину цієї ренти, що і є теоретична ціна облігації P. Отже

$$P= q \cdot N/(1+i) + q \cdot N/(1+i)^2 +... = q \cdot N/i. \tag{6.2}$$

Отже, курс облігації є $K = 100 \cdot q / i$. Якщо виплата купонних грошей відбувається p разів у році величиною qN/p, так що за рік утворюється знову ж qN, то ці купонні виплати $\{qN/p\}$ треба дисконтувати по ставці $(1+i)^{1/p}$. Одержуємо формулу:

$$K = (100 \cdot q / p) / [(1+i)^{1/p} - 1]. \tag{6.3}$$

Нехай тепер курс облігації K відомий. Знайдемо поточну прибутковість облігації зазначеного типу. Якщо купонні виплати проводяться раз у рік, то за рік облігація приносить дохід qN, а в неї вкладено P, отже, прибутковість дорівнює $j = qN / P$, або q/(KN) = q/K – якщо курс уважати часткою, а у відсотках:

$$j = 100 \cdot q / K. \tag{6.4}$$

Можна запропонувати і інший спосіб визначення прибутковості облігацій зазначеного типу. Нехай прибутковість облігації дорівнює j, тоді купонні виплати нарощують вартість облігації за цією річною ставкою, виходить, якщо дисконтувати цей потік по ставці *j*, то одержимо сучасну величину цього потоку, а це і є вже відома ціна облігації. Купонні виплати являють собою вічну ренту, її сучасна величина дорівнює *qN/j*. Отже, маємо рівняння qN/j=KN/100, звідки $j=100\cdot q/K$.

Для облігацій розглянутого типу поточна і повна прибутковість збігаються.

2. Курс і прибутковість безкупонної облігації з погашенням по номіналу

Дохід від такої облігації одержують як різницю між номіналом *N* при погашенні і ціною *P* облігації. Оскільки поточних виплат немає, то поточна прибутковість нульова. Якщо облігація куплена за *m* років до погашення, то дисконтуючи платіж *N* по ставці відсотка *i* до сучасного моменту, одержимо теоретичну ціну облігації $P = N/(1+i)^m$, отже, курс облігації (зрозуміло, що для такої облігації курс завжди менше 100):

$$K = 100/(1+i)^m. \tag{6.5}$$

Тепер знайдемо прибутковість облігації, уважаючи ціну відомою. Це просто: ціна *P*, нарощувана по ставці прибутковості *j*, через *m* років стане рівною номіналу облігації. Отже, $P(1+i)^m = N$ або $(KN/100)\cdot(1+j)^m = N$, остаточно:

$$j = (100/K)^{1/m} - 1. \tag{6.6}$$

3. Курс і прибутковість безкупонної облігації з виплатою купонних відсотків при погашенні

Відсотки по такій облігації нараховуються з капіталізацією за складною купонною ставкою *q* і виплачуються наприкінці строку одночасно з погашенням. Оскільки поточних виплат немає, то поточна прибутковість нульова. Нехай *q*, *i* – ставки купона і відсотка, і через *n* років після випуску облігація буде погашена. Таким чином, загальна сума, яку виплатять власнику при погашенні, дорівнює $N\cdot(1+q)^n$. Нехай облігація куплена за *m* років до погашення. Дисконтуючи до цього моменту суму $N\cdot(1+q)^n$ по ставці відсотка *i*, одержимо теоретичну ціну облігації *P*. Отже, $P = N\cdot(1+q)^n/(1+i)^m$, отже, курс облігації:

$$K = 100 \cdot (1+q)^n / (1+i)^m. \qquad (6.7)$$

Тепер визначимо прибутковість облігації. Відома ціна *P*, нарощувана по ставці прибутковості *j*, через *m* років повинна вирости до $N \cdot (1+q)^n$, тому маємо рівняння $P \cdot (1+j)^m = N \cdot (1+q)^n$, звідки:

$$j = (100/K)^{1/m} \cdot (1+q)^{n/m} - 1. \qquad (6.8)$$

4. Курс і прибутковість облігації з періодичною виплатою відсотків і погашенням

Це найзагальніший тип облігацій. Сумарний дохід від облігацій даного типу складається з регулярних купонних виплат, росту курсу, що дає дохід при продажі облігації, або від погашення облігації – тут дохід може визначатися різницею ставок відсотка при випуску облігації і у момент її погашення. Купонні виплати формують поточну прибутковість.

Нехай q, i – ставки купона і відсотка. Якщо облігація куплена за m років до погашення, то майбутні купонні доходи $\{qN\}$ є річною рентою і її сучасна величина є $qN \cdot a(m,i)$, де $a(m,i)$ – коефіцієнт приведення цієї ренти, тобто $[1-(1+i)^{-m}]/i$. Додавши сюди ще сучасну величину номіналу погашення $N \cdot (1+i)^{-m}$, одержимо теоретичну ціну облігації *P*. Отже, $P = N \cdot (1+i)^{-m} + qN \cdot [1-(1+i)^{-m}]/i$, тоді, курс облігації:

$$K = 100 \cdot ((1+i)^{-m} + q \cdot [1-(1+i)^{-m}]/i). \qquad (6.9)$$

Тепер визначимо прибутковість облігації розглянутого типу. Дисконтуючи номінал облігації при погашенні і купонні платежі за (поки невідомою) ставкою прибутковості *j*, повинні одержати ціну облігації *P*. Отже, маємо рівняння $N(1+j)^{-m} + qN \cdot a(m,j) = P$, звідки і можна знайти *j*. Наближений розв’язок цього рівняння нескладно одержати за допомогою комп'ютера.

5. Залежність ціни (курсу) облігації від ставки відсотка

Розглянемо найзагальніший тип облігацій – з періодичною виплатою відсотків і погашенням. Ціна такої облігації

$P = N(1+i)^{-m} + qN[1-(1+i)^{-m}]/i$ складається з дисконтованих до сучасного моменту номіналу погашення *N* і купонних виплат $\{qN\}$. Легко бачити, що обидві ці величини зменшуються при підвищенні ставки відсотка *i*, виходить, і ціна облігації при цьому також падає. Це падіння тим більше, чим далі момент погашення облігації.

6. Ціна вічної акції (дохід – тільки дивіденди)

Дохід від такої акції одержують тільки у вигляді дивидендів, тобто її продаж не передбачений. Тому теоретичну або розрахункову ціну акції *P* визначають як дисконтовану до сучасного моменту вічну ренту майбутніх дивідендів за діючою ставкою *i*. Якщо припустити, що дивіденди постійні, рівні *d* і виплачуються раз у рік, то *d/i* є сучасна величина цієї ренти, а також і ціна акції *P*. Якщо виплати дивідендів відбуваються раз у році, то дисконтувати треба за ставкою $(1+i)^{1/p}$ і розрахункова ціна акції буде:

$$d/[(1+i)^{1/p} - 1]. \qquad (6.10)$$

7. Банківські депозитні сертифікати

Такі сертифікати видаються банками в обмін на розташовувані в них кошти. Сертифікати відрізняються від звичайних банківських депозитів тим, що можуть обертатися на вторинному ринку. Там вони оцінюються виходячи з поточної вартості майбутніх грошових надходжень. Розрахунок їхньої поточної вартості цікавий тим, що за час дії сертифіката може відбутися зміна поточної процентної ставки.

Приклад 1. Нехай депозитний сертифікат був випущений на суму 1000 грн. під 12% річних. Отже, при його погашенні через рік його власник одержить 1120 грн. Припустимо, що через півроку ставка зменшилася до 6%. Яка буде ціна цього сертифіката в цей момент?

Рішення: Ця ціна *P*, нарощена по ставці 6% річних, через півроку повинна нарости до 1120. Маємо рівняння $P(1+0{,}06)^{1/2} = 1120$, звідси одержуємо P=1087 грн.

Задачі до розділу 6

1. Що добре для власника цінного паперу: збільшення або зменшення діючої процентної ставки в період володіння цим папером, якщо

цей папір: а) облігація; б) акція; в) депозитний сертифікат?

2. Знайдіть курс облігації без погашення з періодичною – раз у рік – виплатою відсотків при q=8%, i=5%. Обчисліть прибутковість такої облігації, якщо її курс дорівнює 120?
3. Знайдіть курс безкупонної облігації за 5 років до погашення при i=6%. Обчисліть прибутковість такої облігації, якщо її курс дорівнює 70?
4. Для безкупонної облігації з виплатою купонних відсотків при погашенні за допомогою комп'ютера обчислений курс облігації – 212,7. Перевірте комп'ютерні розрахунки, якщо купонна процентна ставка 10%, строк облігації – 10 років, до погашення залишилося 4 роки і процентна ставка – 6% річних?
5. Знайдіть курс безкупонної облігації з виплатою відсотків при погашенні за 5 років до погашення при i=4%, якщо облігація випущена на 10 років і q=8%. Обчисліть прибутковість такої облігації, якщо її курс дорівнює 100?
6. Знайдіть курс облігації без погашення з періодичною виплатою – раз у рік – відсотків при q=8%, i=5%. Обчисліть прибутковість такої облігації, якщо її курс дорівнює 120?
7. Знайдіть ціну вічної акції із квартальними дивідендами 200 при річній ставці i=8%?

Розділ 7. Система переваг і моделі торгів

7.1. Система переваг індивіда

Одним з основних елементів фінансового ринку є індивід – конкретна людина. Будемо вважати, що поведінка учасника фінансового ринку повністю описується такою аксіомою.

Аксіома індивіда. Кожний індивід приймає рішення щодо покупок, обміну, узяття грошей у борг і т.ін. виходячи винятково зі своєї системи переваг. Ця аксіома надзвичайно спрощує аналіз поведінки споживача. Далі ми сформулюємо цю аксіому в строгих математичних термінах.

Але спочатку вивчимо систему переваг індивіда. Це поняття застосовне не тільки до учасників фінансового ринку, але і у загальекономічному смислі, так, мабуть, і в загальнолюдському.

Під *товаром* розуміється деяке благо або послуга, що надійшли в продаж у певний час і в певному місці.

Будемо вважати, що є n різних товарів, кількість i-го товару позначається x_i, тоді деякий набір товарів позначається $X=(x_1,...,x_n)$. У число товарів входять і гроші як особливий специфічний товар.

Споживач розрізняє набори товарів, один набір товарів переважає інший. Запис $X \preceq Y$ означає, що споживач віддає перевагу набору Y, наборові X або ж не робить між ними різниці. Через останню обставину це відношення називається слабою перевагою. Воно формує ще двоє відношень: відношення рівноцінності (або байдужості) – $X \sim Y$, якщо і тільки якщо $X \preceq Y$ і $Y \preceq X$, і відношення переваги (або строгої переваги) – $X \prec Y$, якщо і тільки якщо $X \preceq Y$, і невірно, що $X \sim Y$. Які ж властивості мають ці три відношення?

Математики називають відношення *рефлексивним*, якщо $X \preceq X$ для всякого X; *симетричним*, якщо $X \preceq Y$ спричиняє те, що і $Y \preceq X$; *транзитивним*, якщо $X \preceq Y$ і $Y \preceq Z$ спричиняє $X \preceq Z$; *досконалим* (або повним), якщо для будь-яких двох наборів X, Y або $X \preceq Y$, або $Y \preceq X$.

Аксіома:

1) відношення слабкої переваги рефлексивне, транзитивне і досконале;
2) відношення рівноцінності рефлексивне, симетричне і транзитивне;
3) відношення переваги транзитивне;
4) для будь-якого X множина слабкої переваги $P_X=\{Y : X \preceq Y\}$ опукле;

5) кожний товар бажаний для індивіда – якщо $X \le Y$, то і $X \preceq Y$, а якщо до того ж $x_i < y_i$ для деякого *i*, то $X \prec Y$.

Підкреслимо, що ця аксіома виражає фундаментальні властивості системи переваг індивіда, загалом кажучи, живої людини. Рефлексивність і досконалість представляються цілком зрозумілими: *рефлексивність* означає, що будь-який набір товарів рівноцінний сам собі, а досконалість – що індивід у змозі порівняти за привабливістю будь-які два набори товарів. П'ята властивість також зрозуміла і у роз'ясненнях не має потреби.

Який смисл має четверта властивість системи переваг? *Опуклість* означає, що краще мати комбінацію товарів, нехай у менших кількостях, ніж просто тільки якийсь один із цих товарів (краще мати трошки солі, цукру, кави, хліба, ніж одну тільки сіль, або один цукор, каву, хліб, хоча і в більшій кількості).

Властивість транзитивності, яку мають відношення переваги і слабкої переваги, не зовсім очевидна, не дуже наочна і не відразу усвідомлюється споживачем, але якщо йому пояснити, що вийде, якщо його система переваг не транзитивна, то він погодиться, що властивість транзитивності, мабуть, і зробить необхідне переоцінювання привабливості для нього тих або інших наборів товарів.

Відношення рівноцінності рефлексивне, симетричне і транзитивне. Будь-яке відношення, що має ці три властивості, називається *еквівалентністю*. Будь-яка еквівалентність на будь-якій множині розбиває його на непересічні підмножини, названі класами еквівалентності. Отже, відношення рівноцінності є еквівалентністю і розбиває простір товарів на непересічні підмножини, названі класами або підмножинами рівноцінності (або байдужості), а у випадку двох або трьох товарів ці класи називаються кривими або поверхнями рівноцінності. Кожна окрема множина або клас рівноцінності складається з наборів товарів, однаково привабливих для споживача – він не віддає переваги жодному із цих наборів. При цьому кожний набір із простору товарів попадає в якийнебудь із класів рівноцінності, а саме в той, де зібрані набори, однаково цінні з ним. Типова картина для двох видів товарів показана на рисунку 7.1.

Тут K_x, K_y – класи рівноцінності наборів *X*, *Y*, відповідно, $X<Y$, стрілка показує напрямок переваги, заштрихована множина слабкої переваги P_y. Простий обмін наборами товарів може бути надзвичайно вигідним для обох учасників.

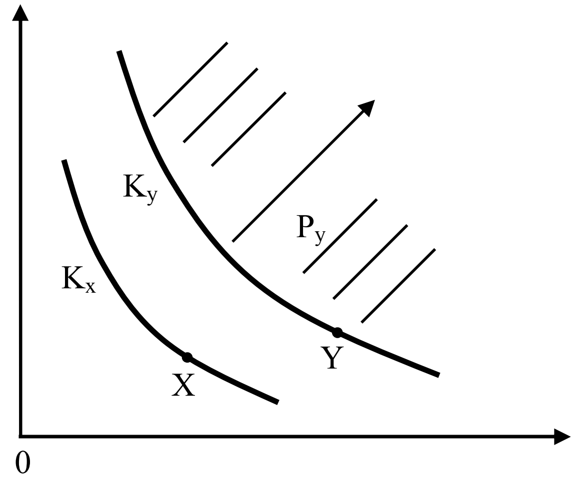


Рисунок 7.1 – Рівноцінність і переваги для 2-х видів товарів

У свій час А. Сміт навів цікавий приклад такого обміну: далекозорий і короткозорий мають кожний не ті окуляри, і в результаті обміну одержують найцінніші для себе речі. Схожий варіант обміну показаний на рисунку 7.2.

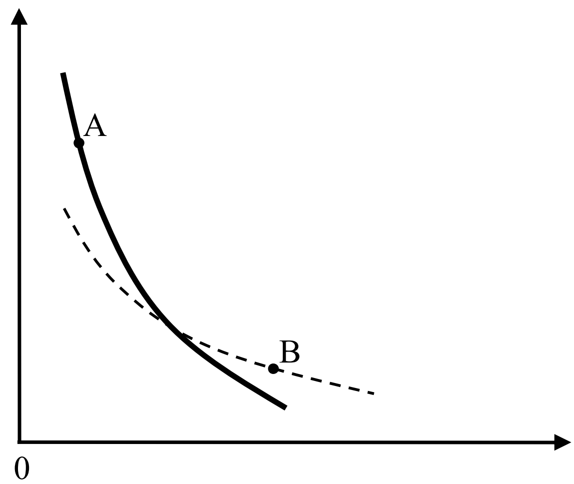


Рисунок 7.2 – Класичний приклад нерівноцінного обміну

Нехай перший учасник має набір товарів A, а другий – набір товарів *B*. Тепер уявимо, що вони помінялися цими наборами. Оскільки набір B лежить вище кривої рівноцінності першого учасника (суцільна лінія), на якій лежить колишній набір *A*, то набір *B* для нього цінніший. Аналогічно і для другого учасника (крива рівноцінності якого зображена пунктирною лінією).

Тепер нехай одним з товарів є гроші. Тоді подібний варіант обміну є покупка товару одним з учасників в іншого учасника і ця угода взаємовигідна.

Система переваг індивіда вказує, який із двох наборів важливіший для нього. У багатьох випадках, однак, бажано і зручно оцінювати привабливість набору товарів кількісно, тобто приписати кожному набору *X* із простору товарів *C* якесь число *u(X)*. Утворюється функція *u:* C→R. Головна вимога до такої функції – вона повинна відображати відношення (слабкої) переваги на *C*, тобто:

$u(X) \le u(Y)$, якщо і тільки якщо $X \preceq Y$;

$u(X) = u(Y)$, якщо і тільки якщо $X \sim Y$, значить і

$u(X) < u(Y)$, якщо і тільки якщо $X \prec Y$.

Така функція *u(X)* називається функцією *корисності*. Працювати з функцією корисності набагато зручніше, ніж із системою переваг.

7.2. Часова цінність і корисність грошей

У перших розділах книги визначена математична еквівалентність грошових сум у різні моменти часу при певній процентній ставці: грошові суми *S(T)* у момент *T* і *s(t)* у момент *t* називаються еквівалентними по ставці порівняння *i*, якщо $S(T) = s(t) \cdot (1+i)^{T-t}$. Можна сказати і поіншому: визначимо еквівалентність на множині пар *(s,t)*, де *s* – грошова сума, а *t* – момент часу, так: пари *(s,t)*, *(S,T)* еквівалентні, якщо $S(T) = s(t) \cdot (1+i)^{T-t}$. Графічно ця еквівалентність показана на рисунку 7.3.

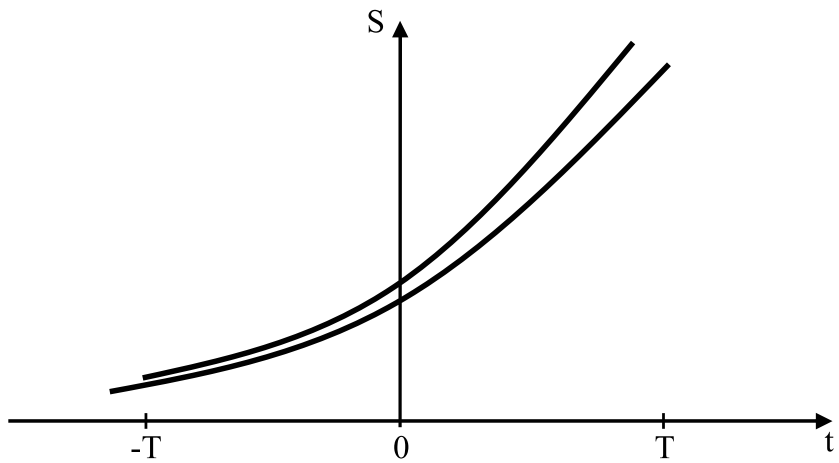


Рисунок 7.3 – Графічне зображення еквівалентності

На площині *t* (час) – *S* (гроші) проведені дві криві байдужості. Кожна із кривої байдужості є клас еквівалентності і задається рівнянням $S(T) = s(t) \cdot (1+i)^{T-t}$. Кожна крива визначається точкою *t=0* свого перетинання з віссю, тобто значенням грошової суми при $t=0$. У фінансових операціях при розрахунках використовують саме математичну еквівалентність: час–гроші.

Отже, можна сказати, що сума s у момент t буде еквівалентна «моментальній» сумі $s(1+i)^{-t}$ При цьому можна обмежитися розглядом одиничної суми і невід'ємних моментів часу. Позначимо «моментальну» цінність одиничної суми в момент t через $V(t)$. Тоді $V(t)=(1+i)^{-t}$, графік цієї функції зображений на рисунку 7.4 кривою *а*.

Функцію $V(t)=(1+i)^{-t}$ назвемо *об'єктивною функцією часової цінності грошей.*

Однак у конкретного індивіда еквівалентність (час–гроші) не обов'язково збігається з математичною. Положення цілком аналогічне відношенню конкретного індивіда до грошей і цін на різні товари: у магазинах висять цінники на товари, і все це створює еквівалентність на просторі наборів товарів разом із грошима – це, так сказати, загальна еквівалентність – аналог математичної. Разом з тим у кожного індивіда своє конкретне відношення до грошей, товару і часу.

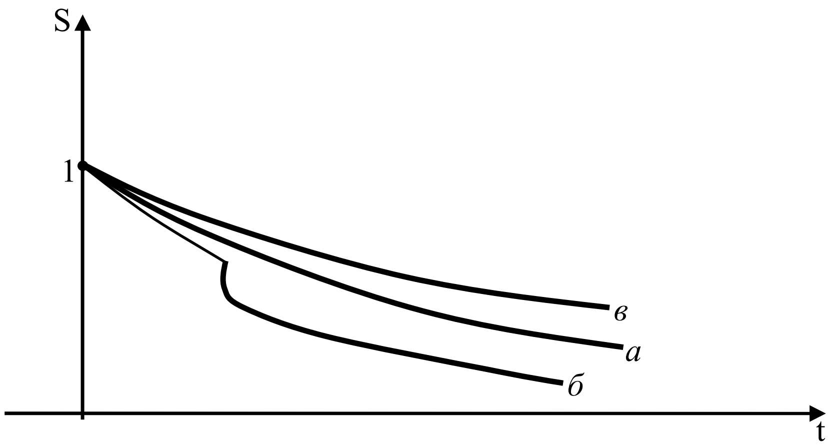


Рисунок 7.4 – Графік об'єктивної функції часової цінності грошей *а*

У конкретного індивіда своя функція часової цінності грошей і вона може відрізнятися від математичної. Наприклад, у людини, що через рік вступить у володіння великою спадщиною, вона може виглядати приблизно, як крива *б* на рисунку 7.4. Зато в людини, у якої через два роки доходи значно зменшаться, графік часової цінності грошей може виглядати приблизно, як крива *в.*

Взагалі можна чисто умовно виділити три типи функцій часової цінності грошей, називаючи їх (відносно до об'єктивної функції часової цінності грошей – крива *0* на рисунку 7.5): *песимістичні, нейтральні і оптимістичні* – криві відповідно I, II і III на рисунку 7.5.

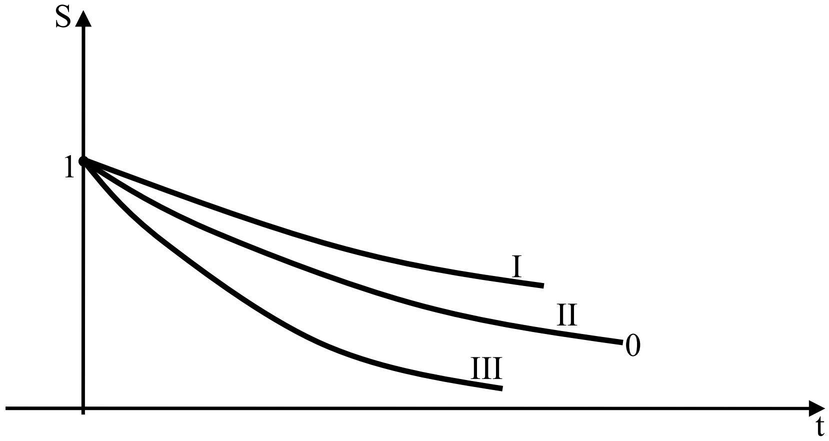


Рисунок 7.5 – Графік песимістичної, нейтральної і оптимістичної кривої

Тепер можна сформулювати принцип давання і узяття грошей у борг: позичають у проміжки більшої цінності грошей, віддають у проміжки меншої цінності. Таким чином, індивіду *A* (рисунок 7.6) (його функція часової цінності грошей зображена кривою *A*) вигідно позичати на проміжку (*a, б)* і віддавати на проміжку (*c, д)*.

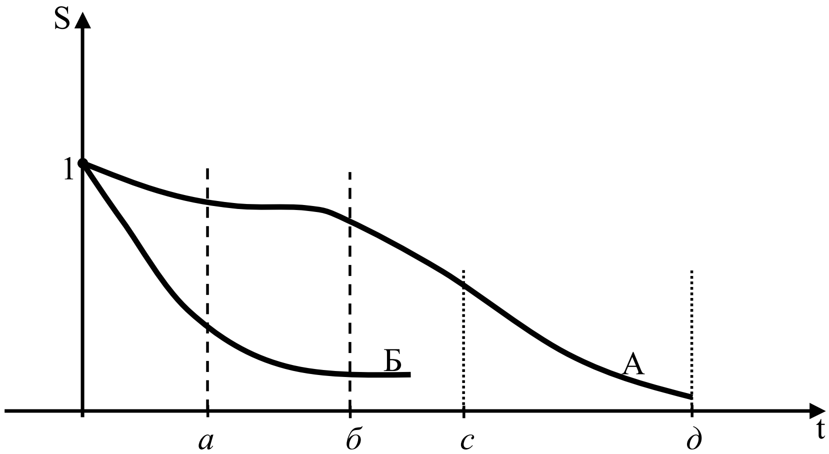


Рисунок 7.6 – Графік часової цінності грошей при даванні і узятті в борг

Розглянемо поняття корисності грошей. Добре відомо різне відношення людей до грошей. Позначимо *d(x)* – корисність грошової суми *x* для індивіда. Тоді зразковий графік *d(x)* показаний на рисунку 7.7.

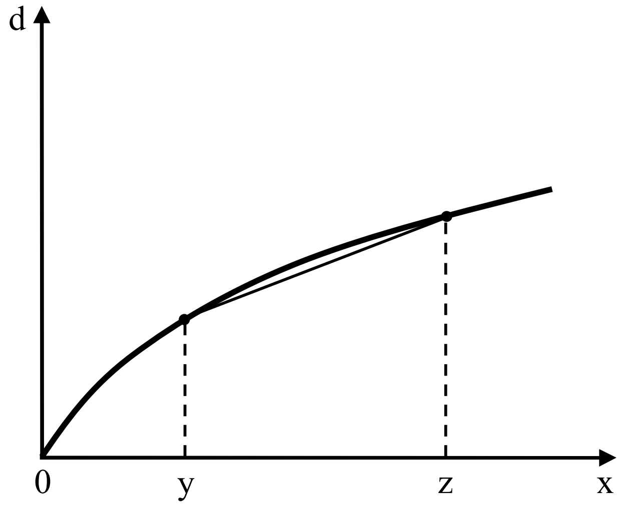


Рисунок 7.7 – Графік корисності грошей

Найважливіша властивість цієї функції – її ввігнутість, тобто $d(z + y) \leq d(z) + d(y)$ для будь-яких сум *z*, *y*, або, іншими словами: відрізок, що з'єднує дві точки графіка функції, лежить нижче цього графіка. Можна сформулювати цю властивість і так: приріст корисності грошей зменшується зі збільшенням їхньої кількості. Це твердження ні звідки не слідує, однак підтверджується всією людською практикою і тому його треба розглядати як аксіому, що характеризує поведінку індивіда.

Якщо функція *d(x)* диференційовна, то з того, що корисність грошей збільшується з ростом їхньої кількості, слідує, що $d'(x)>0$, а сформульована вище аксіома стверджує, що $d''(x)<0$.

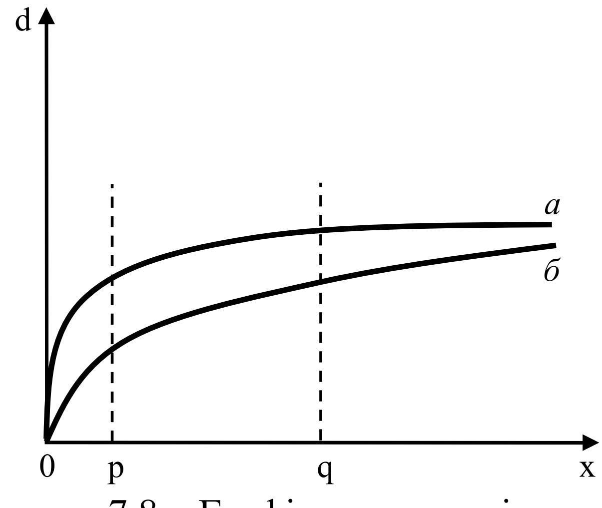


Рисунок 7.8 – Графік корисності грошей

За допомогою функцій корисності грошей можна виразити характерне відношення до них індивіда. Наприклад, нехай графік функції корисності індивіда *А* – це крива *а* на рисунку 7.8, а індивіда *Б* – крива *б* на тому ж рисунку. Тоді можна сказати, що індивід *А* хотів би і буде задоволений, якщо його дохід лежить на проміжку *[p, q]*, при перевищенні такого доходу він починає цінувати гроші менше, можливо, він переключається на інші «радості» життя. Для індивіда *Б* такий стан наступає пізніше.

7.3. Моделі торгів і їх характеристики

До цього моменту розглядалися винятково питання взаємин учасників фінансового ринку без дискусій. Реальне життя, однак, вирує прикладами саме іншого роду: банки борються за клієнтів, підвищуючи ставки; будівельні фірми здешевлюють проекти, намагаючись зробити їх більш привабливими для інвестора; магазини знижують ціни для залучення покупців. Тому всякого роду торги за придбання прав на власність або за переваги при наданні послуг є важливим видом дій на фінансовому ринку. Нижче дається опис найпростіших моделей торгів.

1. Аукціонні торги: дві особи і два об'єкти

На таких торгах для придбання об'єкта, виставленого на аукціон, покупці підвищують ціну не менше, ніж на деяку величину $\Delta>0$, встановлену правилами аукціону, і той, хто запропонує найбільшу ціну купує виставлений об'єкт.

Звичайно виставляється кілька об'єктів підряд, і учасник аукціону повинен розрахувати свої сили, щоб ... що? Яка його ціль? Тобто ще до початку аукціону учасник повинен визначити мету своєї участі в аукціоні.

Для визначеності, а також для спрощення припустимо, що учасників аукціону всього двоє. Тоді мета учасника може бути, наприклад, такою: 1) максимізувати свій дохід; 2) мінімізувати дохід свого конкурента (щоб послабити його); 3) максимізувати різницю свого доходу і доходу конкурента.

Із цих трьох цілей (а їх може бути і більше) найприроднішою представляється перша: максимізувати свій дохід. Почнемо, однак, з аналізу дій, що переслідують третю мету – максимізувати різницю свого доходу і доходу конкурента.

2. Максимізація різниці доходів

Для визначеності припустимо, що на аукціон послідовно виставлені два об'єкти відомої вартості V_1 і V_2. Два учасники *A* і *B* борються за право власності на ці об'єкти. Нехай *A* має S_A гр. од. для участі в аукціоні, а *B* – S_B. Нехай сили *A* і *B* приблизно рівні, математично це виражається так: $1/2 < (S_A / S_B) < 2$.

З'ясуємо, як повинен поводитися учасник *A* для досягнення третьої мети.

Почнемо аналіз аукціонного процесу. Припустимо, що *B* запропонував поточну аукціонну ціну *X*. Чи прийме її *A*? Якщо *A* не захоче платити таку ціну, то *B* купить 1-й об'єкт, у підсумку він отримає прибуток $R_B = V_1 - X$. Але витративши настільки багато на покупку 1-го об'єкта, він уступить 2-й об'єкт *A*, якщо той запропонує хоча б трохи більше, ніж взагалі зможе запропонувати *B*. Отже, в *B* залишилося S_B-X, виходить, якщо *A* запропонує $S_B - X + \Delta$, то *A* купує 2-й об'єкт і його дохід виявляється рівним $R_A = V_2 - (S_B - X + \Delta)$ і різниця доходів дорівнює:

$$R_A - R_B = (V_2 - S_B + X - \Delta) - (V_1 - X) \tag{7.1}$$

Якщо ж *A* не захотів уступити 1-й об'єкт *B* і збільшив ціну запропонувавши $X + \Delta$, і *B* уступив, то *B* виграє торги за 2-й об'єкт, запропонувавши за нього $(S_A - (X + \Delta) + \Delta) = (S_A - X)$. У цьому випадку різниця доходів буде дорівнювати:

$$R_A - R_B = (V_1 - X - \Delta) - [V_2 - (S_A - X)] \tag{7.2}$$

Таким чином, *A* повинен уступити 1-й об'єкт *B*, якщо і тільки якщо різниця доходів у цьому випадку більша, ніж коли *A* йде на підвищення і пропонує за 1-й об'єкт X+Δ. Отже, *A* повинен запропонувати за 1-й об'єкт X+Δ, якщо

$(V_2 - S_B + X - \Delta) - (V_1 - X) \le (V_1 - X - \Delta) - [V_2 - (S_A - X)]$ або

$4X \le 2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B$ або $X \le (2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B)/4$

Отже, *A* буде підвищувати ціну до значення *X*, обумовленого рівністю:

$$X = (2V_1 - 2V_2 + S_A + S_B)/4 \tag{7.3}$$

Далі підвищувати ціну йому недоцільно (не забудьте, що він переслідує третю мету). Для знаходження різниці між доходами значення *X* можна підставити у формулу (7.2) або (7.3) – результат буде однаковий. Шукана різниця між доходами *A* і *B* дорівнює:

$$R_A - R_B = (S_A - S_B)/2 - \Delta \tag{7.4}$$

Дохід *A* при цьому дорівнює $R_A = (V + V)/2 - (S + S)/ - \Delta$.

Приклад 1. Нехай *A* вирішив витратити на аукціоні не більше 1200 грн., а *Б* – не більше 1000. На погляд *A* 1-й предмет, що виставлений на аукціон, коштує 700 грн., 2-й – 800 грн. Тоді *A* буде підвищувати ціну до величини X=(2·(700-800)+ 1200+1000)/4=500 грн. Нехай 1-й предмет куплений за цю ціну. Якщо його купив *B*, то його дохід дорівнює R_B=200 грн., а дохід *A* дорівнює R_A=800-500=300 грн., так що різниця доходів дорівнює 100 грн. Можна переконатися, що така ж різниця доходів і у випадку, коли 1-й предмет був би куплений *A*.

3. Максимізація власного доходу

Нехай метою *A* є максимізація власного доходу. Тепер *A* буде підвищувати ціну і пропонувати X+Δ за 1-й об'єкт, якщо це дозволить збільшити його аукціонний дохід. Виходить, він зробить так, якщо:

$$V_1 - (X + \Delta) \geq V_2 - (S_B - X + \Delta) \tag{7.5}$$

або коли $$X \leq (V_1 - V_2 + S_B)/2 \tag{7.6}$$

Якщо *B* також має на меті максимізацію свого аукціонного доходу, то він запропонує ціну $X + \Delta$, коли:

$$X \leq (V_1 - V_2 + S_A)/2$$

Тому торги скінчаться, як тільки аукціонна ціна перевищить найменшу з величин $(V_1 - V_2 + S_B)/2$ і $(V_1 - V_2 + S_A)/2$.

Якщо $S_B > S_A$, то 1-й предмет буде куплений *A*. Для знаходження його доходу треба підставити $X = (V_1 - V_2 + S_A)/2$ в ліву частину нерівності (7.5). Одержимо:

$$R_A = (V_1 + V_2 - S_A)/2 - \Delta. \tag{7.7}$$

Якщо ж $S_A>S_B$, то 1-й предмет буде куплений *B*. Для знаходження доходу *A* треба підставити $X = (V_1 - V_2 + S_B)/2$ в праву частину нерівності (7.5). Одержимо:

$$R_A = (V1+V2-SB)/2-A.$$

Можна довести, що дохід, одержуваний *A* при максимізації його власного доходу, завжди більше одержуваного ним доходу у випадку, коли він прагне до максимізації різниці свого доходу і доходу свого конкурента *B*.

Приклад 2. Продовжимо розгляд прикладу 1. Оскільки $S_A=1200>S_B=1000$, то *A* повинен купити 1-й об'єкт і його дохід за формулою (7.7) дорівнює $R_A = (700 + 800 - 1000)/2 = 250$ грн. Грунтуючись на формулі (7.5), бачимо, що *A* не повинен пропонувати за 1-й об'єкт більше, ніж (700-800+1000)/2 = 450 грн.

4. Одночасні торги

Відмінність цих торгів від раніше розглянутих – у тому, що аукціон проводиться одночасно по обох об'єктах. Для спрощення припустимо, що обидва учасника *A* і *B* мають одну суму *S* і $S < V_1 + V_2$. У випадку рівності пропозицій переможець визначається жеребом. При цьому як і раніше в основному цікавимося стратегією для *A*.

Оптимальні ціни A_1, A_2 які повинен пропонувати *A* за об'єкти 1-й і 2-й відповідно, визначаються з очевидного принципу: вони повинні забезпечувати рівні доходи. Якщо позначити цей дохід *d*, то $V_1 - A_1 = d = V_2 - A_2$. Хто б не виграв один з об'єктів, за обидва об'єкти буде заплачене *S*. Це дозволяє знайти $d: 2d = V_1 + V_2 - S$ значить $d = (V_1 + V_2 - S)/2$. Звідси знаходимо ціни:

$$A_1 = V_1 - d = (V_1 - V_2 + S)/2, \quad A_2 = V_2 - d = (V_2 - V_1 + S)/2.$$

Якщо яка-небудь ціна виходить від'ємною, то вона приймається рівною 0 і вся сума *S* пропонується за інший об'єкт.

Ця стратегія також оптимальна і для *B*. Якщо обоє учасників будуть дотримуватися цієї оптимальної стратегії, то вони будуть призначати однакові ціни і усе буде визначатися жеребом – по 1-му об'єкті, 2-й об'єкт дістанеться іншому учаснику. Очікуваний дохід кожного з учасників дорівнює при цьому *d*.

Нехай, однак, *B* ухилиться від оптимальної стратегії і запропонує за 1-й об'єкт $V_1 - d + e$. Тоді 1-й об'єкт дістанеться йому, але за 2-й об'єкт він зможе запропонувати тільки $V_2 - d - e$, тому цей об'єкт дістанеться *A*, що запропонує $V_2 - d$. Але в цьому випадку доходи учасників виявляться різними: $R_B = d - e$, $R_A = d > R_B$. Таким чином, використовуючи оптимальну стратегію, кожний з учасників може завжди одержати дохід не менше *d* і завжди може перешкодити іншому учасникові одержати дохід більше *d*.

Приклад 3. Нехай аукціонні об'єкти 1-й, 2-й коштують відповідно 600 і 900 грн., і кожний з учасників має у своєму розпорядженні суму 1000 грн. Тоді *d*=250, значить за 1-й об'єкт не потрібно пропонувати більше 350 грн., а за 2-й – не більше 650 грн. Дохід кожного з учасників при оптимальній його стратегії не менше 250 грн.

5. Торги у яких число осіб велико і може бути невідомим

Такі торги вже дуже близькі до реальних. Звичайно вони проходять за такою схемою. Урядовий заклад запрошує всі зацікавлені компанії взяти участь у приватизаційному торзі. Компанії надсилають закриті конверти, у яких призначають ціну приватизаційному об'єкту. Компанія, що призначила вищу ціну, оголошується переможцем. Існують наукові рекомендації щодо таких торгів, однак здійснення цих рекомендацій на практиці вимагає великої роботи зі збору відомостей про конкурентів. Якщо не вдається одержати відомостей про їхню поведінку на майбутніх торгах, то потрібно аналізувати їхню поведінку на аналогічних торгах у минулому.

Найцікавішим у моделюванні таких торгів є можливість для учасників утворювати коаліції, тобто, змовлятися і діяти спільно всією коаліцією.

Задачі до розділу 7

1. Перевірте, що функції $U(z) = \sqrt{z}$ і $U(z) = Ln(1 + z)$ задовольняють вимогам до функції корисності грошей?
2. Два індивіди мають однакову функцію корисності грошей – $U(z) = \sqrt{z}$. Розділите 1 гр. од. між ними, щоб сумарна корисність була найбільшою.
3. Припустимо, що часова цінність грошей індивіда збігається з об'єктивною при ставці 10% річних, а функція корисності грошей є $U(z) = \sqrt{z}$. Яка для нього корисність суми $400 зараз плюс $500 через рік? *Вказівка.* Треба дисконтувати $500 і потім оцінити корисність сумарної суми.

4. У ринковій економіці, де будь-який набір товарів можна купити, функцію корисності індивіда u(X), визначену на наборах товарів, можна замінити функцією корисності грошей за правилом: u(X)=d(c(X)), де *c(X)* – ціна або вартість набору товарів *X*, а *d(z)* – корисність грошової суми *z* для того ж індивіда. Побудуйте функцію корисності на просторі двох товарів із цінами 2 і 5 гр. од. за одиницю товару і функцією корисності грошей $d(z) = \sqrt{z}$?
5. Розглянемо аукціон із продажу двох об'єктів, які на погляд учасника *А* коштують 2000 і 3000 грн., у той час як у розпорядженні *А* сума 2500, у розпорядженні *Б* – 3000 грн. Знайдіть стратегію *А* щодо максимізації різниці доходів і максимізації власного доходу. Знайдіть аукціонну стратегію *А* щодо мінімізації доходу конкурента?
6. На аукціон виставлені два предмети. Два учасники мають у своєму розпорядженні однакові грошові суми. Кожний з них подає закритий конверт, у якому написано, яку суму пропонує даний учасник за кожний із цих предметів. Хто запропонує за даний предмет більше, той і стає його власником. Які стратегії учасників? Розгляньте окремий випадок, коли обидва предмети зовсім однакові. Чи повинні влаштовувачі аукціону передбачити можливість змови учасників? Може достатньо зобов'язати учасників аукціону вказати в конверті такі суми, щоб разом вони були не менші деякої заданої?

ЧАСТИНА 2. ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНІ РОЗРАХУНКИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розділ 1. Зміна розрахункових схем в умовах невизначеності

1.1. Плаваюча ставка відсотка

Розглянемо три варіанти нарахування відсотків за користування грошима на одиничному проміжку:

1) наприкінці проміжку по ставці *i* нараховуються відсотки;
2) в кінці проміжку нараховуються відсотки по випадковій ставці, у середньому ставка дорівнює *i* відсотків;
3) відсотки нараховуються двічі: половина – незадовго до кінця проміжку і друга половина – на такій же часовій відстані після закінчення проміжку.

Задача, що розглядається досить абстрактна, однак з неї можна зробити прозорі і нескладні висновки.

Перший варіант нарахування відсотків – це варіант детермінованого фінансового аналізу, тобто аналізу в умовах визначеності. Тому проаналізуємо другий і третій варіанти. Досить обмежитися розглядом одиничної грошової суми.

Другий варіант. Нехай *f(x)* – щільність розподілу випадкової ставки *X*, тоді процентні гроші, що нараховуються, є випадковою $\mathrm{I(X)=X}$ величиною із *щільністю* *f(x)* і математичним очікуванням $\mathrm{M[I]=M[X]=i}$. Інакше кажучи, детермінований еквівалент випадкової ставки є *i*.

При розгляді *третього варіанта* нехай перша порція процентних грошей по ставці $\mathrm{i/2}$ нараховується в момент 1-ε, а друга, так само по ставці $\mathrm{i/2}$, у момент $1+\varepsilon$, де ε – невелике додатне число. Тоді в перший раз нараховані процентні гроші, $\mathrm{I_1=i/2}$ у другий раз так само $\mathrm{I_2=i/2}$. Наведемо ці суми до моменту 1, для чого $\mathrm{I_1}$ помножимо на $\mathrm{(1+i)^{\varepsilon}}$, а $\mathrm{I_2}$ помножимо на $\mathrm{(1+i)^{-\varepsilon}}$. Одержуємо еквівалент сумарних процентних грошей у момент $1-\mathrm{(i/2)\cdot(1+i)^{\varepsilon}+(i/2)\cdot(1+i)^{-\varepsilon}}$. Оскільки $\mathrm{(1+i)^{\varepsilon}+(1+i)^{-\varepsilon}>2}$, то отримані процентні гроші більші, ніж *i*, тобто детермінований варіант таким чином нараховує процентну ставку більшу, ніж *i*.

Як можна представити другий і третій варіанти? Нехай банк має багато філій, відносно самостійних у частині виплати відсотків. Другий варіант утворюється, коли всі вони нараховують відсотки наприкінці проміжку, але самі відсотки випадкові, хоча в середньому по всьому банку процентна ставка дорівнює i (усереднення за географічною ознакою). Такий варіант назвемо випадковими відсотками. Третій варіант утворюється, коли в кожній філії нараховуються ті самі відсотки, але день нарахування випадковий. Така випадковість є нарахування відсотків (невипадкових) у випадковий момент часу (тут усереднення за часом нарахування відсотків).

Ітак, детермінований еквівалент випадкових відсотків (другий варіант) дорівнює математичному очікуванню випадкової величини відсотків, які нараховуються. Детермінований еквівалент випадкового (у часі) нарахування відсотків (третій варіант) більш, ніж математичне очікування (по моменту часу) відсотків, які нараховуються.

Аналогічні висновки випливають із приводу різних варіантів дисконтування до сучасного моменту майбутніх сум. Розглянемо три варіанти виплати позики (у борг узята одинична сума), узятої на одиничний проміжок часу по ставці i відсотків:

1) наприкінці проміжку виплачується сума $(1+i)$ – детермінований варіант;
2) наприкінці проміжку виплачується випадкова сума, у середньому рівна $(1+i)$;
3) сума виплачується двічі: половина – незадовго до кінця проміжку і друга половина – на такій же часовій відстані після закінчення проміжку.

Аналіз, подібний наведеному вище, показує, що в другому варіанті середня величина дисконтованих до сучасного моменту виплат дорівнює 1, тобто другий варіант еквівалентний детермінованому варіанту; у третьому варіанті середня величина виявляється більше, ніж 1. Отже, для кредитора переважніше третій варіант. Це ж вірно і для випадку трьох варіантів виплати дивідендів на початку розділу – для власника акцій переважніше третій варіант.

Все це добре відомо фінансистам і може бути виражено словами: *якщо можливо, свій борг плати пізніше, а борги собі збирай раніше.*

1.2. Випадкові потоки платежів

Такі потоки можуть бути досить різноманітні:

1) повністю детермінований потік – моменти платежів і величини платежів повністю визначені;
2) частково детермінований потік – повністю визначені моменти платежів або величини платежів і т.ін.

Обмежимося розглядом двох прикладів.

Приклад 1. За договором протягом 5 років наприкінці кожного кварталу видавництво переводить на рахунок автора випадкову суму грошей (залежить від числа проданих книг). Припустимо, що ця сума рівномірно розподілена від 1000 до 1400 грн. Як знайти сучасну величину цієї ренти?

Рішення. Тому що момент платежів точно визначений, то для розрахунків можна замінити потік реальних платежів потоком їхніх математичних очікувань і використати відповідну формулу з детермінованого аналізу. Тому що перекладна сума рівномірно розподілена, то її математичне очікування є середина проміжку розподілу, тобто 1200 грн. Для простоти нехай квартальна ставка складних відсотків i=3%, тоді шукана сучасна величина дорівнює:

$$1200 \cdot a(20{,}3) = 1200 \cdot 14{,}877 = 17852 \text{ грн.}$$

Приклад 2. Припустимо, що одиничні платежі ідуть один за одним через випадкові проміжки часу, які розподілені за показовим законом з параметром $\lambda > 0$ (пуасоновский потік платежів). Знайдемо сучасну величину такого випадкового потоку платежів (точніше, математичне очікування цієї величини).

Дисконтуємо до сучасного моменту перший платіж. Для цього треба підрахувати інтеграл:

$$\int_0^\infty (1+i)^{-t} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \lambda e^{-t(\lambda + \mathrm{Ln}(1+i))} dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \lambda e^{-t(\lambda + \mathrm{Ln}(1+i))} dt =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{\lambda}{\lambda + \mathrm{Ln}(1+i)} \cdot e^{-t(\lambda + \ln(1+i))} \Big|_0^A \right) = \lambda / [\lambda + \mathrm{Ln}(1+i)].$$

Згадаємо, що параметр λ у показовому законі є зворотня величина до математичного очікування, і одержимо, що $\lambda = 1/T$, де T – середній час між платежами, і остаточно, що математичне очікування сучасної величини першого платежу дорівнює $1/[1 + T \cdot \mathrm{Ln}(1+i)]$.

Оскільки проміжок часу між платежами розподілений однаково, то математичне очікування сучасної величини другого платежу дорівнює $1/[1+T\cdot Ln(1+i)]^2$, третього – $1/[1+T\cdot Ln(1+i)]^3$, і т.ін. Сума всіх цих величин і дасть шукану величину. Оскільки $1/[1+T\cdot Ln(1+i)]<1$, то члени суми є члени нескінченно убутної геометричної прогресії і, виходить, вся сума дорівнює $1/[T\cdot \ln(1+i)]$.

Зокрема, при $T=1$ одержуємо $1/\ln(1+i)$. Помітимо, що якби потік був невипадковим і платежі випливали б один за одним через одиничний проміжок часу (тоді частота платежів була б тою самою), то сучасна величина такого потоку була б $1/i$. Оскільки $\ln(1+i)<i$, то сучасна величина випадкової ренти більша, ніж регулярна.

Потоки платежів з випадковим часом платежу часто зустрічаються на практиці. Наприклад, такий потік платежів оплати за квартиру – адже рідко хто платить за квартиру в строго визначений день. Якби в прикладі 1 видавництво переводило авторові гроші за кожну продану тисячу екземплярів книги, то вийшов би потік невипадкових платежів у випадкові моменти часу.

Ще одним важливим прикладом випадкового потоку (невипадкових) платежів є потік виплат страхових сум на випадок смерті родичам померлих. Аналізом подібних потоків платежів займається так звана *актуарна математика*.

1.3. Ризикові інвестиційні процеси

Якщо майбутні платежі ризиковані, тобто не є жорстко визначеними, то інвестори зменшують сьогоднішню оцінку майбутніх доходів. Тим самим для оцінювання сьогоднішнього значення майбутніх доходів приходиться застосовувати збільшену ставку дисконтування. Найпростіше – зробити класифікацію проектів на низькоризикові, середньоризикові і високоризикові і приписати кожній групі деякий добавок до звичайного коефіцієнта дисконтування. Наприклад, для низькоризикових до ставки додається 2% , до середньоризикових 4%, до високоризикових 6%. Цілком ясно, що «добавок» залежить від величини звичайного коефіцієнта дисконтування. Але сам цей коефіцієнт залежить від темпів інфляції, від довіри до уряду і інших факторів. У деяких моделях фінансового ринку це питання вирішується по-своєму. З цього слідує висновок: щоб збільшити привабливість висунутих проектів, фірма повинна піклуватися про зменшення цього ризикованого «додатку». Для цього вона повинна притягати до себе довіру потенційних інвесторів.

Притягнення довіри включає своєчасну виплату дивідендів, дотримання прав акціонерів і інше. Особливо це важливо для фірми, яка наміряється довго працювати. Такій фірмі просто необхідно бути чесною, їй це вигідно.

1.4. Підрахунок прибутковості ймовірнісних операцій

У детермінованому аналізі прибутковість *d* фінансової операції визначається з рівняння $K=H(1+d)$ або $d=(K\text{-}H)/H=K/H-1$, де H, K – грошові оцінки відповідно початку операції (витрати, інвестиції) і кінця операції (дохід, нарощений капітал). Загалом кажучи, ці величини також можуть бути невизначені. Однак початкова оцінка частіше все-таки точно відома. Невизначеність кінцевої оцінки може бути двоякою: неповністю відома її величина, але момент закінчення операції відомий точно; або ж відома повністю її величина, але скінчитися операція може у випадковий момент. Підрахунок прибутковості операції у відсотках річних у цих двох випадках проводиться по-різному. У першому випадку замість кінцевої оцінки використовується її математичне очікування. Для ілюстрації підрахунку прибутковості в другому випадку розглянемо такий приклад.

Приклад 3. Початковий капітал торговця дорівнює \$1000. Досвідчені люди сказали йому, що в результаті поїздки за товаром і його наступної реалізації капітал може з рівною ймовірністю зрости у два рази, не змінитися або зменшитися у два рази (з відрахуванням супутніх витрат). Необхідно знайти середню очікувану прибутковість планованої операції.

Рішення. Математичне очікування кінцевої оцінки капіталу дорівнює (2000+1000+500)/3=3500/3, так що середня очікувана прибутковість буде (3500/3-1000)/1000=500/3000=17%.

Приклад 4. Запас золота в родовищі відомий, як і початкові інвестиції в його розробку. Фактично повна віддача родовища теж фіксована, отже, прибутковість (у відсотках річних) буде залежати від тривалості виробітку родовища, чим довше буде вироблятися родовище, тим менша прибутковість.

У випадку, коли початкова оцінка операції не може бути точно визначена, прибутковість операції може бути розрахована як математичне очікування прибутковості варіантів операції з урахуванням їх ймовірностей.

Приклад 5. Базовий варіант операції, ймовірність якого оцінюється в 0,9, передбачає витрати \$10000, а прибуток – \$3000, отже, його прибутковість дорівнює 0,3; з ймовірністю 0,1 можливий і інший варіант, при якому витрати рівні \$20000, а прибуток дорівнює \$10000. Яка середня очікувана прибутковість операції?

Рішення. Ця прибутковість дорівнює $0{,}9 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}32$.

1.5. Поняття детермінованого еквівалента фінансового показника

Нехай f – будь-який фінансовий показник (ставка відсотка, прибутковість, строк окупності і т.ін.), який є випадковою величиною. Припускається, що фінансова операція, показником якої є f, може бути повторена велику кількість разів (теоретично необмежене число разів). Тоді детермінований еквівалент фінансового показника f є таке значення його в детермінованому фінансовому аналізі, яке дає в середньому той же результат, що й він сам.

Часто детермінованим еквівалентом є математичне очікування f.

Зауваження. Реально ситуація із плаваючими процентними ставками або випадковими потоками платежів ще більш складна, ніж описана вище. Більшість інвесторів не згодні заміняти щось випадкове його математичним очікуванням і вимагають більшого. Адже всяка невизначеність пов'язана з ризиком і тому інвестори для ризикових операцій вимагають більшої прибутковості, для дисконтування до сучасного моменту майбутніх доходів по інвестиційному проекту вони вимагають застосовувати більшу ставку (тим самим, зменшуючи значення майбутніх доходів) і т.ін. Здійснити на практиці урахування цих вимог інвесторів досить складно.

Задачі до розділу 1

(відсутні дані – на розсуд читача)

1. Знайдіть детермінований варіант процентної ставки, якщо її нарахування відбувається двічі: перша половина в момент 0,9; друга половина у момент 1,1?

2. Знайти детермінований варіант процентної ставки, якщо з ймовірністю 1/3 її нарахування відбувається в момент 0,9, і з ймовірністю 2/3 – у момент 1,1? *Рішення.* Нехай величина ставки дорівнює i, а сума одинична, тоді математичне очікування нарощеної суми в момент 1 дорівнює: $(1/3)\cdot i\cdot(1+i)^{0.1}+(2/3)\cdot i\cdot(1+i)^{-0,1}=i\cdot[(1/3)\cdot(1+0,1\cdot i+\ldots)+$ $+(2/3)\cdot(1-0,1\cdot i+\ldots)]=i\cdot[1-i/30+\ldots]$, тобто детермінований варіант менше i.
3. Знайдіть детермінований варіант процентної ставки, якщо момент її нарахування рівномірно розподілений на часовому відрізку [0,9; 1,1]?
4. Проаналізуйте інвестиційний проект (-1000, 600, 600), процентна ставка 8%. Чи окупаються інвестиції? Експерти визнали проект середньоризковим і збільшили відсоток дисконтування майбутніх доходів до 13%. Чи окупляться інвестиції в цьому випадку?
5. У випадковий момент, рівномірно розподілений на відрізку [0,1], приходить платіж 1. Знайдіть математичне очікування його сучасної величини?
6. Знайдіть математичне очікування сучасної величини випадкової ренти: платежі 1000 гр. од. здійснюються раз у рік: з рівною ймовірністю або 1 жовтня, або 1 грудня?
7. Знайдіть математичне очікування сучасної величини випадкової ренти, у якій момент річного платежу рівномірно розподілений в даному році.
8. Сьогодні вдень ціна акції дорівнює 100 грн. За добу ціна може вирости на 10% з ймовірністю 1/3, з такою ж ймовірністю зменшиться в 1,1 рази і з такою ж ймовірністю 1/3 залишитися рівною 100 грн. Знайдіть розподіл ціни акції завтра і післязавтра?
9. На початку року страхова компанія кладе в банк 1 гр. од. під i% річних. У будь-який момент року можливий страховий випадок, коли компанії доведеться виплатити 1 гр. од. страхового відшкодування. Знайдіть математичне очікування суми на рахунку компанії під кінець року?
10. Проаналізуйте інвестиційний проект, початкові інвестиції в який рівні 1 у момент 0, а потік майбутніх доходів є пуасоновский потік одиничних платежів із щільністю 1 платіж в од. часу. Ставка відсотка дорівнює i?
11. Припустимо, що вкладник строкового річного вкладу може в будь-який момент затребувати свій внесок (в Україні це можна, у багатьох інших країнах не можна). При цьому банк виплачує за дійсний

час внеску відсотки з розрахунку 10% річних замість 30% по строковому вкладу. Який у середньому загублений відсоток вкладника? *Рішення.* Припускаємо, що момент відкликання внеску рівномірно розподілений протягом року. Якщо внесок відзивається в момент *x*, то виплачені відсотки рівні $(1+0,1)^x$, а повинні були бути рівні $(1+0,3)^x$. Цю різницю проінтегруємо, маючи на увазі одиничну щільність розподілу моменту відкликання внеску. Одержимо: $\int_0^1 (1,3^x - 1,1^x)dx = 0,3 \cdot \ln 1,3 - 0,1 \cdot \ln 1,1 \approx 0,093$, тобто близько 9,3%.

Розділ 2. Математичні основи фінансового аналізу в умовах невизначеності (визначення ризику)

Невизначеність привносить ризик. *Ризик* – одне з найважливіших понять, що супроводжує будь-яку активність діяльності людини. Разом з тим це одне із самих неясних, багатозначних і заплутаних понять. Однак, незважаючи на його неясність, багатозначність і заплутаність, у багатьох ситуаціях суть ризику дуже добре розуміється і сприймається. Ці ж якості ризику є серйозною перешкодою для його кількісної оцінки, яка у багатьох випадках необхідна і для розвитку теорії і на практиці.

Розглянемо класичну схему прийняття рішень в умовах невизначеності, характеристики ймовірносних (докладніше див. частину 3 посібника) фінансових операцій і загальні методи зменшення ризиків.

2.1. Класична схема оцінки фінансових операцій

1. Визначення і сутність ризику

Нагадаємо, що фінансовою називається операція, початковий і кінцевий стани якої мають грошову оцінку, і ціль проведення якої полягає в максимізації доходу – різниці між кінцевою і початковою оцінками (або якого-небудь іншого подібного показника).

Майже завжди фінансові операції проводяться в умовах невизначеності і тому їхній результат неможливо передбачити заздалегідь. Тому фінансові операції ризиковані: при їхньому проведенні можливі як прибуток, так і збиток (або не дуже великий прибуток у порівнянні з тим, на який сподівалися).

Той хто проводить операцію (приймає рішення) називається *ЛПР – людина, яка приймає рішення*. Природно, ЛПР зацікавлена в успіху операції і є за неї відповідальною (іноді тільки сама перед собою). У багатьох випадках ЛПР – це інвестор, що вкладає гроші в банк, у якусь фінансову операцію, купує цінні папери і т.ін.

Операція називається ризикованою, якщо вона може мати декілька результатів, не рівноцінних для ЛПР.

Приклад 1. Розглянемо три операції з однією і тією ж множиною двох результатів – альтернатив *A*, *B*, які характеризують доходи, одержувані ЛПР.

	A	B
Q_1:	-5	25
Q_2:	-10	50
Q_3:	15	20

Всі три операції ризиковані. Зрозуміло, що ризикованими є перша і друга операції, тому що в результаті кожної операції можливі збитки. Але чому повинна бути визнана ризикованою третя операція? Адже вона обіцяє тільки позитивні доходи ЛПР? А ось чому. Розглядаючи можливі варіанти закінчення третьої операції, бачимо, що можемо одержати дохід у розмірі 20 одиниць, тому можливість одержання доходу в 15 одиниць розглядається як невдача, як ризик недобрати 5 одиниць доходу.

Отже, поняття ризику обов'язково припускає, що ризикує – той, до кого цей ризик відноситься, хто стурбований результатом операції. Сам ризик виникає, тільки якщо операція може зікінчитися варіантами не рівноцінними для нього, незважаючи на, можливо, всі його зусилля щодо управління цією операцією (про систему переваг індивіда див. частину 1, п. 7.1.) У подальшому викладі всюди будемо вважати, що варіанти закінчення операцій відрізняються доходами, одержуваними ЛПР, і цього досить для їхнього розрізнення і оцінювання ризику операції (і тільки в частині 2, розділі 5 в п. 5.2 системі переваг індивіда, його функції корисності і відношенню його до ризику буде приділено більше уваги).

Отже, в умовах невизначеності операція отримує ще одну характеристику – ризик. Як оцінити операцію з погляду її прибутковості і ризику? На це питання не так просто відповісти, головним чином через багатогранність поняття ризику. Існує кілька різних способів такого оцінювання. Розглянемо один з таких підходів.

2. Матриці наслідків і ризиків

Допустимо, розглядається питання про проведення фінансової операції. Неясно, чим вона може закінчитися. У зв'язку із цим проводиться аналіз декількох можливих рішень і їхніх наслідків. Так приходимо до наступної загальної схеми прийняття рішень (у тому числі фінансових) в умовах невизначеності.

Припустимо, що ЛПР розглядає кілька можливих рішень $i=1,...,m$. Ситуація невизначена, зрозуміло лише те, що є в наявності якийсь із варіантів $j=1,...,n$. Якщо буде прийняте i-е рішення, а ситуація є j-я, то фірма, очолювана ЛПР, одержить дохід q_{ij}. Матриця $Q=(q_{ij})$ називається *матрицею наслідків* (можливих рішень). Яке ж рішення потрібно прийняти ЛПР? У цій невизначеній ситуації можуть бути висловлені лише деякі рекомендації попереднього характеру. Вони не обов'язково будуть прийняті ЛПР. Багато чого буде залежати, наприклад, від його схильності до ризику. Але як оцінити ризик у даній схемі?

Допустимо, ми хочемо оцінити ризик, що несе *i*-е рішення. Нам невідома реальна ситуація. Але якби ми її знали, то вибрали б найкраще рішення, тобто рішення, що приносить найбільший дохід. Якщо ситуація *j-а*, то було б ухвалене рішення, що дає дохід $q_j = \max_i q_{ij}$. Виходить, приймаючи *i*-е рішення, ми ризикуємо одержати не q_j, а тільки q_{ij}, тобто прийняття *i*-го рішення несе ризик недобрати $r_i j = q_i - q_{ij}$. Матриця $R = (r_{ij})$ називається *матрицею ризиків*.

Приклад 2. Нехай матриця наслідків є:

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Складемо матрицю ризиків. Маємо $q_1 = \max_i q_{i1} = 8$, $q_2 = 5,\ \ q_3 = 8,\ \ q_4 = 12$. Отже, матриця ризиків є:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Аналіз зв'язаної групи рішень в умовах повної невизначеності

Ситуація повної невизначеності характеризується відсутністю якої б то не було додаткової інформації (наприклад, про ймовірності тих або інших варіантів реальної ситуації). Які ж існують правила-рекомендації щодо прийняття рішень у цій ситуації?

Правило Вальда (правило крайнього песимізму). Розглядаючи *i*-е рішення, будемо думати, що насправді ситуація складається найгірша, тобто ситуація, яка приносить найменший дохід: $a_i = \min_j q_{ij}$. Але тепер виберемо рішення i_0 с найбільшим a_{i_0}. Отже, правило Вальда рекомендує прийняти рішення i_0 таке, що $a_{i_0} = \max_i a_i = \max_i(\min_j q_{ij})$. Так, у прикладі 2 маємо $a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 1$. Тепер із чисел 2, 2, 3, 1 знаходимо максимальне – 3. Виходить, правило Вальда рекомендує прийняти 3-е рішення.

Правило Севіджа (правило мінімального ризику). При застосуванні цього правила аналізується матриця ризиків $R = (r_{ij})$. Розглядаючи *i*-е рішення, будемо думати, що насправді складається ситуація максимального ризику $b_i = \max_j r_{ij}$. Але тепер виберемо рішення i_0 с найменшим b_{i_0}. Отже, правило Севіджа рекомендує прийняти рішення i_0 таке, що $b_{i_0} = \min_i b_i = \min_i(\max_j r_{ij})$. Так, у прикладі 2 маємо

$b_1 = 8,\ b_2 = 6,\ b_3 = 5,\ b_4 = 7$. Тепер із чисел 8, 6, 5, 7 знаходимо мінімальне – 5. Виходить, правило Севіджа рекомендує прийняти 3-е рішення.

Правило Гурвіца (зважує песимістичний і оптимістичний підходи до ситуації). Приймається рішення *i*, на якому досягається максимум $\left\{\lambda \min_j q_{ij} + (1 - \lambda \max_j q_{ij})\right\}$, де $0 \le \lambda \le 1$. Значення λ вибирається із суб'єктивних міркувань. Якщо λ наближається до 1, то правило Гурвіца наближається до правила Вальда, при наближенні λ до 0 правило Гурвіца наближається до правила «рожевого оптимізму». У прикладі 2 при $\lambda = 1/2$ правило Гурвіца рекомендує друге рішення.

4. Аналіз зв'язаної групи рішень в умовах часткової невизначеності

Припустимо, що в розглянутій схемі відомі ймовірності p_j того, що реальна ситуація розвивається за варіантом *j*. Саме таке положення називається частковою невизначеністю. Як тут приймати рішення? Можна вибрати одне з таких правил.

Правило максимізації середнього очікуваного доходу. Дохід, одержуваний фірмою при реалізації *i*-го рішення, є випадковою величиною Q_i з рядом розподілу $\left|\frac{q_{i1}}{p_1}\right| \ldots \left|\frac{q_{in}}{p_n}\right|$. Математичне очікування $M[Q_i]$ і є середній очікуваний дохід, позначуваний також $\overline{Q}_i$. Отже, правило рекомендує прийняти рішення, що приносить максимальний середній очікуваний дохід.

Припустимо, що в схемі прикладу 2 ймовірності є 1/2, 1/6, 1/6, 1/6. Тоді $\overline{Q}_1 = 29/6$, $\overline{Q}_2 = 25/6$, $\overline{Q}_3 = 7$, $\overline{Q}_4 = 17/6$. Максимальний середній очікуваний дохід дорівнює 7 і відповідає третьому рішенню.

Правило мінімізації середнього очікуваного ризику. Ризик фірми при реалізації *i*-го рішення є випадковою величиною R_i з рядом розподілу $\left|\frac{r_{i1}}{p_1}\right| \dots \left|\frac{r_{in}}{p_n}\right|$. Математичне очікування $M[R_i]$ і є середній очікуваний ризик, позначуваний також $\overline{R}_i$. Правило рекомендує прийняти рішення, що спричиняє мінімальний середній очікуваний ризик.

Обчислимо середні очікувані ризики при зазначених вище ймовірностях. Одержуємо $\overline{R}_1 = 20/6$, $\overline{R}_2 = 4$, $\overline{R}_3 = 7/6$, $\overline{R}_4 = 32/6$. Мінімальний середній очікуваний ризик дорівнює 7/6 і відповідає третьому рішенню.

Зауваження. Відмінність часткової (ймовірнісної) невизначеності від повної невизначеності дуже суттєва. Звичайно, прийняття рішень за правилами Вальда, Севіджа, Гурвіца ніхто не вважає остаточними, найкращими. Це тільки лише перший крок, деякі попередні міркування. Далі намагаються довідатися щось про варіанти реальної ситуації, у першу чергу про можливості того або іншого варіанта, про його ймовірності. Але коли ми починаємо оцінювати ймовірність варіанта, це вже припускає повторюваність розглянутої схеми прийняття рішень: це вже було в минулому, або це буде в майбутньому, або це повторюється десь у просторі, наприклад, у філіях фірми.

5. Оптимальність по Парето

Отже, при спробі вибрати найкраще рішення ми зіштовхнулися в попередньому підрозділі з тим, що кожне рішення має дві характеристики – середній очікуваний дохід і середній очікуваний ризик. Тепер маємо оптимізаційну двокритеріальну задачу з вибору найкращого рішення.

Існує кілька способів постановки таких оптимізаційних задач.

Розглянемо таку задачу в загальному вигляді. Нехай A – деяка множина операцій, кожна операція a має дві числові характеристики $E(a)$, $r(a)$ (ефективність і ризик, наприклад) і різні операції обов'язково розрізняються хоча б однією характеристикою. При виборі найкращої операції бажано, щоб E було більше, а r менше.

Будемо говорити, що операція *a* домінує операцію *b*, і позначати $a \succ b$ якщо $E(a) \geq E(b)$ і $r(a) \leq r(b)$ і хоча б одна із цих нерівностей строга. При цьому операція *a* називається *домінуючою*, а операція *b* – *доміновною*. Ясно, що ні при якому розумному виборі найкращої операції доміновна операція не може бути визнана такою. Отже, найкращу операцію треба шукати серед недоміновних операцій. Множина цих операцій називається множиною Парето або *множиною оптимальності за Парето*.

Має місце надзвичайно важливе твердження.

Ттвердження. На множині Парето кожна з характеристик *E*, *r* – (однозначна) функція іншої. Інакше кажучи, якщо операція належить множині Парето, то за однією її характеристикою можна однозначно визначити іншу.

Доведення. Нехай a, b – дві операції з множини Парето, тоді *r(a)* і *r(b)* – числа. Припустимо, що $r(a) \leq r(b)$, тоді *E(a)* не може дорівнювати *E(b)*, тому що обидві точки *a*, *b* належать множині Парето. Доведено, що за характеристикою *r* можна визначити характеристику *E*. Так само просто доводиться, що за характеристикою *E* можна визначити характеристику *r*.

Продовжимо аналіз прикладу 2. Розглянемо графічну ілюстрацію. Кожну операцію (рішення) $(\overline{R}, \overline{Q})$ відзначимо як точку на площині – дохід відкладаємо вверх по вертикалі, а ризик – вправо по горизонталі (рисунок 2.1).

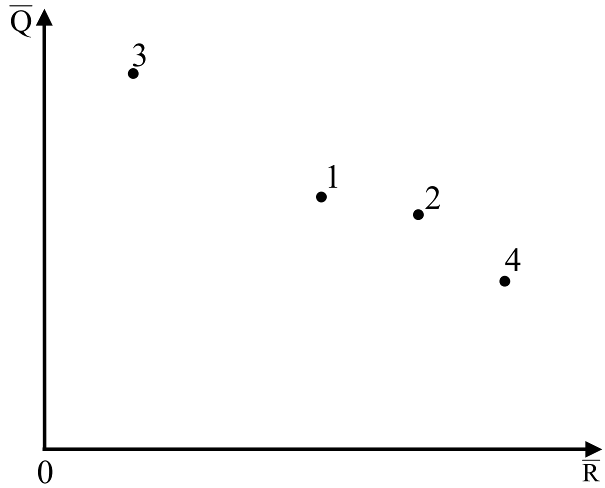


Рисунок 2.1 – Аналіз прикладу 2. Оптимальність за Парето

Одержали чотири точки і продовжуємо аналіз прикладу 2. Чим вище точка $(\overline{R}, \overline{Q})$, тим більше дохідна операція, чим точка правіше, тим більше вона ризикова. Виходить, потрібно вибирати точку вище і лівіше. У нашому випадку множина Парето складається тільки з однієї третьої операції.

Для знаходження кращої операції іноді застосовують відповідну умовну формулу для *операції Q* з характеристиками $(\overline{R}, \overline{Q})$, що дає одне число, за яким і визначають кращу операцію. Наприклад, умовна формула є $f(Q) = 2\overline{Q} - \overline{R}$. Тоді для операцій (рішень) прикладу 2 маємо:

$f(Q_1) = 2 \cdot 29/6 - 20/6 = 6{,}33;\quad f(Q_2) = 4{,}33;\quad f(Q_3) = 12{,}83;\quad f(Q_4) = 0{,}33.$
Видно, що третя операція – краща, а четверта – гірша.

Умовна формула виражає відношення ЛПР до доходу і ризику. Якщо ЛПР застосовує тільки що розглянуту формулу, то він згодний на збільшення ризику операції на дві одиниці, якщо дохід операції збільшується при цьому не менше ніж на одну одиницю. Зрозуміло, така формула може передати відношення ЛПР до доходу і ризику лише приблизно.

6. Правило Лапласа

Таке правило застосовують іноді в умовах повної невизначеності: всі невідомі ймовірності p_j вважають рівними. Після цього можна вибрати яке-небудь із двох наведених вище правил – рекомендацій прийняття рішень, тобто правило максимізації середнього очікуваного доходу або правило мінімізації середнього очікуваного ризику.

2.2. Характеристики ймовірносних фінансових операцій

Фінансова операція називається *ймовірнісною*, якщо існує ймовірність кожного її результату. Прибуток такої операції – різниця кінцевих і початкової грошових її оцінок – є випадковою величиною. Для такої операції вдається ввести кількісну оцінку ризику, яка відповідає нашій інтуїції.

1. Кількісна оцінка ризику

У попередньому підрозділі дано визначення ризикованої операції, як такої, що принаймні має два результати, не рівноцінних у системі переваг ЛПР. У контексті даного розділу замість ЛПР можна вживати також термін *«інвестор»* або будь-який подібний до нього, що відображає зацікавленість виконуючого операцію (можливо, пасивно) у її успіху.

При дослідженні ризику операції зустрічаємося з фундаментальним твердженням: *Кількісна оцінка ризику операції можлива тільки при ймовірнісній характеристиці множини результатів операції.*

Приклад 3. Розглянемо дві ймовірнісні операції:

$$Q_1: \begin{array}{|c|c|} -5 & 28 \\ \hline 0{,}01 & 0{,}99 \end{array} \qquad Q_2: \begin{array}{|c|c|} 15 & 25 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$$

Безсумнівно, ризик першої операції менше ризику другої операції. Що ж стосується того, яку операцію вибере ЛПР, це залежить від його схильності до ризику.

2. Ризик окремої операції

Оскільки ми хочемо кількісно оцінити ризикованість операції, а це неможливо зробити без ймовірнісної характеристики операції, то її результатам припишемо ймовірності і оцінимо кожний результат доходом, що ЛПР одержує при цьому результаті. У підсумку одержимо випадкову величину *Q*, яку природно назвати випадковим доходом операції, або просто випадковим доходом. Поки обмежимося дискретною випадковою величиною (далі будемо позначати д.в.в.):

$$Q_1: \begin{array}{|c|} q_1 \\ \hline p_1 \end{array} \; \ldots \; \begin{array}{|c|} q_j \\ \hline p_j \end{array} \; \ldots \; \begin{array}{|c|} q_n \\ \hline p_n \end{array}$$

де q_j – дохід, а p_j – ймовірність цього доходу.

Операцію і випадкову величину, яка її представляє – випадковий дохід – будемо ототожнювати при необхідності, вибираючи із цих двох термінів більш зручний у конкретній ситуації.

Тепер можна застосувати апарат теорії ймовірностей і знайти такі характеристики операції.

Середній очікуваний дохід – математичне очікування випадкової величини (позначення – в.в.). Q, тобто $M[Q] = q_1p_1 + \ldots + q_np_n$, позначається ще $m_Q, \overline{Q}$, вживається також назва *ефективність операції*.

Дисперсія операції – дисперсія в.в. *Q*, тобто $D[Q] = M[(Q - m_Q)^2]$ позначається також D_Q.

Середнє квадратичне відхилення в.в. *Q*, тобто $\sigma[Q] = \sqrt{D[E]}$ позначається також σ_Q.

Зауважимо, що середній очікуваний дохід, або ефективність операції, як і середнє квадратичне відхилення, виміряється в тих же одиницях, що і дохід.

Нагадаємо фундаментальний зміст математичного очікування *випадкової величини* (в.в.).

Середнє арифметичне значень, прийнятих в.в. у довгій серії опитів, приблизно дорівнює її математичному очікуванню.

Усе більше визнаним стає оцінювання ризикованості всієї операції за допомогою середнього квадратичного відхилення випадкової величини доходу *Q*, тобто за допомогою σ_Q. У даній книзі це основна кількісна оцінка ризику.

Отже, *ризиком операції* називається число σ_Q – середнє квадратичне відхилення випадкового доходу операції *Q*. Позначається також r_Q.

Приклад 4. Знайдемо ризики першої і другої операцій із прикладу 3:

$$Q_1: \begin{array}{|c|c|} -5 & 25 \\ \hline 0{,}01 & 0{,}99 \end{array} \qquad Q_2: \begin{array}{|c|c|} 15 & 25 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$$

Спочатку обчислюємо математичне очікування в.в. $Q_1 : m_1 = -5 \cdot 0{,}01 + 25 \cdot 0{,}99 = 24{,}7$. Тепер обчислимо дисперсію за формулою $D_1 = M[Q_1^2] - m_1^2$. Маємо $M[Q_1^2] = 25 \cdot 0{,}01 + 625 \cdot 0{,}99 = 619$. Виходить, $D_1 = 619 - (24{,}7)^2 8{,}91$ і остаточно $r_1 = 2{,}98$.

Аналогічні обчислення для другої операції дають $m_2 = 20$; $r_2 = 5$. Тобто, перша операція менш ризикована.

Запропонована кількісна оцінка ризику цілком погоджується з інтуїтивним розумінням ризику як ступеня розкиданості результатів операції – адже дисперсія і середнє квадратичне відхилення (квадратний корінь із дисперсії) і суть міри такої розкиданості.

Приклад 5. ЛПР розглядає дві можливі ігри. В одній кидають монету, і ЛПР одержує 10 грошових одиниць, якщо монета впаде «орлом» вверх, і платить 10 одиниць, якщо вона впаде «решкою» вверх. Виплати в цій грі утворять ряд розподілу ліворуч:

Монета	
«Решка»	«Орел»
-10	10
0,5	0,5

Виплати

Гральний кубик					
1	2	3	4	5	6
-20	-10	0	0	10	20
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

В іншій грі кидають гральний кубик, і виплати ЛПР утворять ряд розподілу праворуч.

Середній очікуваний виграш в обох випадках дорівнює 0. Однак інтуїтивно розкиданість платежів у другій грі більша. Обчислення дисперсії і ризику підтверджують це:

$$D_1 = 100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 100;\ \ D_2 = (400 + 100)2/6 = 500/3 \approx 167;$$

$$r_1 = \sqrt{D_1} = 10;\ \ r_2 = \sqrt{D_2} \approx 13$$

Середній очікуваний дохід операції *Q*, тобто її ефективність *m* і її ризик *r* зв'язані відомою нерівністю Чебишева:

$$P(|Q - m_Q| > \varepsilon) \le r_Q^2/\varepsilon^2 \text{ або } P(|Q - m_Q| \le \varepsilon) > 1 - r_Q^2/\varepsilon^2.$$

Однак відомо, що ця нерівність досить груба і на практиці майже не застосовується.

Якщо дохід операції є випадкова величина, розподілена за нормальним законом, то ризик досить точно вказує деякі ймовірності, пов'язані з ефективністю: $P(|Q - m_Q| < 3r_Q) \approx 0{,}997$; $P(|Q - m_Q| < 2r_Q) \approx 0{,}95$. Іноді ці оцінки дуже корисні.

Наступні твердження про ризик є результатом відповідних тверджень про дисперсію і середнє квадратичне відхилення з теорії ймовірностей.

Твердження А. При збільшенні масштабу операції в *k* разів, тобто при збільшенні всіх значень випадкового доходу в *k* разів, ефективність операції збільшується в *k* разів, а ризик – в |*k*| разів.

Твердження Б. При зміні всіх доходів на одне і теж постійне число ефективність операції також змінюється на це число, а ризик не змінюється.

Ттвердження С. Нехай операції Q_1 і Q_2 некорельовані, тоді дисперсія їхньої суми дорівнює сумі дисперсій, тому ризик сумарної операції дорівнює $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Твердження Д. У загальному випадку, тобто для двох довільних операцій Q_1 і Q_2 ризик сумарної операції дорівнює $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 \cdot r_2 \cdot k_{12}}$, де k_{12} – коефіцієнт кореляції випадкових доходів операцій; помітимо, що $|k_{12}| \le 1$; із цієї формули випливає, що ризик сумарної операції може бути як більше величини $r_1 + r_2$ (якщо $k_{12} > 0$ – при так званій позитивній кореляції доходів операцій), так і менше цієї величини (якщо $k_{12} < 0$ – при негативній кореляції доходів операцій).

Нагадаємо, що випадкові величини *X,Y* називаються некорельованими, якщо їхній кореляційний момент $K_{XY} = M[(X - m_X) \cdot (Y - m_Y)]$

дорівнює 0; кореляційний момент K_{XY} і коефіцієнт кореляції k_{XY} зв'язані формулою $K_{XY} = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot k_{XY}$ незалежні випадкові величини некорельовані.

Приклад 6. Нехай операції Q_1 і Q_2 некорельовані, знайдемо ризик операції $Q = 0{,}5 \cdot Q_1 + 0{,}5 \cdot Q_2$ (наприклад, грошей не вистачить на проведення обох операцій у повному обсязі):

Q_1:

-5	25
0,01	0,99

Q_2:

15	25
0,5	0,5

Ризики обох операцій уже знайдені в прикладі 4: $r_1 = 2{,}98$; $r_2 = 5$. Виходить, $r_Q = \sqrt{2{,}98^2 + 5^2}/2 \approx (\sqrt{8{,}91 + 25})/2 \approx 5{,}82/ = 2{,}91$.

На нашу думку, середнє квадратичне відхилення є найкращим вимірником ризику окремої операції. У п. 1.1. цього розділу розглянуті класична схема прийняття рішень в умовах невизначеності і оцінки ризику в цій схемі. Корисно познайомитися і з іншими вимірниками ризику. У більшості випадків ці вимірники – просто ймовірності небажаних подій.

3. Деякі загальні вимірники ризику

Нехай відома функція розподілу F випадкового доходу операції Q. Знаючи її, можна надати смисл таким питанням і відповісти на них.

1. Яка ймовірність того, що дохід операції буде менший заданого s? Можна запитати по-іншому: який ризик одержання доходу менший заданого s? *Відповідь: F(s).*

2. Яка ймовірність того, що операція виявиться неуспішною, тобто її дохід буде менший середнього очікуваного доходу m? *Відповідь: F(m).*

3. Яка ймовірність збитків і який їх середній очікуваний розмір? Або який ризик збитків і їхня оцінка? *Відповідь:* $F(0)$, $\int_{-\infty}^{0} x dF(x)/F(0)$.

4. Яке відношення середніх очікуваних збитків до середнього очікуваного доходу? Чим менше це відношення, тим менше ризик розорення, якщо ЛПР вклав в операцію всі свої кошти. *Відповідь:* $\int_{-\infty}^{0} x dF(x) / \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$.

При аналізі операцій ЛПР бажано мати прибуток побільше, а ризик поменше. Такі оптимізаційні задачі називають двокритеріальними. При їхньому аналізі два критерії – дохід і ризик – часто «згортають» в один критерій. Так виникає, наприклад, поняття відносного ризику операції. Справа в тому, що одне і теж значення середнього квадратичного відхилення σ_Q, що вимірює ризик операції, сприймається по-різному залежно від величини середнього очікуваного доходу m, тому величину σ_Q/m іноді називають відносним ризиком операції. Таку міру ризику можна трактувати як згортку двокритеріальної задачі:

$$m_Q \to \max$$

$$\sigma_Q \to \min,$$

тобто максимізувати середній очікуваний дохід при одночасній мінімізації ризику.

4. Ризик розорення

Так називається ймовірність настільки великих втрат, які ЛПР не може компенсувати і які, отож, ведуть до його розорення.

Приклад 7. Нехай випадковий дохід операції Q має такий ряд розподілу, і втрати 35 або більші ведуть до розорення ЛПР. Отже, ризик розорення в результаті даної операції дорівнює 0,8:

Q:	-50	-40	-35	100
	0,1	0,2	0,5	0,2

Серйозність ризику розорення оцінюється саме величиною відповідної ймовірності. Якщо ця ймовірність дуже мала, то нею часто нехтують (зрештою, ймовірність розорення відмінна від нуля майже в будь-якій операції – через досить малоймовірні катастрофічні події на фінансових ринках, у масштабах держави, через природні явища і т.ін.).

Приклад 8. ЛПР мав борг в 40000 євро. Але він мав гривневий внесок в 300000 грн., який при курсі 6 грн. за євро перевищував борг. Ймовірність трикратної девальвації гривні оцінювалася всього в 0,01, але вона відбулася. ЛПР був розорений, тому що виплатити приблизно 25000 євро не міг.

5. Показники ризику у вигляді відносин

Якщо кошти ЛПР рівні *C*, то при перевищенні збитків *Y* над *C* виникає реальний ризик розорення. Для запобігання ризику розорення відношення $K_1 = Y/C$, назване *коефіцієнтом ризику*, обмежують спеціальним числом ξ_1. Операції, для яких цей коефіцієнт перевищує ξ_1, вважають особливо ризикованими. Часто враховують також ймовірність *p* збитків *Y* і тоді розглядають коефіцієнт ризику $K_2 = pY/C$, що обмежують іншим числом ξ_2 (ясно, що $\xi_2 \le \xi_1$). У фінансовому менеджменті частіше застосовують зворотні відносини C/Y і C/(p), які називають *коефіцієнтами покриття ризиків* і які обмежуються знизу числами $1/\xi_1$ і $1/\xi_2$.

Саме такий зміст має так званий *коефіцієнт Кука*, що дорівнює відношенню:

$$\frac{\text{Власні кошти}}{\text{Активи, зважені з урахуванням ризику}}$$

Коефіцієнт Кука використовується банками і іншими фінансовими компаніями. У ролі ваг при «зважуванні» виступають ймовірності – ризики втрати відповідного активу.

6. Кредитний ризик

Так називається ймовірність неповернення в строк узятого кредиту.

Приклад 9. Статистика запитів кредитів у банку така: 10% – державні органи, 30% – інші банки і інші – фізичні особи. Ймовірності неповернення взятого кредиту відповідно такі: 0,01; 0,05 і 0,2. Знайти ймовірність неповернення чергового запиту на кредит.

Начальникові кредитного відділу доповіли, що отримано повідомлення про неповернення кредиту, але у факсовому повідомленні ім'я клієнта було погано надруковане. Яка ймовірність, що даний кредит не повертає якийсь банк?

Рішення. Ймовірність неповернення знайдемо за формулою повної ймовірності. Нехай H_1 – запит надійшов від держоргана, H_2 – від банку, H_3 – від фізичної особи і *A* – неповернення розглянутого кредиту. Тоді:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}A + P(H_2)P_{H_2}A + P(H_3)P_{H_3}A = 0{,}1 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}136.$$

Другу ймовірність знайдемо за формулою Байєса. Маємо:

$$P_A H_2 = P(H_2)P_{H_2}A/P(A) = 0{,}015/0{,}136 = 15/136 \approx 1/9$$

Як у реальності визначають всі наведені в цьому прикладі дані, наприклад, умовні ймовірності P_{H_1} A? За частотою неповернення кредиту для відповідної групи клієнтів. Нехай фізичні особи взяли всього 1000 кредитів і 200 не повернули. Виходить, що відповідає ймовірність P_{H_1}A оцінюється як 0,2. Відповідні дані – 1000 і 200 беруться з інформаційної бази даних банку.

7. Депозитний ризик

Так називається ймовірність дострокового відкликання депозиту. Очевидно, що депозитний ризик порушує нормальну роботу банку, змушуючи його перегрупувати свої активи по-іншому, що завжди чревато втратами. Масовий відтік депозитів цілком може призвести до банкрутства банку.

У загальному випадку депозитний ризик залежить від довжини аналізованого періоду, динаміки вилучення внесків і багатьох інших обставин.

Приклад 10. Нехай у банку багато мілких клієнтів, і ймовірність відкликання депозиту для кожного з них приблизно та сама. Тоді за інтегральною формулою Муавра-Лапласа:

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi[k_2 - np)/\sqrt{npq}] - \Phi[(k_1 - np)/\sqrt{npq}],$$

де *n* – число клієнтів, *p* – ймовірність відкликання, $q = 1 - p, k_1, k_2$ – границі числа відзиваючих внесків, *Φ* – функція Лапласа. Таким чином, при великому числі незалежних приблизно однакових клієнтів відтік депозитів можна більш-менш упевнено прогнозувати.

2.3. Загальні методи зменшення ризиків

Як правило, ризик намагаються зменшити. Для цього існує чимало методів. Велика група таких методів пов'язана з підбором інших операцій, таких, щоб сумарна операція мала менший ризик.

1. Диверсифікованість

Нагадаємо, що дисперсія суми некорельованих випадкових величин дорівнює сумі дисперсій. Із цього випливає таке твердження, що лежить в основі методу диверсифікованості.

Твердження. Нехай $O_1,\dots,O_n$ – некорельовані операції з ефективностями $e_1,\dots,e_n$ і ризиками $r_1,\dots,r_n$. Тоді операція «середнє арифметичне» $O=(O_1+\dots+O_n)/n$ має ефективність $e=(e_1+\dots+e_n)/n$ і ризик $r=\sqrt{(r_1^2+\dots+r_n^2}/n$.

Наслідок. Нехай операції некорельовані і $a \le e_i$ і $b \le r_i \le c$ для всіх $i=1,\dots,n$. Тоді ефективність операції «середнє арифметичне» не менше *a* (тобто найменшої з ефективностей операцій), а ризик задовольняє нерівності $b/\sqrt{n} \le r \le c/\sqrt{n}$ і, таким чином, при збільшенні *n* зменшується. Отже, при збільшенні числа некорельованих операцій їх середнє арифметичне має ефективність із проміжку ефективностей цих операцій, а ризик однозначно зменшується.

Цей висновок називається *ефектом диверсифікованості* (розмаїтості) і являє собою в сутності єдино розумне правило роботи на фінансовому і іншому ринках. Цей же ефект втілений у народній мудрості – «не клади всі яйця в один кошик». Принцип диверсифікованості говорить, що потрібно проводити різноманітні, не пов'язані одна з одною операції, тоді ефективність виявиться усередненою, а ризик однозначно зменшиться.

При застосуванні цього правила потрібно бути обережним. Так, не можна відмовитися від некорельованості операцій.

Пропозиція. Припустимо, що серед операцій є провідна, з якою всі інші перебувають у позитивному кореляційному зв'язку. Тоді ризик операції «середнє арифметичне» не зменшується при збільшенні числа підсумовуваних операцій.

Дійсно, для простоти приймемо більш сильне припущення, що всі операції $O_i, i=1,\dots,n,$ просто копіюють операцію O_1 у якихось масштабах, тобто $O_1=k_1O_1$ і всі коефіцієнти пропорційності k_i додатні. Тоді операція «середнє арифметичне» $O=(O_1+\dots+O_n)/n$ є просто операція O_1 у масштабі $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)/n$ і ризик цієї операції $r=r_1\left(\sum_{i=n}^{n} k_1/n\right)^2$. Тому, якщо операції приблизно однакові за масштабністю, тобто $k_1 \approx 1$, то і $r \approx r_1 \left(\sum_{i=1}^{n} k_i / n \right)^2 \approx r_1$.

Ми бачимо, що ризик операції «середнє арифметичне» не зменшується при збільшенні числа операцій.

Приклад 11. Припустимо, ЛПР має можливість скласти операцію із чотирьох некорельованих операцій, ефективності і ризики яких дані в таблиці.

i	1	2	3	4
e_i	3	5	8	10
r_i	2	4	6	8

Розглянемо кілька варіантів складання операцій із цих операцій з рівними вагами.

1. Операція складена тільки з 1-й і 2-й операцій. Тоді:

$$e_{12} = (3+5)/2 = 4; \;\; r_{12} = \sqrt{2^2 + 4^2}/2 \approx 2{,}24.$$

2. Операція складена тільки з 1-й, 2-й і 3-й операцій. Тоді:

$$e_{123} = (3+5+8)/3 = 5{,}3; \;\; r_{123} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}/3 \approx 2{,}49$$

3. Операція складена із всіх чотирьох операцій. Тоді:

$$e_{1-4} = (3+5+8+10)/4 = 6{,}5; \;\; r_{1-4} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2}/4 \approx 3{,}54.$$

Видно, що при складанні операції із все більшого числа операцій ризик росте досить незначно, залишаючись близько до нижньої границі ризиків складових операцій, а ефективність щораз дорівнює середньому арифметичному складових ефективностей.

Принцип диверсифікованості застосовується не тільки для усереднення операцій, проведених одночасно, але в різних місцях (усереднення в просторі), але і проведених послідовно в часі, наприклад, при повторенні однієї операції в часі (усереднення в часі). Наприклад, цілком розумною є стратегія покупки акцій якої-небудь стабільно працюючої компанії 20-го січня кожного року. Неминучі коливання курсу акцій цієї компанії завдяки цій процедурі усереднюються і у цьому проявляється ефект диверсифікованості.

Теоретично ефект диверсифікованості тільки позитивний – ефективність усереднюється, а ризик зменшується. Однак зусилля на проведення великої кількості операцій з відстеження їхніх результатів можуть, звичайно, звести нанівець всі плюси від диверсифікованості.

2. Хеджування

В ефекті диверсифікованості ЛПР становило нову операцію з декількох, наявних у його розпорядженні. При *хеджуванні* (від англ. hedge – огорожа) ЛПР підбирає або навіть спеціально конструює нові операції, щоб, проводячи їх разом з основною, зменшити ризик.

Приклад 12. За контрактом російська фірма через півроку повинна одержати великий платіж від української компанії. Платіж дорівнює 100000 гривень (приблизно 600 тис. руб.) і буде зроблений саме в гривнях. У російської фірми є побоювання, що за ці півроку курс гривні впаде стосовно російського рубля. Фірма хоче підстрахуватися від такого падіння і бере форвардний контракт із одним з українських банків на продаж 100000 гривень за курсом 6 руб. за гривню. Таким чином, щоб не відбулося за цей час із курсом рубль – гривня, російська фірма не понесе через це збитків.

У цьому і полягає суть хеджування. При диверсифікованості найбільшу цінність становили незалежні (або некорельовані) операції. При хеджуванні підбираються операції, жорстко пов'язані з основною, але, так сказати, іншого знаку, кажучи більш точно, негативно корельовані з основною операцією.

Дійсно, нехай O_1 – основна операція, її ризик r_1,O_2 – деяка додаткова операція і її ризик r_2, O – операція-сума, тоді дисперсія цієї операції $D = r_1^2 + 2k_{12} \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2$, де k – коефіцієнт кореляції ефективностей основної і додаткової операцій. Ця дисперсія може бути менша дисперсії основної операції, тільки якщо цей коефіцієнт кореляції від'ємний (точніше: повиний бути $2k_{12} \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2 < 0$ тобто $k_{12} < -r_2/(2r_1)$).

Приклад 13. Нехай ЛПР вирішує проводити операцію O_1.

Q_1:

-10	20
0,5	0,5

S:

5	-5
0,5	0,5

O_1:	-10	20
S:	5	-5
O	-5	15
	0,5	0,5

Йому радять провести одночасно операцію *S*, жорстко пов'язану з *O*. У сутності обидві операції треба зобразити з однією і тією ж множиною результатів.

Позначимо сумарну операцію через O, ця операція є сума операцій O_1 і S. Обчислимо характеристики операцій: $M[O_1]$=5, $D[O_1]$=225, r_1=15; $M[S]$=ПРО, $D[S]$=25; $M[O]$=5, $D[O]$=100, r=10. Середня очікувана ефективність операції залишилася незмінною, а ризик зменшився через сильну негативну корельованість додаткової операції S стосовно основної операції.

Отже, на практиці не так легко підібрати додаткову операцію, негативно корельовану з основною, та ще й з нульовою ефективністю. Звичайно допускається невелика негативна ефективність додаткової операції і через це ефективність сумарної операції стає менша, ніж в основної. Наскільки допускається зменшення ефективності на одиницю зменшення ризику, залежить від відношення ЛПР до ризику. Універсальним інструментом хеджування є опціони.

На закінчення розглянемо хеджування у валютних операціях. Валютна операція називається *спот*, якщо вона здійснюється за моментальною ціною і остаточний розрахунок повинен бути зроблений не пізніше другого робочого дня після дня здійснення угоди. *Форвардний валютний контракт* – це угода, що визначає суму валюти, яка повинна бути обміняна на іншу валюту в певний день у майбутньому за курсом, що записаний у контракті. Форвардні операції служать для хеджування виникаючого валютного ризику. Третій вид валютних операцій – це операція *своп*, яка являє собою поєднання покупки валюти на умовах спот і її одночасного форвардного продажу. Операція спот досить поширена. Коли мова йде про просту форвардну операцію, то використають термін *аутрайт*.

3. Страхування

Можна розглядати страхування як один з видів хеджування. Пояснимо деякі терміни.

Страхувальник (або застрахований) – той, хто страхується. *Страховик* – той, хто страхує. *Страхова сума* – сума коштів, на яку застраховане майно, життя, здоров'я страхувальника. Ця сума виплачується страховиком страхувальнику при настанні страхового випадку. Виплата страхової суми називається *страховим відшкодуванням. Страховий платіж* виплачується страхувальником страховику.

Позначимо страхову суму w, страховий платіж s, ймовірність страхового випадку p. Припустимо, що застраховане майно оцінюється в z. За правилами страхування $w \le z$.

Таким чином, можна запропонувати таку схему:

Операції	1-p	p
Страхування немає	0	-z
Операція страхування	-s	w-s
Загальна операція (страхування є)	-s	w-s-z

Знайдемо характеристики операції без страхування і підсумкової операції. З теорії страхування відомо, що при нульовій рентабельності страховика можна вважати, що $s=pw$. Одержуємо:

	Характеристики операцій:
Страхування немає	$M_1 = -pz, D_1 = p(1-p)z^2, r_1 = z\sqrt{p(1-p)}$
Підсумкова операція	$M = -s(1-p) + (w-s-z) = p(w-z) - s = -pz,$ $D = s^2(1-p) + (w-s-z)^2 p - (pz)^2.$

Припустимо далі, що $w=z$, тобто страхове відшкодування дорівнює оцінці застрахованого майна, тоді $D=0$.

Таким чином, страхування представляється позитивним заходом з погляду зменшення ризику, якби не страховий платіж. Іноді страховий платіж складає помітну частину страхової суми і являє собою солідну суму.

4. Якісне управління ризиками

Ризик – настільки складне поняття, що досить часто неможливо його кількісно оцінити. Тому широко розвинені методи управління ризиком якісного характеру, без кількісної оцінки. До таким відносяться багато банківських ризиків. Найбільш важливі з них – це кредитний ризик і ризики неліквідності і неплатоспроможності.

1. Кредитний ризик і способи його зменшення. При видачі кредиту (або позики) завжди є побоювання, що клієнт не поверне кредит. Запобігання неповерненню, зменшенню ризику неповернення кредитів – це найважливіше завдання кредитного відділу банку. Які ж існують способи зменшення ризику неповернення кредиту?

- Відділ повинен постійно систематизувати і узагальнювати інформацію з виданих кредитів і їхнього повернення. Інформація з виданих кредитів повинна бути систематизована за величиною виданих кредитів, повинна бути побудована класифікація клієнтів, які взяли кредит (фізичні особи, державні органи, підприємства, інші банки і т.ін.);

- відділ (банк у цілому) повинен вести так звану кредитну історію своїх клієнтів, у тому числі і потенційних (тобто коли, де, які кредити брав і як їх повертав клієнт). Поки в нас у країні більшість клієнтів не має своєї кредитної історії. Крім того, звичайно оцінюється можливість повернення клієнтом кредиту за допомогою аналізу його балансу – якщо це банк; планів і технічного рівня виробництва, перспектив розвитку – якщо це підприємство; і т.ін.
- є різні способи забезпечення кредиту, наприклад, клієнт віддає щось у заставу і якщо не повертає кредит то банк стає власником застави;
- у банку повинна бути чітка інструкція з видачі кредиту (кому який кредит можна видати і на який строк);
- повинні бути встановлені чіткі повноваження щодо видачі кредиту. Скажемо, рядовий співробітник відділу може видати кредит не більше $1000, кредити до $10000 може видати начальник відділу, понад $10000, але не більше $100000, може видати віце-президент з фінансів і кредитів понад $100000 видає тільки рада директорів;
- для видачі особливо великих і небезпечних кредитів об'єднуються кілька банків і спільно видають цей кредит;
- існують страхові компанії, які страхують не повернення кредиту (але є точка зору, що неповернення кредиту не підлягає страхуванню – це ризик самого банку);
- існують зовнішні обмеження щодо видачі кредитів (наприклад, установлені Національним банком); скажемо, не дозволяється видавати дуже великий кредит одному клієнту.

2. Ризики неліквідності, неплатоспроможності і способи їхнього зменшення. Говорять, що кошти банку досить ліквідні, якщо банк здатний швидко і без особливих для себе втрат забезпечити виплату своїм клієнтам кошти, які вони довірили банку в короткочасний момент. Ризик неліквідності – це і є ризик не впоратися із ним. Втім, цей ризик лише для стислості названий так, повна його назва – *ризик незбалансованості балансу в частині ліквідності.*

Всі активи банку за їх ліквідністю діляться на три групи: 1) першокласні ліквідні кошти (касова готівка, кошти банку на кореспондентському рахунку в Національному банку, державні цінні папери, векселі великих надійних компаній); 2) ліквідні кошти (очікувані короткострокові платежі банку, деякі види цінних паперів, деякі матеріальні активи, які можуть бути швидко і без великих втрат продані і т.ін.); 3) неліквідні кошти (прострочені кредити і ненадійні борги, багато матеріальних активів банку, насамперед будинки і спорудження).

При аналізі ризику неліквідності враховуються в першу чергу першокласні ліквідні кошти.

Говорять, що банк платоспроможний, якщо здатний розплатитися з усіма своїми клієнтами, але, можливо, для цього доведеться провести які-небудь громіздкі і тривалі операції, аж до продажу встаткування, будинків, що належать банку, і т.ін. Ризик неплатоспроможності виникає, коли неясно, чи зуміє банк розплатитися.

Платоспроможність банку залежить від дуже багатьох факторів. Національний банк встановлює ряд умов, які банки повинні виконувати для підтримки своєї платоспроможності. Найважливіші з них: обмеження зобов'язань банку; рефінансування банків Національним банком; резервування частини коштів банку на кореспондентському рахунку в Національному банку.

Ризик неліквідності веде до можливих зайвих втрат банку: щоб розплатитися із клієнтом, банку, можливо, доведеться позичити гроші в інших банках по більш високій процентній ставці, ніж у звичайних умовах. Ризик неплатоспроможності цілком може призвести до банкрутства банку.

І ліквідність, і платоспроможність банку розраховуються за спеціальними методиками, які затверджуються Національним банком. Він же затверджує спеціальні нормативи щодо ліквідності і платоспроможності, які банки повинні виконувати. У нинішніх умовах, маючи в банку гарну обчислювальну техніку, банк щодня може розраховувати ці нормативи і коректувати свої дії.

5. Форвардна і ф'ючерсна торгівля

Зменшити ризик дозволяють і форвардні контракти. Такі контракти обов'язкові для виконання обома сторонами в майбутньому за цінами, зафіксованими у момент укладання контракту. Наприклад, 1 січня фермер бере форвардний контракт із млинарем на поставку тому пшениці в серпні за певною ціною. У січні неможливо пророчити, який буде врожай пшениці, і яка буде реальна ціна пшениці в серпні. Якщо вона буде вище, ніж у контракті, – прогадає фермер, а млинар вигадає; якщо ціна буде нижче – виграє фермер, а в програші опиниться млинар. Ф'ючерсні контракти – це також форвардні, але вони стандартизовані, знеособлені і ними торгують на біржах.

Але чому такі контракти зменшують ризик? Справа в тому, що зниження ризику тут відбувається не тільки прямим, але і непрямим чином: безсумнівно, що форвардні контракти роблять ринок більш передбачуваним, більш стабільним, а виходить, менш ризикованим.

Взагалі вірне надзвичайно загальне твердження – *усе, що робиться відкрито, із прицілом, прогнозом на майбутнє, з ясними поставленими цілями, зрозумілими всім, і т.ін. – все це збільшує передбачуваність, стабільність економіки, зменшує ризик.* Вірно і обернене – усе, що робиться таємно, без оголошення цілей, непередбачене – все це зменшує стабільність ринку і збільшує ризикованість операцій на такому ринку.

Надзвичайно важливим прикладом тут є іпотечне кредитування. Нагадаємо, що це довгострокова позикова операція під невеликі відсотки під заставу нерухомості позичальника, причому договори про іпотечну позику діють у незмінному вигляді десятки років. У такій країні, як США, тисячі фірм займаються таким кредитуванням. Вони представляють потужну силу, що протистоїть будь-якій нестабільності в країні, а також інфляції, яка може значно зменшити їхню нормальну роботу, а то і привести до розорення.

Капіталізм зробив гарний висновок з Великої депресії 1929-1938 р. В 1934 р. через незрівнянність фінансових звітів і з ряду інших причин Конгрес США створив спеціальну комісію з бірж і коштовних паперів. Одна із цілей роботи цієї комісії – забезпечити точність фінансової інформації у звітах фірм, об'єктивне відображення економічних дій, які зменшують ризик.

Задачі до розділу 2

1. За допомогою комп'ютера проаналізована матриця доходів, побудована по ній матриця ризиків і відзначені операції, оптимальні за критеріями Вальда, Севіджа і Гурвіца (при $\lambda = 1/2$) в умовах повної невизначеності. Перевірте комп'ютерні розрахунки?

$$
\begin{array}{rc|cccc|ccc|cccc}
 & \multicolumn{6}{c}{\text{Матриця доходів}} & & \multicolumn{5}{c}{\text{Матриця ризиків}} \\
 & 0 & 0 & 4 & 6 & 12 & 6 & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\text{Вальд}\rightarrow & 2 & 2 & 6 & 8 & 14 & 8 & \leftarrow\text{Гурвіц Севідж}\rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 4 & & 6 & 2 & 5 & 6 & 6 \\
 & 2 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & & 4 & 0 & 3 & 4 & 4
\end{array}
$$

2. Розгляньте такі висловлення і визначте, що породжує ризик – незнання або випадковість?: а) ви не маєте даних про зміни курсу долар-гривні протягом минулого року; б) ви не маєте даних про стан активів вашого банку; в) ви не знаєте, як позначиться на ділових операціях остання постанова уряду ; г) чи виявляться вигідними ваші ф'ючерсні контракти (це залежить від погоди в майбутні 3 місяці); д) ви вирішуєте питання про видачу кредиту клієнту, про яке немає детальних відомостей, але зрозуміла його приналежність до певної соціальної групи; е) відома статистика повернення кредитів підприємствами групи, до якої належить дане підприємство. Що тут породжує ризик неповернення? ж) при страхуванні автомобіля, які фактори машини і власника мають важливість і до чого вони відносяться: до незнання або до випадковості? і) виданий кредит під заставу житлового будинку кредитора. Які можливі наслідки і чим вони обумовлені? л) як стаж роботи касира пов'язаний з незнанням і випадковими помилками?
3. За допомогою комп'ютера проаналізована матриця доходів, побудована за нею матриця ризиків і відзначені операції, оптимальні за критеріями максимальної ефективності і мінімального ризику в умовах часткової невизначеності. Перевірте комп'ютерні розрахунки?

Матриця доходів				Ефективність і ризик			Матриця ризиків			
2	4	6	18	4,8	← max	0,8	0	2	2	0
0	4	6	12	3,2		2,4	2	2	2	6
2	6	8	14	5,2	min →	0,4	0	0	0	4
0	1	2	8	1,4		4,2	2	5	6	10
0,5	0,2	0,2	0,1				0,5	0,2	0,2	0,1
					Ймовірності станів					

4. Для чотирьох операцій за допомогою комп'ютера обчислені ефективності (математичні очікування) і ризики (квадратний корінь із дисперсій):

Операції	Математичне очікування	Ризик
(0,1/3)(1,1/3)(2,1/6)(8,1/6)	2,00	2,77
(2,1/6)(3,1/3)(4,1/3)(10,1/6)	4,33	2,62
(0,1/5)(4,1/5)(6,1/5)(10,2/5)	6,00	3,79
(2,1/5)(6,1/5)(8,1/5)(12,2/5)	8,00	3,79

Перевірте комп'ютерні розрахунки? Нанесіть операції як точки на площину ризик-ефективність і переконаєтеся, що перша і третя операції – домінують, а друга і четверта – ні, тобто оптимальні за Парето.

5. Нехай операція має два різних грошових результати *a* і *b* з ймовірностями відповідно *p* і *1-p*. Зобразіть графіки залежностей середньої очікуваної ефективності і ризику операції від *p*?
6. Операції *Q* з ефективністю *e* і ризиком *r* і *Q`* з *e`* і *r'*, відповідно, некорельовані. Розглянемо операцію $Q_f = fQ + (1-f)Q'$. Знайдіть її ризик як функцію *f*. При якому *f* ризик мінімальний? Зобразіть зразковий графік залежності ризику операції Q_f від *f*?
7. Нехай результатом операції є грошовий дохід, рівномірно розподілений від *a* до *b*, a < b. Який ризик цієї операції? *Відповідь:* |b-a|/$\sqrt{12}$, тому що дисперсія в.в., рівномірно розподіленої на відрізку [a,b] дорівнює $(b\text{-}a)^{2/12}$.
8. Дохід операції *E* випадковий і має такий ряд розподілу:

$$E:\ \begin{array}{|cc} 0 & A(1\text{-}p) \\ \hline 1\text{-}p & p \end{array}$$

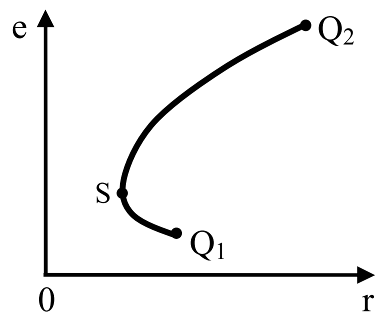
Знайдіть ефективність і ризик операції як функцію *p.* При якому *p* ефективність максимальна і чому дорівнює це максимальне значення? Знайдіть відповіді на ці питання і для ризику операції?

9. Нехай дані дві некорельовані операції O_1 і O_2, ефективності і ризики яких (у смислі середнього квадратичного відхилення) рівні, відповідно (r_1,e_1) і (r_2,e_2) . Зобразіть на площині ці операції і (приблизно) множину *L* різноманітних їхніх лінійних комбінацій. Є чи в *L* операція, ризик якої менше мінімального з ризиків. Знайдіть множину Парето для операцій з *L*. Розглянете також окремі випадки: а) коли $r_1=r_2$ і б) коли $e_1=e_2$.

Рішення цього завдання цікаве. Знайдемо вирішення тільки для випадку, коли $r_1<r_2$ і $e_1<e_2$ (див. рисунок нижче). Розглянемо операцію $O_f=f_1+(1\text{-}f)O_2$. Тоді її ефективність дорівнює $e_f=fe_1+(1\text{-}f)e_2$ і її ризик $r_f = \sqrt{f^2 r_1^2 + (1-f)^2 r_2^2}$. Знайдемо похідну від e_f по r_f за правилом диференціювання параметрично залежного аргументу і функції. Маємо:

$$de_f / dr_f = (de_f / df):(dr_f / df) = (e_1 - e_2):2[r_1^2 f - r_2^2(1-f)]/$$
$$\sqrt{r_1^2 f^2 + r_2^2(1-f)^2} = [\sqrt{r_1^2 f^2 + r_2^2(1-f)^2}](e_1 - e_2)/2[r_1^2 f - r_2^2(1-f)].$$

Видно, що шукана похідна: від'ємна при $1 \ge f > r_2^2/(r_1^2 + r_2^2)$, не існує при $f = r_2^2/(r_1^2 + r_2^2)$, додатна при $0 \le f < r_2^2/(r_2^2 + r_2^2)$.



Це значить, що шукана множина L операцій зображується приблизно кривою, як показано на рисунку. Зокрема, множина Парето буде частиною SQ_2 цієї кривої. Цікаво також, що операція Q_1 перестає бути оптимальною за Парето.

10. Випадкові доходи двох взаємозалежних операцій мають таблицю розподілу:

	-1	0	1
0	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0	0,5

Знайти ефективність і ризик сумарної операції?

Рішення. Ряд розподілу сумарного доходу *Q* такий:

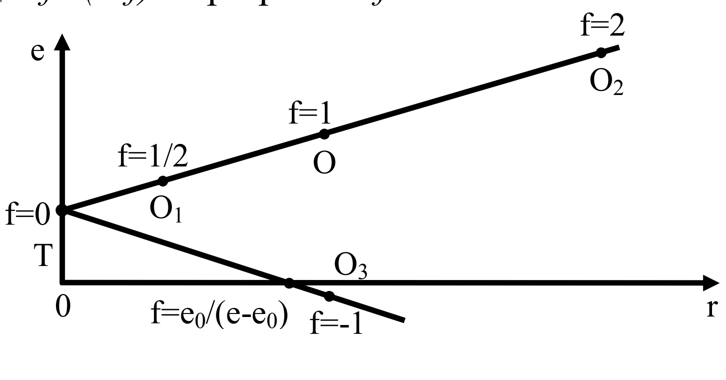
Q:	-1	0	1	2	3
	0,1	0,2	0,2	0	0,5

Отже, ефективність сумарної операції дорівнює 1,6, а ризик сумарної операції дорівнює 1,5.

11. Припустимо, що ЛПР доступна безризикова операція *T* з ефективністю e_0. Нехай *O* – будь-яка інша операція з ефективністю $e>e_0$ і ризиком *r*. Розгляньте операцію $S_f=f+(1-f)T$ і виразите її ризик через її ефективність.

Рішення. Ефективність цієї операції дорівнює $e_f=fe+(1-f)e_0$, а ризик дорівнює $r_f=|f|r$. Маємо $f=(ef–e_0)/(e-e_0)$ і, підставляючи цей вираз, одержуємо $r_f = r\,|\,e_f - e_0\,|\,/(e - e_0) = (r\,/(e - e_0))\,|\,e_f - e_0\,|$.

Продовжимо дослідження. На рисунку показані ефективність і ризик операцій $f+(1-f)T$ при різних *f*.



Зверніть увагу, що в принципі можливе досягнення будь-якої ефективності і будь-якого ризику. Далі конкретизуємо на прикладі. Нехай операція *O* – це вкладання деякої суми *S* на 3 місяці на вирощування ранньої полуниці, ефективність – 20% і деякий ризик (див. точку *O* на рисунку), операція *T* – здача цієї суми в комерційний банк на ті ж 3 місяці під 5% (див. точку *T*). Тоді: операція O_1 – сума *S/2* вкладається у вирощування полуниці, – сума *S/2* вкладається в банк; операція O_2 – сума *2S* вкладається у вирощування полуниці, для чого в банку береться позика в розмірі *S* під 5%; операція O_3 – у когось ще, хто вирощує полуницю, береться в борг на 3 місяці сума *S* з обіцянкою повернути і її і «полуничний» дохід з неї через 3 місяці і вся сума *2S* вкладається в банк під 5% .

Напевно, остання операція недоцільна. Так, повторювати систематично її, напевно, недоцільно. Ну, а якщо ЛПР має конфіденційну інформацію про майбутні сильні заморозки?

12. Німецький банк розмістив в англійському банку вільні кошти на 3 місяці. Як захеджувати виниклий ризик можливого падіння курсу фунта стерлінгів відносно євро?
13. Українська фірма взяла піврічний кредит у німецькому банку. Як захеджувати виниклий ризик падіння курсу гривні відносно євро?

Розділ 3. Моделі, опціони і ціноутворення

3.1. Моделі ціноутворення активів

Ніхто не відмовився б довідатися завтрашні ціни. Серед практиків-фінансистів існує думка, що ціни додержуються деяких ритмів, циклів, трендам. У наші дні, з розвитком комп'ютерної техніки і комп'ютерних мереж, що зв'язують увесь світ у єдине ціле, поведінку цін можна побачити на екрані комп'ютера в реальному часі. Так званий технічний аналіз стверджує, що окремі частини графіків цін повторюються, і за початковою ділянкою такої характерної фігури можна зрозуміти, як графік піде далі. У цьому і полягає можливість передбачення поведінки ціни.

З метою одержання відповіді на питання, чи передбачуваний рух цін, було проведено безліч досліджень. Вони принесли несподіваний і парадоксальний результат: швидше за все ціни змінюються зовсім випадково, приблизно так само, як змінюються швидкості молекул газу в їх хаотичному броуновському русі. Остаточно це питання не вирішене і, очевидно, не буде вирішене ніколи, тому що знову і знову будуть з'являтися успішні фінансисти, упевнені, що вони можуть вгадувати майбутню поведінку цін.

У даному підрозділі викладені три моделі ціноутворення активів. У цих моделях ціна активу випадково змінюється із часом. Перші дві моделі досить прості – коливання ціни має усього лише два значення, через що ці моделі називаються біноміальними. На основі цих моделей побудовані більш складні, що мають уже практичне значення і використовуються в реальних фінансових розрахунках.

1. Найпростіша біноміальна модель

У цій моделі S – ціна активу без будь-яких спеціальних обмежень типу ціни облігації з погашенням (у момент погашення ціна дорівнює номіналу облігації), наприклад, це ціна акції. Нехай одиниця часового проміжку є день. Тоді ціна активу до кінця *n-го* дня буде $S_n=S_0+x_1+\ldots+x_n$, де S_0 – ціна на початку спостереження, x_i, i=1,…,n, – незалежні і однаково розподілені випадкові величини, що приймають значення -1,+1 з ймовірністю 1/2. Поведінку можливої ціни активу зобразимо на рисунку 3.1.

На рисунку зображене так зване *біноміальне дерево*. Поведінку ціни можна представити як випадковий рух по цьому дереву зліва направо.

Знайдемо математичне очікування і дисперсію випадкової величини *Sn*. Маємо: $M[S_n] = M[S_0] + \sum_{i=1}^{n} M[x_i] = S_0$, тому що математичне очікування кожної випадкової величини (позначеня – в.в.) x_i дорівнює 0. Далі в силу незалежності в.в. x_i дисперсія їхньої суми дорівнює сумі їхніх дисперсій. Але дисперсія кожної в.в. x_i дорівнює 1, отже, $D[S_n]=n$.

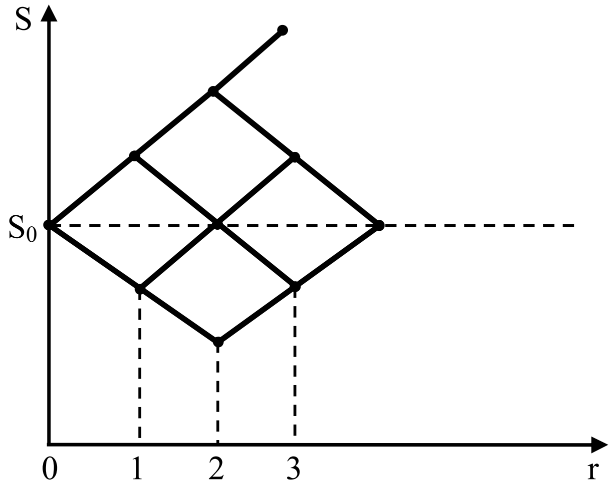


Рисунок 3.1 – Поведінка можливої ціни активу

Позначимо $x_1+...+x_n$ через X_n. Знайдемо ряд розподілу X_n. Ймовірність того, що з *n* в.в. x_i *k* прийняли значення +1, а інші *(n-k)* прийняли значення –1, дорівнює $C_n^k(1/2)^n$. Отже, $P(X_n = 2k - n) = C_n^k(1/2)^n$. Ряди розподілу X_1, X_2, X_3 показані на рисунку 3.2.

X_1:

1	-1
1/2	1/2

X_2:

2	0	-2
1/4	1/2	1/4

X_3:

3	1	-1	3
1/8	3/8	3/8	1/8

Рисунок 3.2 – Ряди розподілу X_1, X_2, X_3

При *n<10* уже можна скористатися центральною граничною теоремою, яка говорить, що сума большого числа незалежних і однаково розподілених доданків приблизно розподілена за нормальним законом. Отже, при *n>10* $X_n \in N(0, \sqrt{n})$ і, виходить, $P(a < S_n - S_0 < \beta) \approx \Phi(\beta/\sqrt{n}) - \Phi(a/\sqrt{n})$, де *Ф* – функція Лапласа. Звідси слідує, що при *n>10* $P(|S_n - S_0| < 3\sqrt{n}) = 0{,}9973$.

Зокрема, при *n=16* маємо, $P(|S_n - S_0| < 12) = 0{,}9973$ тобто за 16 днів ціна зміниться не більше ніж на 12 одиниць (припускається, що S_0 значно перевершує 12).

У цій найпростішій біноміальній моделі ціни не можуть рости систематично, як, наприклад, росте ціна безкупонної облігації при наближенні до моменту її погашення. Ясно також, що математичне очікування прибутковості активу дорівнює 0. Тому і безризикова ставка повинна дорівнювати 0 (численні спостереження переконують, що математичне очікування прибутковості будь-якого ризикового активу не може бути менше безризикової ставки). Всі ці міркування роблять дану модель придатною лише для деяких ілюстративних розрахунків, які ми розглянемо далі.

2. Біноміальна модель Кокса-Росса-Рубінштейна

У цій моделі є два види активів: банківський рахунок величиною B з постійною процентною ставкою r такою, що його величина до кінця *n-го* часового проміжку $B_n = (1+r)B_{n-1} = (1+r)^n B_0$, і актив ціною S з випадковою ставкою нарощення f_i, причому всі ставки f_i – незалежні і однаково розподілені в.в., які приймають два значення – a, b причому $a<b$ з ймовірністю 1/2, тобто процентна ставка – плаваюча (такі ставки розглянуті в частині 2, розділі 1, п. 1.1). Отже, ціна активу в момент n дорівнює $S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1+f_i)$.

В окремому випадку, коли $b = \lambda - 1$, $a = 1/\lambda - 1$, де $\lambda > 1$, маємо:

$$S_n = \begin{cases} \lambda S_{n-1}, & \text{якщо} \quad f_n = b, \\ \lambda^{-1} S_{n-1}, & \text{якщо} \quad f_n = a. \end{cases} \tag{3.1}$$

Якщо ввести випадкову змінну $\varepsilon_n = \pm 1$ з ймовірністю $1/2$, то $S_n = S_0 \lambda^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}$.

Очевидно, що в цьому випадку ціна активу S «блукає» по множині $\{S_0 \lambda^k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ – див. рисунок 3.3.

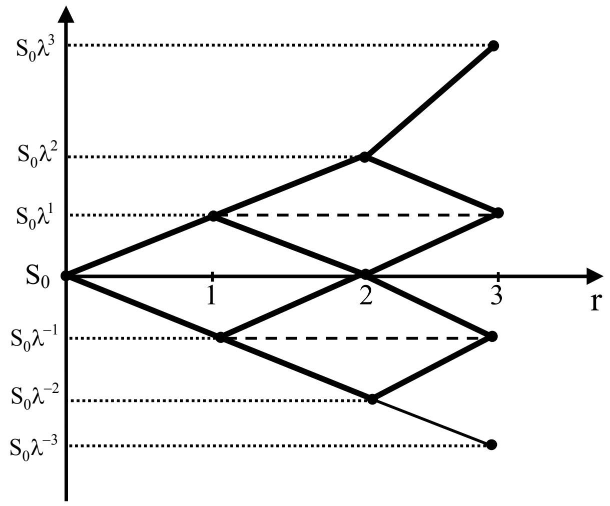


Рисунок 3.3 – Поведінка можливої ціни активу

Математичне очікування прибутковості активу дорівнює $(a+b)/2$, так що повинно $(a+b)/2>r$. Доведемо, що ціна активу росте в середньому по цій ставці. Знайдемо математичне очікування ціни в *n-й* момент часу: $S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1+f_1)$. Оскільки в.в. *(1+f$_i$), i=,…,n,* незалежні, то математичне очікування їхнього добутку дорівнює добутку їхніх математичних очікувань, тобто:

$$M[S_n] = S_0 \cdot \prod_{t=1}^{n} M(1+f_i) = S_0 \cdot [1+(a+b)/2)]^n. \tag{3.2}$$

Аналог формули (3.2) вірний, навіть якщо ставки f_i є не постійними, а змінюються зі зміною номера *n*.

3. Загальна експонентна біноміальна модель

У ході досліджень поведінки цін було з'ясовано, що «випадково блукають» не самі ціни, а їхні логарифми, тобто

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \tag{3.3}$$

де $H_n=h_1+\ldots+h_n$ і ці в.в. h_i незалежні і «приблизно однакові».

Звідси за центральною граничною теоремою можна зробити висновок, що величини H_n при $n>10$ розподілені приблизно за нормальним законом. Параметри цього закону: математичне очікування і дисперсія цілком визначаються математичними очікуваннями в.в. h_i і їхніми дисперсіями.

Замінимо «дискретний» час «безперервним». Тоді, зокрема, вийде, що для будь-якого моменту *t* і будь-якого *T>t* натуральний логарифм відношення цін *S(t+T)/S(t)* розподілений за нормальним законом.

Коли натуральний логарифм випадкової величини розподілений за нормальним законом, то розподіл самої в.в. називається *логнормальъним*. Приклад графіка щільності логнормального розподілу показаний на рисунку 3.4.

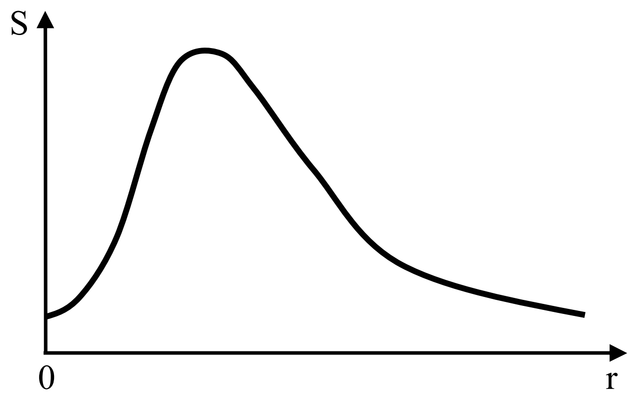


Рисунок 3.4 – Графік щільності логнормального розподілу

Можна довести, що якщо *lnY* розподілений нормально з параметрами *a*, σ, тј $M[Y] = e^{a+\sigma^2/2}$ і $D[y] = e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Отже, у загальній біноміальній моделі відношення цін через будь-який часовий проміжок розподілене логнормально. Помітимо, що *S(t+T)/S(t)* – у сутності середня прибутковість на проміжку часу, яка називається коефіцієнтом або множником нарощення (це один з можливих варіантів поняття прибутковості). Отже, середня прибутковість на будь-якому часовому проміжку розподілена логнормально. Однак переконливої відповідності цих припущень на практиці не спостерігається.

4. Фундаментальний і технічний аналіз цін

Фундаментальний аналіз складається у вивченні і аналізі загальноекономічних (головним чином довгострокових) тенденцій на ринку, установленні факторів і прихованих взаємозв'язків, що впливають на розвиток ринку. При фундаментальному аналізі використовуються різноманітні статистичні дані, опубліковані в пресі або наявні в електронному вигляді. Широко застосовуються різні економіко-математичні методи і моделі.

У більшості випадків фундаментальний аналіз є скоріше якісним, ніж кількісним. Він дозволяє лише виявити початки певних тенденцій і їхню спрямованість. Як правило, для більш певних висновків необхідні додаткові дослідження.

Фундаментальний аналіз вивчає рух цін на макроекономічному рівні. Він може сприяти визначенню головного ринкового тренду, однак для визначення конкретного курсу його буває недостатньо. Для цих цілей служить технічний аналіз.

Технічний аналіз проводиться з метою моментального аналізу ринку і уловлювання короткострокових аспектів його поведінки. Технічний аналіз складається в побудові діаграм, вивченні тільки що укладених контрактів і т.ін. Насамперед він спрямований на вивчення динаміки цін на конкретний актив з метою передбачення руху ціни в найближчий період. Для цього на графіках поведінки цін відшукують повторювані характерні фігури («голова і плечі», «подвійний верх» і т.ін.) і діють у припущенні руху ціни по цій фігурі.

Фундаментальний аналіз грунтується на знанні макроекономічних законів розвитку суспільства і їхнього впливу на динаміку цін окремих товарів, цінних паперів, національних валют. Тоді як технічний аналіз оперує дрібними коливаннями тренду, викликаними спекулятивними діями і настроями учасників ринку.

Фундаментальним аналізом займаються стратегічні інвестори, їх завдання формувати й вгадувати нові тренди в динаміці цін, у той час як технічний аналіз є необхідним інструментом трейдера, тобто учасника ринку, що здійснює спекулятивну валютну діяльність.

На ринку технічний аналіз за допомогою трендових ліній і моделей практично не піддається комп'ютеризації і до того ж йому властивий суб'єктивізм. Складно навчити машину бачити ті фігури чи закономірності у поводженні тренда, яких найчастіше просто нема, а трейдер просто дуже хоче їх бачити. Прості середні в цьому набагато зручніші і надійніші у використанні. Однак виникає одна важлива проблема – проблема вибору порядку для побудови середньої (скільки послідовних значень цін необхідно взяти для побудови середньої). Неправильний вибір порядку середньої не тільки не дасть потрібний сигнал, але може привести до помилки.

Розглянемо основні методи технічного аналізу.

Серед простих середніх виділяють три основних типи: *прості ковзні середні; зважені ковзні середні; експонентні ковзні середні*. Розглянемо ці середні.

Спосіб побудови простих ковзних середніх (Moving Average – MA) зводиться до формули простої арифметичної середньої:

$$MA = (\text{Сума цін за період часу}) / \text{порядок середньої}. \qquad (3.4)$$

Таким чином, це найпростіша формула середньої, з якою знайома людина. Відповідно вона дає найбільш наближені сигнали, як правило, дещо запізнілі.

При розрахунку зважених ковзних середніх (Weighted Moving Average – WMA) кожній з цін аналізованого проміжку часу надається «вага», що збільшується в напрямку до поточного дня. Формула для розрахунку буде виглядати так:

$$WMA = (\text{Сума добутку цін і ваги}) / (\text{Сума ваги}). \qquad (3.5)$$

Основною для застосування рекомендується експонентна ковзна середня. При розрахунку експонентної середньої (Exponentially Moving Average – EMA) також провадиться присвоєння ваг різним цінам, найбільша вага привласнюється при цьому останнім значенням ціни. Її відмінною рисою від зваженої середньої є те, що вона містить у собі всі ціни попереднього періоду, а не лише відрізок, що визначається періодом. Формула буде виглядати так:

$$EMA(t) = EMA(t - l) + (ДО \cdot [Ціна(t) - EMA\ (t - 1)]), \qquad (3.6)$$

де t – індекс, означає сьогоднішній день;

(t - 1) – учорашній день;

ДО = 2 / (n + 1), де n – період середньої.

Таким чином, відбувається згладжування кривої ковзної середньої щодо графіка цін. Вибір конкретної середньої провадиться залежно від можливостей побудови різних середніх. Але EMA дає більше можливостей для відкриття позиції вчасно, без запізнення.

Практично весь технічний аналіз є по своїй суті статичним, тому що він проводиться на основі останньої ціни і не враховує поточну динаміку цін.

Канали зміни цін грунтуються на принципі чутливості ціни на біржі. Важливим елементом вивчення поводження цін є аналіз відхилень ціни від її ковзної середньої, тобто дослідження випадкового компонента зміни курсу. Величина, що характеризує відхилення, називається «чутливістю» (volatility). Чутливість різні автори визначають по-різному: як найбільший розмах коливань, як середні відхилення чи як середньоквадратичні відхилення.

Найпростіший (і найстаріший) з таких індикаторів, що визначають чутливість цін – канал цін (Price Chennel Upper – PCU). Для побудови каналу цін у даному індикаторі розраховується просте ковзне середнє MA і будується смуга довкола нього. Верхню межу смуги одержують, відступаючи від MA вгору на величину, що розраховується як певний відсоток d від MA, і нижню, відступаючи вниз на відсоток u від MA.

$$\begin{cases} U = \{1 + u/100\} \cdot MA(P, n) \\ L = \{1 - (u/100)\} \cdot MA(P, n), \end{cases} \tag{3.7}$$

де U – верхня смуга каналу цін;

L – нижня смуга каналу цін;

u – установлений трейдером відсоток відхилення верхньої смуги від ковзної середньої;

d – установлений трейдером відсоток відхилення від нижньої смуги;

MA (P, n) – ковзна середня.

Індикатором, що найбільше застосовується на валютному ринку є PTP (Parabolic Time Price System). Индикатор PTP був розроблений і описаний у 1976 році Уеллесом Уілдером. Цей індикатор являє собою лінію, що знаходиться вище чи нижче графіка ціни і сигналізує про знижувальний чи зростаючий тренди відповідно. Головне завдання індикатора PTP – показувати основний тренд і при цьому визначати момент закриття відкритих раніше позицій у період розвороту тренда.

Ціна закриття встановлюється індикатором PTP щодня за формулою:

$$Stop(завтра) = Stop(сьогодні) + AF \cdot [EP(сьогодні) - Stop(сьогодні)], \tag{3.8}$$

де Stop (сьогодні) – поточна ціна закриття;

Stop (завтра) – ціна закриття завтрашнього дня;

EP (сьогодні) – екстремальний рівень торгів на поточний день: при відкритій позиції в купівлю – це верхня ціна з моменту купівлі (high), якщо відкрита позиція в продаж – це найменша ціна з моменту продажу (low);

AF – чинник усереднення, визначає швидкість, з якою варто зрушувати в напрямку відкритої позиції ціну закриття. У перший день AF, як правило, приймається 0.02. Збільшення чи зменшення стартової величини AF дозволяє відповідно збільшити чи зменшити чутливість лінії PTP.

Таким чином, лінія PTP є гарним підтверджуючим індикатором для визначення діючого валютного тренду.

Осцилятор – особливий тип індикаторів, що мають властивість обов'язково повертатись до своїх середніх значень, тобто в нормальний стан. Розглянемо дію найвідоміших осциляторів.

1. Momentum. Найпростіший спосіб побудови осциляторів виявляє собою індикатор Momentum. Кожне значення Momentum обчислюється як різниця між значеннями ціни через певний часовий інтервал. Негативні і позитивні значення, що утворились, зображуються на графіку з опорною нульовою лінією. Загальна формула виглядає так:

$$M = P_1 - P_0, \tag{3.9}$$

де P – ціна закриття;

індекс 1 позначає поточний день;

індекс 0 – задана кількість днів назад.

Як і у випадку із середніми, більш чутливими до руху ціни лініями Momentum будуть ті, в яких порядок менший.

2. RSI (Індекс відносної сили). Індикатор RSI був розроблений Дж. Уілдером (молодшим) і опублікований у 1978 році в його одній з найважливіших в історії технічного аналізу книг «Нові концепції в технічних торгових системах». Необхідність створення індикатора RSI автор обгрунтовував значними недоліками провідного в той час індикатора Momentum. Індекс відносної сили є сьогодні одним із найбільш популярних осциляторів. Формула для розрахунку RSI виглядає таким чином:

$$\begin{cases} RSI = 100 - [100/(1 + RS)]; \\ RS = AUx / ADx, \end{cases} \tag{3.10}$$

де x – індекс, позначає кількість днів у періоді аналізу (порядок RSI);

AU – сума позитивних змін ціни за період;

AD – сума негативних змін ціни за період.

Можна помітити, що основним принципом для розрахунку RSI є теорія ймовірності. На підставі застосування цієї теорії можна сказати, що ціна не може підніматися нескінченно довго, як і опускатися.

3. Stochastic (Стохастичні лінії). Стохастик був розроблений Ч. Лайном багато років тому, але одержав поширення лише з появою комп'ютерної техніки. Метою стохастика є ідентифікація цінових тенденцій і поворотів шляхом спостереження за розміщенням цін закриття усередині останньої серії піків і низів.

Цей метод заснований на спостереженні такого факту. Коли ціни ростуть – їх денні рівні закриття мають тенденцію бути ближче до значення максимуму, що закінчує їх останню серію. Якщо ціни продовжують змінюватися чи ростуть, а ціни закриття щоденних торгів починають падати в межах діапазону останньої серії, це сигналізує про внутрішню слабість ринку і готовність його тенденцій до повороту.

Формула для обчислення стохастичних ліній відображає розташування поточної ціни закриття щодо обраного часового періоду. Звичайну стохастичну лінію (К) розраховують на відрізку в 5 днів:

$$K = 100 \cdot [(C_1 - L_5) / (H_5 - L_5)], \qquad (3.11)$$

де C_1 – поточна ціна закриття;

L_5 – найнижчий рівень за останні 5 днів;

H_5 – найвищий рівень за останні 5 днів.

Побудовані в такий спосіб стохастичні лінії називають швидкими, порядки даних ліній 5 і 3. Осцилятори можливо використовувати, тільки при короткостроковому прогнозуванні валютних курсів, це є їх недоліком.

Хвильова теорія була висунута Ральфом Нельсоном Еліотом у монографії «Хвильовий принцип», опублікованій у 1938 році. Для математичного викладу своєї теорії Еліот використовував принцип чисел Фібоначі. При цьому він показав на 80-літньому періоді аналізу існування 8 хвиль, 5 з яких належать «бичачому» тренду і 3 – належать «ведмежому» тренду.

Як правило, хвилі Еліота дуже добре проглядаються на вже минулому ринку і погано видні при аналізі майбутнього. Хоча існують спеціальні аналітичні фірми, що засновують свої прогнози тільки на описаній вище теорії. Практичні успіхи цих фірм не розголошуються, але, за інформацією деяких користувачів аналізів подібних фірм, вони не вражають.

Необхідно відзначити також той факт, що свою теорію Еліот вивів на основі аналізу фондового ринку. Для валютного ринку хвилі Еліота можуть, мабуть, мати як пряме їхнє зіставлення, так і зворотне. Зв'язано це з тим, що кожне з котирувань валют має як пряме своє позначення, так і зворотне. Наприклад, USD/DEM чи DEM/USD. Тому те, що нам може видатись "бичачою" хвилею для USD/DEM, буде "ведмежою" хвилею для DEM/USD. З цього факту можна зробити наступний висновок: треба буди подвійно обережними в застосуванні циклічних хвиль Еліота на валютному ринку.

3.2. Опціони і ціноутворення опціонів

Опціони є похідними цінними паперами, похідним фінансовим інструментом. Організована торгівля ними почалася тільки в 1973 році. У даному підрозділі розглядається використання опціонів для зменшення ризику фінансових операцій, а також визначення ціни на них.

1. Опціони

Опціон на покупку (call-option) надає право його власнику (власнику опціону) купити актив за встановленою у цьому документі ціною не пізніше визначеної дати (*американський опціон*) або на момент такої дати (*європейський опціон*). Ціна ця називається *ціною виконання*. Власник опціону може відмовитися від зазначеної покупки активу без усяких штрафів.

Аналогічно *опціон на продаж* (put-option) надає право його власнику продати актив за встановленою у цьому документі ціною не пізніше визначеної дати (американський опціон) або на момент такої дати (європейський опціон). Далі розглядаються тільки європейські опціони.

Той, хто виписав опціон, тобто його продавець несе певне зобов'язання в час дії опціону. Зокрема, якщо він виписав опціон на покупку, то несе зобов'язання забезпечити поставку активу за ціною виконання в момент виконання опціону, а якщо він виписав опціон на продаж, то повинен купити актив за ціною виконання в момент виконання опціону.

Навпаки, власник опціону ніяких зобов'язань не несе, але він купує опціон і сплачує виписавшому опціон деяку суму, названу премією або просто вартістю опціону.

Розглянемо більш докладно європейський опціон на покупку. Коли настає дата виконання опціону, то власник опціону порівнює ринкову ціну на актив S і ціну виконання R, тобто зазначену в опціоні. Якщо $S > R$, то він реалізує своє право покупки активу за ціною R, купує актив за цією ціною (і може негайно його продати і отримати прибуток S-R). Але як фактично реалізується його право купити актив за більш низькою ціною, ніж ринкова? Це право йому забезпечує продавець опціону, поставляючи фізичний актив або доплачуючи різницю S-R власнику опціону (ці зобов'язання забезпечуються спеціальним біржовим механізмом – кліринговою палатою). Власник опціону опиняється у виграші і тим більшому, ніж більша різниця S-R. Але якщо ринкова ціна не перевищує ціну виконання, то власнику опціону немає сенсу купувати актив. У цьому випадку він у програші, тому що за опціон він заплатив премію і вона пропала зря.

Отже, опціон на покупку купують тоді і ті, хто сподівається на підвищення ринкової ціни активу до дати виконання опціону. Аналогічна справа і з опціонами на продаж.

Залежно від співвідношення між ціною активу в момент продажу опціону S і ціною виконання R, зазначеної в ньому, опціони називаються *опціонами з виграшем*, з нульовим виграшем і із програшем. Для опціонів колл (на покупку) це означає, що $S>R$, $S=R$ і $S<R$.

Торгівля опціонами – справа досить складна і відбувається на біржах. Сьогодні у світі опціонів щодня продають і купують мільйони штук. Справа, однак, рідко доходить до поставки фізичних активів. Звичайно, що сторона яка програла, оплачує свій програш грошима.

Як вище сказано, американський опціон можна пред'явити до виконання в будь-який момент не пізніше визначеної дати. Тому власник такого опціону увесь час у напрузі: а раптом зараз і є цей найвигідніший момент і далі може бути тільки гірше. Через цю можливість вибору найвигіднішого моменту американський опціон повинен бути дорожчим; це підтверджують і теорія і практика.

2. Визначення вартості опціону на момент виконання

При організованій торгівлі опціонами вони знеособлені і стають зовсім звичайними цінними паперами на пред'явника. Опціон може бути куплений або проданий у будь-який момент до дати його виконання. Визначимо його ціну безпосередньо перед виконанням (усякого роду витратами на оформлення угоди і т.ін. знехтуємо).

Отже, нехай ринкова ціна активу S, ціна виконання R, а C – вартість опціону на покупку. Ясно, що $C=S–R$, якщо $S>R$ і $C=0$, якщо $S \leq R$. Це можна записати так: $C=max\{O,S–R\}$. Аналогічно у випадку опціону на продаж його вартість $C=max\{0,R–S\}$.

Тепер відзначимо ще одне розходження в позиціях продавця і покупця опціону. Той, хто купив опціон відразу ж зазнає збитків у розмірі ціни опціону, який він купив. Але на цьому всі його збитки скінчилися. У майбутньому він може тільки одержати дохід, причому у випадку опціону на покупку теоретично необмежений – адже його можливий дохід – це різниця між ринковою ціною активу в момент виконання опціону і ціною виконання. Навпаки, той, хто продав опціон відразу ж одержав дохід у розмірі вартості опціону, який він продав. Але на цьому всі його доходи скінчилися. Попереду його очікують тільки можливі збитки, причому у випадку опціону на покупку теоретично необмежені – ці можливі збитки є різниця між ринковою ціною активу в момент виконання опціону і ціною виконання.

3. Ціноутворення опціонів на основі біноміальної моделі

Ідея оцінювання опціону полягає в створенні безризикового портфеля шляхом покупки активу і продажу (виписки) декількох опціонів на покупку цього ж активу. Наступний аналіз цього портфеля дозволяє визначити вартість опціону. Допустимо, поведінка ціни активу описується біноміальною одноперіодною моделлю.

Отже, нехай ціна активу S=60 гр. од., така ж і ціна виконання опціону на покупку. Термін дії опціону європейського типу один місяць. Припустимо, що до кінця місяця з ймовірністю 1/2 ціна активу або підніметься на 15 гр. од., або опуститься на стільки ж. У першому випадку опціон безпосередньо перед виконанням буде коштувати 15 гр. од., у другому випадку не буде коштувати нічого. Тому в першому випадку продавець опціону повинен заплатити власнику опціону 15 гр. од., у другому випадку він не повинен нічого платити. Тому що розмах коливань цін активу дорівнює 30 гр. од. і рівно у два рази перевершує коливання вартості опціону перед виконанням, то для створення безризикового портфеля продавець опціонів повинен виписати 2 опціони на покупку.

Перевіримо, що портфель із активу і цих двох опціонів дійсно безризиковий. Справді, у рамках розглянутої моделі до кінця місяця ціна активу буде або 75 гр. од., або 45 гр. од. У першому випадку власник портфеля змушений буде доплатити власникам опціонів 30 гр. од., у другому випадку – нічого. В обох випадках до кінця місяця портфель буде коштувати 45 гр. од. незалежно від ціни активу. Це і означає його безризиковість.

Тепер перейдемо безпосередньо до визначення ціни опціону. Нехай банківська безризикова ставка дорівнює 10%. Оскільки портфель безризиковий, то його сучасну вартість знайдемо, дисконтуючи його вартість наприкінці місяця по безризиковій ставці. Отже, його сучасна вартість дорівнює 45/(1+0,1)=41 гр. од. Але зараз актив коштує 60 гр. од., тому два опціони разом коштують 60-41=19 гр. од. Отже, один опціон коштує 9,5 гр. од. За таку ціну обидва опціони і повинні бути продані.

Цікаво детально простежити за станом (багатством) продавця опціонів. Спочатку в нього був тільки актив вартістю 60 гр. од. Потім він виписав і продав два опціони, кожний по 9,5 гр. од. Тепер у нього грошей 19 гр. од. за продані опціони, актив вартістю 60 гр. од. і зобов'язання щодо забезпечення двох опціонів, ціна цих зобов'язань 19 гр. од. і вони утворюють його пасив. Актив і цей пасив разом утворюють безризиковий портфель вартістю 41 гр. од. До кінця місяця 19 гр. од. зростуть по безризиковій ставці до 19·(1+0,1)=21 гр. од., вартість безризикового портфеля зросте по безризиковій ставці до 41·(1+0,1)= 45 гр. од. Усього в продавця опціонів буде 21+45 = 66 гр. од. – у точності так якби його актив був безризиковим і його вартість зросла б по безризиковій ставці до 60·(1+0,1)=66! Уміле хеджування повністю захистило від ризику.

Як вище вже показано, при біноміальній моделі (див. п. 3.1) ціна активу до кінця *n-го* проміжку є біноміально розподілена величина, яку можна представити у вигляді $S = S_0 + x_1 + ... + x_n$, де випадкові величини $x_i, i = 1,...,n,$, – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що приймають два значення 1,-1 з ймовірностями 1/2 кожне. Нехай ціна виконання опціону дорівнює S_0, тобто дорівнює ринковій ціні активу в даний момент 0. При цьому припускається, що $S_0>n$.

Дохід власника опціону при виконанні опціону є:

$$C_n = \max\{0, S_n - S_0\} = \max\{0, x_1 + ... + x_n\}. \qquad (3.12)$$

Обмежимося, як і в попередньому підрозділі, тільки одним періодом, тоді $C = \max\{0, x_1\}$.

Зрозуміло, що *C* – випадкова величина. Оскільки торгівля опціонами носить масовий характер, то при визначенні їхньої ціни можна використовувати середні числа. Зокрема, середній очікуваний дохід власника опціону від одного опціону на покупку є математичне очікування випадкової величини C_1, яке можна визначити як математичне очікування випадкової величини $\max\{0, x_1\}$, тобто $C_1 = M[\max\{0, x_1\}]$.

Доведемо, що це і є «справедлива» ціна опціону. При цьому для спрощення приймемо, що безризикова ставка дорівнює 0. «Справедливість» ціни означає, що продавець опціону зуміє забезпечити виконання опціону і не більше, тобто ніякого прибутку на виписці опціону він не заробить.

Далі опустимо індекс в C_1 і x_1. Доведемо, що С=1/2. Найпростіше знайти C, зробивши над випадковою величиною x велику кількість опитів, скажемо, 100. При цьому в 50 опитах x прийме значення 1 і тому $M[\max\{0, x\}] = 1/2$.

Тепер покажемо, як продавець опціону може розпорядитися цією сумою, щоб забезпечити виконання опціону. Він бере в банку позику величиною $S_0/2-1/2$, додає до цієї суми виручену за продаж опціону 1/2 гр. од. і на суму $S_0/2$ купує половину одиниці активу. Отже, зараз у нього є одиниця активу і портфель, що складається з боргу банку, активу вартістю $S_0/2$ і ще зобов'язання забезпечити виконання опціону. Переконаємося, що цей портфель безризиковий вартістю 0.

Справді, якщо до моменту виконання опціону ціна активу збільшиться на 1 гр. од., то вартість активу в портфелі збільшиться до $1/2 \cdot (S_0 + 1)$, із цієї суми 1 гр. од. піде власнику опціону, а інша, тобто $S_0 / 2 - 1/2,$– на погашення позики в банку. Якщо ж ціна активу впаде на 1 гр. од., то власнику опціону нічого не треба платити, а актив портфеля буде проданий за $1/2 \cdot (S_0 - 1)$ – це в точності борг банку.

Доведемо далі, що опціон не може коштувати менше ніж C, у цьому випадку не може коштувати менше ніж 1/2, тому що якщо він менше 1/2, то це не дозволить продавцю опціону забезпечити виконання опціону, що означало б крах всієї опціонної торгівлі. Справді, якби опціон коштував менше і при цьому продавець якось умудрявся забезпечувати виконання опціонів, то покупець опціону мав би строго позитивний дохід. Це дозволило б йому зговоритися із продавцем опціону, і вони разом би побудували «грошову машину»: продавець без кінця виписував би опціони, покупець їх купував, а цей строго позитивний дохід вони б ділили, тобто робили б гроші з нічого. Але це неможливо.

На закінчення зупинимося на вартості опціону наприкінці не одного розрахункового періоду, а багатоперіодного проміжку. Тоді

$C_n = M[\max\{0, x_1 + ... + x_n\}]$ (ціна виконання як і раніше дорівнює ціні на момент продажу опціону).

При *n>10* відповідно до центральної граничної теореми сума $x_1 + ... + x_n$ розподілена приблизно за нормальним законом з параметрами: математичне очікування дорівнює 0, дисперсія дорівнює *n*. Отже, шукане математичне очікування $M[\{0, x_1 + ... + x_n\}]$ дорівнює:

$$\int_0^\infty 1/\sqrt{2\pi n} \cdot^{-x^2/2n} \cdot dx/2 = \sqrt{2/2\pi.} \tag{3.13}$$

Отже, для багатоперіодного розрахункового проміжку вартість опціону на покупку дорівнює:

$$C = \sqrt{n/(2\pi)} \tag{3.14}$$

4. Створення за допомогою опціонів безризикових портфелів

Приклад створення такого портфеля наведений вище. При цьому були використані опціони на покупку, які виписав власник активу. Створити безризиковий портфель можна і за допомогою опціонів на продаж. Розглянемо аналогічний приклад.

Нехай ціна активу *S* дорівнює 60 гр. од., така ж і ціна виконання опціону на продаж. Термін дії опціону європейського типу один місяць. Припустимо, що до кінця місяця з ймовірністю 1/2 ціна активу або підніметься на 15 гр. од., або опуститься на стільки ж. У першому випадку опціон безпосередньо перед виконанням буде коштувати 15 гр. од., у другому не буде коштувати нічого. Тому в першому випадку продавець опціону повинен заплатити власнику опціону 15 гр. од., у другому випадку він не повинен нічого платити. Оскільки розмах коливань цін активу дорівнює 30 гр. од. і рівно у два рази перевершує коливання вартості опціону перед виконанням, то для створення безризикового портфеля власник активу повинен купити 2 опціони на продаж. Перевіримо, що портфель із активу і цих двох опціонів дійсно безризиковий.

Справді, у рамках розглянутої моделі до кінця місяця ціна активу буде або 75 гр. од., або 45 гр. од. У першому випадку власник портфеля нічого не буде робити з купленими ним опціонами на продаж, у другому випадку продавець опціонів виплатить йому по 15 гр. од. за опціон. В обох випадках до кінця місяця портфель буде коштувати 75 гр. од. незалежно від ціни активу. Це і означає його безризиковість.

Тепер перейдемо безпосередньо до визначення ціни опціону. Нехай банківська безризикова ставка дорівнює 10%. Оскільки портфель безризиковий, то його сучасну вартість знайдемо, дисконтуючи його вартість наприкінці місяця по безризиковій ставці. Отже, його сучасна вартість дорівнює 75/(1+0,1)=68,2 гр. од. Але зараз актив коштує 60 гр. од. і тому два опціони разом коштують 68,2-60=8,2 гр. од. Отже, один опціон коштує 4,1 гр. од. За таку ціну обидва опціони і повинні бути куплені.

Простежимо детально, як у пункті 3 даного розділу, за капіталом покупця опціонів. Спочатку в нього був тільки актив вартістю 60 гр. од. Потім він купив два опціони, кожний по 4,1 гр. од. Тепер у нього грошей -8,2 гр. од. – борг за куплені опціони, актив вартістю 60 гр. од. і два опціони, що є фактично теж активами, ціна цих активів 8,2 гр. од. Колишній актив і ці два опціони разом утворюють безризиковий портфель вартістю 68,2 гр. од. До кінця місяця -8,2 гр. од. зменшаться по безризиковій ставці до -8,2·(1+0,1)= -9 гр. од., вартість безризикового портфеля зросте по безризиковій ставці до 75 гр. од., усього в покупця буде 75-9=66 гр. од. – у точності так якби його актив був безризиковим і його вартість зросла б по безризиковій ставці до 60·(1+0,1)=66 д.е.! Уміле хеджування, як і в попередньому прикладі, повністю відгородило покупця від ризику.

За допомогою опціону на покупку можна застрахуватися від зайво високого підвищення ціни на актив, що нас цікавить, і забезпечити його придбання за сьогоднішньою ціною. Це робиться таким чином.

Купимо опціон на покупку цього активу за ціною виконання *E* і одночасно грошову суму величиною $E \cdot (1+b)^{-T}$, вкладемо в банк по безризиковій ставці *b*. До моменту виконання опціону, тобто через час *T*, ця сума зросте до *E.* Якщо ціна активу до цього моменту не перевищить *E*, то купимо актив; інакше купимо актив за допомогою наявного в нас опціону на покупку.

Між вартостями опціонів на покупку і на продаж є зв'язок, відомий як *теорема паритету опціонів*.

Нехай *C, P* – вартості відповідно опціону на покупку і опціону на продаж і *S,E* – ціна активу в момент продажу-покупки опціонів і відповідно ціна виконання. Тоді:

$$P = C + E \cdot (1+b)^{-T} - S, \tag{3.15}$$

де *b* – безризикова ставка, *T* – час опціону.

Для доведення цієї формули проведемо два умовних експерименти.

1. Придбаємо актив за ціною S і опціон на продаж із ціною виконання E і вартістю P, затративши всього $S+P$. Якщо ціна активу в момент виконання опціону перевищить E, то актив збережемо, у протилежному випадку актив продамо за ціною E.

2. Купимо опціон на покупку цього активу із ціною виконання E і вартістю C і одночасно вкладемо по безризиковій ставці b грошову суму величиною $E \cdot (1+b)^{-T}$, усього затратимо $C + E \cdot (1+b)^{-T}$; до моменту виконання опціону, тобто через час T, ця сума зросте по безризиковій ставці до E. Якщо ціна активу до цього моменту не перевищить E, то купимо актив; інакше купимо актив за допомогою наявного в нас опціону на покупку.

У рамках розглянутої моделі обидва експерименти дають наприкінці один результат: якщо ціна активу до моменту виконання опціону перевищить E, то будемо мати актив, інакше – грошову суму E. Отже, і на початку цих експериментів наш капітал повинен бути однаковим, тобто повинен бути $S + P = C + E \cdot (1+b)^{-T}$ звідки і слідує формула (3.15). Якщо ціна виконання опціонів збігається із сьогоднішньою ринковою ціною активу, то опціон на покупку дорожчий опціону на продаж.

На закінчення відзначимо, що різним розрахункам, пов'язаним з опціонами, присвячена величезна кількість наукових праць. Початок цьому поклали роботи Ф. Блека і М. Шоулса в 1973 році і Р.С. Мертона (у той же час), присвячені ціноутворенню опціонів. Ці роботи без перебільшення зробили революцію у фінансових розрахунках.

Задачі до розділу 3

1. У найпростішій біноміальній моделі з п. 3.1 визначите: а) яка ймовірність того, що ціна стане менша початкової за день; за 2 дні; за 3 дні; б) залишиться незмінною протягом 2 днів; 3 днів; в) стане такою же через день; через 2 дні; через 3 дні.
2. Доведіть, що в найпростішій біноміальній моделі з п. 3.1 ціна «не пам'ятає» свого минулого, тобто її випадкова поведінка є марковський процес. Графічно це відображається так: у біноміальному дере-

ві, що виростає з будь-якого «сучка» наступне дерево ізоморфне первинному біноміальному дереву.

3. Власник магазина пишається тим, що ціни в нього стабільні протягом тижня. Він говорить: «У понеділок я ціни призначаю по обставинах. Але потім, якщо не відбувається нічого з ряду видатного, я намагаюся їх не міняти». Формальний опис: якщо за попередні n днів було k змін ціни, то ймовірність того, що наступного дня ціна не зміниться, дорівнює $(n-k)/(n+1)$. Переконаєтеся, що такі ціни «пам'ятають» своє минуле.
4. За найпростішою біноміальною моделлю з п. 3.1 якийсь спостерігач спостерігає ціни через день. Як для нього виглядає множина можливих цін?
5. Побудуйте дерево можливих цін активу в біноміальній моделі Кокса–Росса–Рубінштейна (КРР) при $a=0$, $b=0,1$, $S_0=10$ до $n=5$. Яка найбільша можлива ціна активу в цій моделі? Яка ймовірність, що до $n=5$ ціна виявиться 10, не більше 11, не більше 12? Знайдіть ймовірність того, що в n-*й* момент ціна буде більша початкової. Знайдіть математичне очікування ціни активу в моменти $n=1,2$?
6. Розглянете аналог найпростішої біноміальної моделі з п. 3.1, у якій ймовірності підвищення і зниження ціни не рівні 1/2.
7. Нехай у моделі КРР $a=-0,1$; $b=0,3$. Знайдіть ймовірність того, що при досить більших n (>10) $S_n>S_0$ (S_0 вважати досить великим).
8. Припустимо, що логарифм відношення цін через одиничний проміжок часу розподілений за нормальним законом з параметрами a і σ і поведінка ціни на непересічних часових проміжках незалежна. Знайдіть розподіл логарифма відношення цін через n одиничних проміжків часу. Вважаючи початкову ціну S_0 фіксованою, знайдіть математичне очікування і дисперсію ціни S_n.
9. Нехай початкова ціна активу S_0=100 і за одиницю часу ціна зростає на 3 або убуває на 1 з ймовірністю 1/2. Знайдіть ймовірність того, що при $n>10$ ціна $S_n>S_0$.
10. Розглянете два опціони на покупку, у всьому однакових, але з різними цінами виконання. Який опціон дорожче?
11. В одноперіодній біноміальної моделі для створення безризикового портфеля треба продати 2 опціони. Скільки опціонів треба продати для тієї ж мети в багатоперіодній біноміальній моделі?

Розділ 4. Задача про оптимальний портфель цінних паперів

4.1. Оптимальний портфель цінних паперів

На фінансовому ринку обертається, як правило, безліч цінних паперів: державні цінні папери, облігації, корпоративні акції і т.ін. Якщо в учасника ринку є вільні гроші, то їх можна віднести в банк і отримувати відсотки або купити на них цінні папери і отримувати додатковий дохід. Але в який банк віднести? Які цінні папери купити? Малоризикові цінні папери, як правило, і малоприбуткові, високоприбуткові, як правило, більш ризикові. Економічна наука може дати деякі рекомендації для вирішення цього питання.

Отже, інвестор шукає на фінансовому ринку активи, здатні задовольнити його побажання щодо прибутковості і ризикованості. Це – його попит на ринку.

1. Постановка задачі про оптимальний портфель

Розглянемо загальну задачу розподілу капіталу, коли учасник ринку хоче витратити капітал на покупку цінних паперів, по різних видах цінних паперів. Випереджаючи точні математичні постановки, констатуємо очевидну загальну мету інвестора – вкласти гроші так, щоб зберегти свій капітал, а при можливості і наростити його.

Набір цінних паперів, що знаходяться в учасника ринку, називається його *портфелем*. *Вартість портфеля* – це сумарна вартість всіх складових його паперів. Якщо сьогодні його вартість є P, а через рік вона виявиться рівною P' то $(P'-P)/P$ природно назвати прибутковістю портфеля у відсотках річних. Тобто *прибутковість портфеля* – це прибутковість на одиницю його вартості.

Нехай x_i – частка капіталу, витрачена на покупку цінних паперів *i-го* виду. Міркування про частки еквівалентні тому, що весь виділений капітал приймається за одиницю. Нехай d_i – прибутковість у відсотках річних цінних паперів *i*-го виду розраховуючи на одну грошову одиницю.

Знайдемо прибутковість усього портфеля d_p. З одного боку, через рік капітал портфеля буде дорівнює $1+d_p$, з іншого боку – вартість паперів *i*-го виду збільшиться з x до $x_i + d_i x_i$, так що сумарна вартість портфеля буде $\sum_i x_i + \sum_i x_i d_i = 1 + \sum x_i d_i$. Прирівнюючи обидва вирази для вартості портфеля, одержуємо:

$$d_p = \sum_i x_i d_i \tag{4.1}$$

Отже, задача збільшення капіталу портфеля еквівалентна аналогічній задачі про прибутковість портфеля, вираженій через прибутковості паперів і їхньої частки формулою (4.1).

Як правило, прибутковість паперів коливається в часі, так що будемо вважати її випадковою величиною. Нехай m_i, σ_i – середня очікувана прибутковість і середнє квадратичне відхилення (СКВ) цієї випадкової прибутковості, тобто $m_i = M[d_i]$ – математичне очікування прибутковості і $r_i = \sqrt{V_{ii}}$, де V_{ii} – варіація або дисперсія i-ї прибутковості. Будемо називати m_i, r_i відповідно ефективністю і ризиком i-го цінного паперу. Через V_{ij} позначимо коваріацію прибутковості цінних паперів i-го і j-го видів (або кореляційний момент K_{ij}.)

Оскільки прибутковість складових портфеля цінних паперів випадкова, то і прибутковість портфеля є також випадковою величиною. Математичне очікування прибутковості портфеля є $M[d_P] = x_1 M[d_1] + ... + x_n M[d_n] = \sum_i x_i m_i$, позначимо його через m_p. Дисперсія прибутковості портфеля є $D[d_P] = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Так само, як і для цінних паперів, назвемо m_p ефективністю портфеля, а величину $\sigma_P = \sqrt{D[d_P]}$ – ризиком портфеля r_p. Звичайно дисперсія прибутковості портфеля називається його варіацією V_P.

Отже, ефективність і ризик портфеля виражені через ефективності складових його цінних паперів і їх спільні коваріації.

Приклад 1. Портфель наполовину (за вартістю) складається з паперів першого виду із прибутковістю 14% річних і з паперів другого виду із прибутковістю 8% річних. Яка ефективність портфеля?

Рішення. Обидва терміни – прибутковість і ефективність – спеціально згадані разом. *Відповідь:* 0,5·14+0,5·8=11% річних.

Кожний власник портфеля цінних паперів зіштовхується з дилемою: хочеться мати ефективність побільшу, а ризик поменший. Однак оскільки «не можна піймати двох зайців відразу», необхідно зробити певний вибір між ефективністю і ризиком (цей вибір, в остаточному підсумку, визначається відношенням ЛПР до ефективності і ризику).

Розглянемо два портфелі цінних паперів. Оскільки портфель оцінюється по двох характеристиках – ефективності і ризику, то між портфелями є відношення домінування. Скажемо, що 1-й портфель із ефективністю e_1 і ризиком r_1 домінує 2-й з e_2, r_2 якщо $e_1 \ge e_2$ і $r_1 \le r_2$, і хоча б одна із цих нерівностей строга. Недоміновані портфелі назвемо *оптимальними за Парето*, такі портфелі називають ще *ефективними*. Звичайно, інвестор повинен зупинити свій вибір тільки на ефективних портфелях.

Якщо розглянути яку-небудь множину портфелів і нанести їх характеристики – ризик r_p і ефективність m_p на площину ризик – прибутковість, то типова множина ефективних портфелів виглядає, як крива DAC на рисунку 4.1.

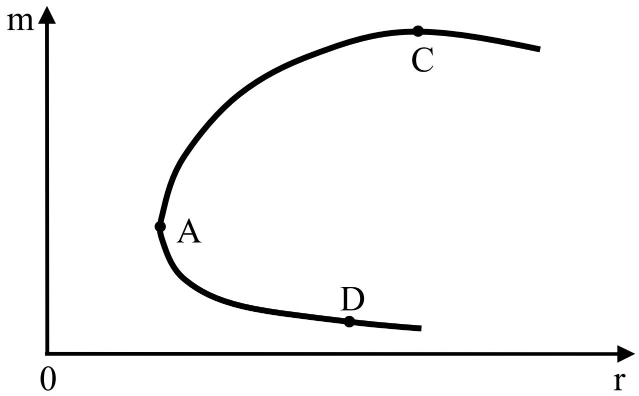


Рисунок 4.1 – Типова множина ефективних портфелів

2. Диверсифікованість портфеля

Будь-який інвестор зацікавлений у зменшенні ризику портфеля при підтримці його ефективності на певному рівні. Які існують рекомендації загального характеру щодо зниження ризику портфеля?

Нехай у портфелі зібрано *N* різних видів цінних паперів. Розглянемо дисперсію портфеля $V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Розіб'ємо доданки на дві групи: $V_P = \sum_i x_1^2 V_{ii} + \sum_{i \ne j} x_i x_j V_{ij}$. У першій групі доданків *N*, у другий – *N(N-1)*. Припустимо для простоти, що вартість портфеля розподілена рівними частками на ці види цінних паперів, тобто всі $x_i=1/N$. Тоді за формулами для дисперсії маємо:

$$V_P = (1/N^2)\sum_{i} V_{ii} + (1/N^2)\sum_{i\neq j} V_{ij} = (1/N)\left(\sum_{i} V_{ij}/N\right) + (N-1/N)$$

$\left(\sum_{i\neq j} V_{ij}/[N(N-1)]\right)$. Величина $\left(\sum_{i} V_{ii}/N\right)$ може бути названа *середньою дисперсією цінних паперів*, що входять у портфель, а величина $\sum_{i\neq j} V_{ij}/[N(N-1)]$ – їх *середньою коваріацією*. Тому попередню формулу можна виразити словами: дисперсія портфеля дорівнює *(1/N)* середньої дисперсії плюс *(1–1/N)* середньої коваріації. Це і є *ефект диверсифікованості портфеля*: з ростом числа вхідних у портфель цінних паперів у його дисперсії (і ризику) внесок середньої дисперсії (середнього ризику) стає усе менше, зато усе більше – внесок середньої коваріації. Тому якщо вхідні в портфель цінні папери мало корельовані один з одним, то дисперсія портфеля зменшується з ростом числа вхідних у портфель паперів.

У реальності, однак, практично всі цінні папери, що обертаються на ринку, зазнають впливу загальекономічних факторів і змінюються під їхнім впливом. Це приводить до того, що їхня взаємна кореляція є цілком помітною величиною. Ця взаємна кореляція обумовлює так званий *ринковий*, або *систематичний*, *ризик портфеля*. На рисунку 4.2 показана можлива поведінка ризику портфеля при збільшенні числа цінних паперів у ньому.

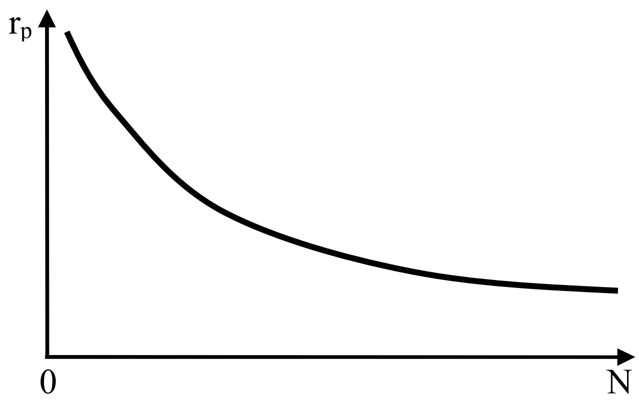


Рисунок 4.2 – Можлива поведінка ризику портфеля при збільшенні числа цінних паперів у ньому

Звичайно, у силу особливостей роботи емітентів цінних паперів кожний конкретний цінний папір зазнає свої коливання ефективності, іноді зовсім не пов'язані із загальноринковими. Ці коливання обумовлюють так званий *індивідуальний*, або *несистематичний*, *ризик* цінного паперу. Диверсифікованість портфеля може майже повністю усунути вплив на ризик усього портфеля індивідуального ризику окремих цінних паперів, але вона не має сил усунути ринковий ризик усього портфеля.

Розглянемо більш конкретно спрощені приклади впливу кореляції різних цінних паперів. Припустимо спочатку, що цінні папери різних видів поводяться незалежно, вони некорельовані, тобто $V_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Тоді:

$$V_P = \sum_i x_i^2 V_{ii} \quad \text{і} \quad \sum_i x_i = 1 \tag{4.2}$$

Припустимо далі, що гроші вкладені рівними частками, тобто $x_i = 1/n$ для всіх $i = 1,...,n$. Тоді $m_P = \left(\sum_i m_i\right)/n$ – середня очікувана ефективність портфеля, і ризик портфеля дорівнює $r_P = \sqrt{\sum_i V_{ii}}/n$. Нехай $\gamma^2 = \max V_{ii}$, тоді $r_P \leq \gamma/\sqrt{n}$.

Звідси висновок: *якщо цінні папери некорельовані, то при зростанні числа їхніх видів n у портфелі ризик портфеля обмежений і прагне до 0 при* $n \to \infty$.

Приклад 2. Припустимо, інвестор має можливість скласти портфель із чотирьох видів некорельованих цінних паперів, ефективності і ризики яких наведено в таблиці.

i	1	2	3	4
e_i	2	4	8	12
σ_i	1	2	4	6

Розглянемо кілька варіантів складання портфеля із цих паперів рівними частками. Нагадаємо, що ефективність портфеля є середнє арифметичне ефективностей, а ризик у цьому випадку $r = \sqrt{r_1^2 + ... + r_n^2}/n$.

А) Портфель утворений тільки з паперів 1-го і 2-го видів. Тоді $m_{12} = (2+4)/2 = 3$; $r_{12} = \sqrt{1^2 + 2^2}/2 \approx 1{,}12$.

Б) Портфель утворений тільки з паперів 1-го, 2-го і 3-го видів. Тоді $m_{1-3} = (2+4+8)/3 = 4{,}67$; $r_{1-3} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}/3 \approx 1{,}53$.

В) Портфель утворений з паперів всіх чотирьох типів. Тоді

$m_{1-4} = (2+4+8+12)/4 = 6{,}5; \quad r_{1-4} = \sqrt{1^2+2^2+4^2+6^2}/4 \approx 1{,}89$.

Як бачимо, при складанні портфеля із все більшого числа цінних паперів ризик зростає досить незначно, а ефективність зростає швидко.

Однак, як зазначено вище, повна некорельованість цінних паперів по суті неможлива.

Розглянемо тепер, як відображається кореляція між видами цінних паперів на характеристиках портфеля. Кореляція не впливає на ефективність портфеля, тому що $m_P = \sum_i x_i m_i$, але вона позначається на його варіації, дисперсії або ризику, тому що $V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Введемо в розгляд величини $k_{ij} = V_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$ – у курсі теорії ймовірностей вони називаються *коефіцієнтами кореляції*. Тоді $V_{ij} = (\sigma_i x_i)\cdot(\sigma_j x_i)\cdot k_{ij}$. Для того щоб зрозуміти вплив кореляції, розглянемо два крайніх випадки.

Спочатку випадок повної прямої кореляції, коли всі k_{ij}=1 – це значить, що при зміні *i*-го фактора *j*-й також змінюється, причому прямо пропорційно. Тоді $V_P = \sum_i \sum_j \sigma_i x_i \sigma_j x_j = \left(\sum_i \sigma_i x_i\right)^2$. Якщо при цьому вкласти гроші рівними частками, тобто $x_i = 1/n$ то $V_P = \left(\sum_i \sigma_i\right)^2 / n^2$ і ризик портфеля $r_P = \sum_i \sigma_i / n$. Якщо $\sigma_i \geq \gamma$, то і $r_p \geq \gamma$.

Отже, при повній прямій кореляції диверсифікованість портфеля не дає ніякого ефекту – ризик портфеля дорівнює середньому арифметичному ризиків складових його цінних паперів і не прагне до нуля при збільшенні числа видів цінних паперів.

Позитивна кореляція між ефективностями двох цінних паперів має місце, коли курс обох визначається одним і тим же зовнішнім фактором, причому зміна цього фактора діє на обидва папери в ту саму сторону. Диверсифікованість портфеля шляхом покупки обох паперів безрезультатний – ризик портфеля від цього не зменшиться.

Тепер розглянемо ситуацію повної зворотної кореляції, тобто коли $k_{ij} = -1$, якщо $i \neq j$. Для розуміння суті справи досить розглянути портфель, що складається всього із двох видів цінних паперів $(n = 2)$. Тоді $V_P = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$ і якщо $x_2 = x_1 \sigma_1 / \sigma_2$, то V_p=0.

Таким чином, при повній зворотній кореляції, можливий, такий розподіл вкладень між різними видами цінних паперів, що ризик повністю відсутній.

Повна зворотна кореляція досить рідке явище і звичайно вона очевидна.

3. Портфель Марковіца мінімального ризику

Розглянемо спочатку математичну формалізацію задачі формування оптимального портфеля, яку запропонував американський економіст Г. Марковіц (H. Markovitz) в 1952 році, за що пізніше одержав Нобелівську премію:

Знайдемо x_i, який мінімізує варіацію портфеля:

$$V_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} \tag{4.3}$$

за умови, що забезпечується задане значення ефективності портфеля m_p, тобто $\sum_i x_i m_i = m_P$.

Оскільки x_i – частки, то в сумі вони повинні складати одиницю: $\sum_i x_i = 1$.

У такій постановці мінімізація варіації рівносильна мінімізації ризику портфеля, тому задача Марковіца може бути сформульована наступним чином.

Знайти x_i, який мінімізує ризик портфеля:

$$r_P = \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}} \tag{4.4}$$

за умови, що забезпечується задане значення ефективності портфеля m_p, тобто $\sum_i x_i m_i = m_p$.

Оскільки x_i – частки, то в сумі вони повинні складати одиницю $\sum_i x_i = 1$.

Рішення (оптимальне) цієї задачі позначимо значком *. Якщо $x_i^* \geq 0$, то це означає рекомендацію вкласти частку x_i^* наявного капіталу в цінні папери *i*-го виду. Якщо ж $x_i^* < 0$, то змістовно це означає провести операцію «short sale» («короткий продаж»). Якщо такі операції неможливі, значить необхідно ввести обмеження $x_i^* \ge 0$.

Що це за операція? Інвестор, що формує портфель, зобов'язується через якийсь час поставити цінні папери *i*-го виду (разом з доходом, який вони принесли б їхньому власнику за цей час). За це зараз він одержує їхній грошовий еквівалент. Ці гроші він приєднує до свого капіталу і купує рекомендовані оптимальним рішенням цінні папери. Оскільки цінні папери інших видів (тобто не *i*-го виду) більш ефективні, то інвестор опиняється у виграші! Власне, можна обійтися і без операції «short sate», якщо інвестору доступні позики коштів по безризиковій ставці.

Цей портфель мінімального ризику із всіх портфелів заданої ефективності називається *портфелем Марковіца мінімального ризику*. Ясно, що його ризик r_p є функція його заданої ефективності m_p.

Приклад 3. За допомогою комп'ютера знайдений оптимальний портфель Марковіца для трьох цінних паперів з ефективностями і ризиками: (4,10); (10,40); (40,80); нижня межа прибутковості задана рівною 15. Частки паперів виявилися рівними: 46%, 28% ,26%, мінімальний ризик – 25,4, прибутковість виявилася рівною заданій – 15.

4. Портфель Тобіна мінімального ризику

Через кілька років після дослідження Марковіца інший відомий американський економіст Д. Тобін (D. Tobin – також згодом лауреат Нобелівської премії) помітив, що якщо на ринку є безризикові папери (до таких можна з деякою натяжкою віднести державні цінні папери), то вирішення задачі про оптимальний портфель сильно спрощується і набуває нової якості.

Нехай m_0 – ефективність безризикових паперів (фактично це безризикова банківська ставка, у СРСР такою можна було вважати річну процентну ставку Ощадбанку по вкладах до запитання, вона була 2-3%), а x_0 – частка капіталу, у них вкладеного, тоді в ризикову частину портфеля вкладена $(1\!-\!x_0)$ частина всього капіталу. Нехай m_r – ефективність і V_r – варіація (дисперсія) ризикової частини портфеля і $r_r = \sqrt{V_r}$ – ризик цієї ризикової частини. Тоді:

- ефективність усього портфеля дорівнює $m_P = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_r$;
- варіація портфеля дорівнює $V_P = (1 - x_0)^2 V_r$;
- ризик портфеля дорівнює $r_P = |1 - x_0| r_r$ (вважається, що безризикові папери некорельовані з іншими).

Крім x_0, отримаємо $m_P = m_0 + r_P(m_r - m_0)/r_r$, тобто ефективність портфеля лінійно залежить від його ризику. Ризикові види цінних паперів будемо нумерувати числами від 1 до *n*.

Задача Марковіца про оптимальний портфель у цьому випадку така:

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min,$$
$$x_0 m_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m_p, \qquad (4.5)$$
$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Викладемо тепер остаточне вирішення цей задачі, отримане Тобіним. Нехай *V* – матриця коваріацій ризикових видів цінних паперів, $X=(x_i)$, $M=(m_i)$ – вектори-стовпці часток *x* капіталу, вкладених в *i*-й вид ризикових цінних паперів і очікуваних ефективностей цього виду, i=1,…,*n*... Нехай також *I – n-мірний* вектор-стовпець, компоненти якого рівні *1*. Тоді оптимальне значення часток x_i є:

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I)} V^{-1}(M - m_0 I) \qquad (4.6)$$

Тут V^{-1} – матриця, зворотна до *V*. У чисельнику дробі стоїть число, у знаменнику, якщо виконати всі дії (операція транспонування першого співмножника в знаменнику не зазначена, але мається на увазі), теж вийде число, причому константа, обумовлена ринком і не залежна від інвестора, $V^{-1}(M - m_0 I)$ – вектор-стовпець розмірності *n*. Як бачимо, цей вектор не залежить від ефективності портфеля m_p. Таким чином, вектор часток ризикових видів цінних паперів, пропорційний цьому вектору, також не залежить від m_p. Отже, структура ризикової частини портфеля не залежить від m_p. Однак сума компонентів вектора X^* залежить від m_p, а саме, компоненти вектора X^* пропорційно збільшуються з ростом m_p, тому частка x_0 безризикових вкладень буде при цьому скорочуватися.

Виразимо ризик оптимального портфеля залежно від його прибутковості. Для цього у формулу варіації портфеля $Vp=X^T VX$ підставимо оптимальний вектор *X** з формули (4.6), позначивши знаменник формули (4.5) через d^2. Одержимо:

$$V_P = [(m_P - m_0)^2 / d^4] \cdot [V^{-1}(M - m_0 I)]^T \cdot V[V^{-1}(M - m_0 I)] =$$
$$= [(m_p - m_0)^2 / d^4] \cdot (M - m_0 I)V^{-1} \cdot VV^{-1}(M - m_0 I) =$$
$$= (m_P - m_0)^2 / d^2.$$

Остаточно:

$$V_P = (m_P - m_0)^2 d^2 \quad \text{або} \quad r_P = (m_P - m_0) / d. \qquad (4.7)$$

Можна також написати вирази ефективності оптимального портфеля від його ризику: $m_p\text{-}m_0 = dr_p$ або $m_p=m_0+dr_p$. Видно, що залежності ці лінійні.

Будемо називати отриманий оптимальний портфель *портфелем Тобіна мінімального ризику*, тобто портфель Тобіна – це портфель Марковіца при наявності на ринку безризикових цінних паперів.

5. Портфель Марковіца і Тобіна максимальної ефективності

Постановку Марковіца задачі формування оптимального портфеля (4.3) або (4.5) можна словами сформулювати так: сформувати портфель мінімального ризику із всіх портфелів, що мають ефективність не меншу заданої. Але настільки ж природна і задача формування портфеля максимальної ефективності із всіх портфелів, що мають ризик не більше заданого:

Знайти x_i максимізуюче очікувану ефективність портфеля:

$$m_P = \sum_i x_i m_i \to \max \qquad (4.8)$$

за умови, що забезпечується задане значення ризику портфеля, тобто $\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij} = r_P^2$.

Оскільки x_i – частки, то в сумі вони повинні складати одиницю: $\sum_i x_i = 1$.

Назвемо дану формалізацію *портфелем Марковіца максимальної ефективності.*

Приклад 4. За допомогою комп'ютера знайдений оптимальний портфель максимальної ефективності для трьох цінних паперів із прибутковістю і ризиком: (4,10); (10,40); (40,80) (ті ж цінні папери, що й у прикладі 3); верхня межа ризику задана рівною 50. Частки паперів виявилися рівними: 6%, 34%, 60%, ефективність – 27,6, ризик – 49,9 (комп'ютер перебирав частки цінних паперів із кроком 0,02 – цим і пояснюється розбіжність ризику із заданим).

Якщо на ринку є безризикові папери, то задача формування портфеля максимальної ефективності має вирішення, схоже на вирішення Тобіна:

Оптимальне значення часток *x* ризикових паперів є:

$$X^* = \frac{r_P}{\sqrt{(M - m_0 I) \cdot V^{-1}(M - m_0 I)}} V^{-1}(M - m_0 I). \qquad (4.9)$$

У матрично-векторній формі задача формування портфеля максимальної ефективності при наявності на ринку безризикових цінних паперів така:

$$x_0 m_0 + MX \to \max,$$
$$XVX = r_P^2,$$
$$x_0 + IX = 1$$

(операція транспонування мається на увазі, як і раніше, див. коментар до формули (4.6)).

Для знаходження умовного максимуму складемо функцію Лагранжа:

$$L = x_0 m_0 + MX + \lambda_0 (XVX - r_P^2) + \lambda_1 (x_0 + IX - 1).$$

Знаходимо частки похідні L по X і по x_0 і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \partial L / \partial X = 0, \\ \partial L / \partial x_0 = 0, \end{cases} \text{одержуємо} \begin{cases} m_0 + \lambda_1 = 0, \\ M + \lambda_0 VX + \lambda_1 I = 0. \end{cases}$$

Виразимо із другого рівняння λ_1 і підставимо в перше, одержимо:

$M\text{-}m_0 I = \text{-}x_0 VX$, так що $X = (-1/\lambda_0) V^{-1}(M - m_0 I)$.

Для знаходження λ_0 підставимо знайдене X у рівність $XVX = r_P^2$ одержимо:

$$(-1/\lambda_0) \cdot (M - m_0 I) V^{-1} \cdot V (-1/\lambda_0) V^{-1} \cdot (M - m_0 I) = r_P^2,$$

(тому що матриця *V* симетрична, то транспонована зворотна до неї матриця збігається зі зворотною). Далі маємо:

$$[(-1/\lambda_0)^2]\cdot(M-m_0I)V^{-1}\cdot(M-m_0I)=r_p^2.$$

Позначаючи $(M-m_0I)V^{-1}(M-m_0I)$ через d^2, одержуємо $(-1/\lambda_0)=r_p/d$ і остаточно $X^*=(r_P/d)V^{-1}\cdot(M-m_0I)$, тобто формулу (4.9).

Знову видно, що структура ризикової частини оптимального в цьому смислі портфеля також не залежить від обмеження на величину ризику.

Виразимо ефективність портфеля максимальної ефективності залежно від заданого його ризику r_p, тобто знайдемо величину $x_0^*m+MX^*$ де x_0^* і X* – оптимальні частки вкладень. Маємо $x_0^*=1-IX^*$, підставляючи цей вираз і X з формули (4.9), одержуємо

$$x_0^*m_0+MX^*=(1-I(r_P/d)V^{-1}\times(M-m_0I))m_0+M(r_P/d)V^{-1}(M-m_0I)=$$
$$=m_0+(r_P/d)(M-m_0I)V^{-1}(M-m_0I)=m_0+dr_P$$

Бачимо, що ця залежність лінійна.

Будемо називати отриманий оптимальний портфель *портфелем Тобіна максимальної ефективності*.

Зауваження 1. Зверніть увагу, що структура ризикової частини оптимального портфеля та сама в обох постановках і не залежить від заданих величин прибутковості або ризику портфеля.

Зауваження 2. У реальності, однак, рідко хто з інвесторів стурбований складанням оптимальних портфелів. Звичайно інвестори створюють спеціалізовані портфелі, що містять цінні папери якого-небудь певного профілю: з галузі промисловості, державні або який-небудь пенсійний фонд і т.ін.

4.2. Формування оптимального портфеля на фінансовому ринку

Ціль аналізу фінансового ринку – розробка рекомендацій для інвесторів – у які цінні папери вкладати капітал і в якій кількості. Вище розглянуто вирішення задачі формування оптимального портфеля цінних паперів. Однак воно носить формальний характер, оскільки спирається на припущення про те, що прибутковості вкладень у цінні папери є випадковими величинами із заданими ймовірнісними характеристиками. Фактично потрібне знання математичних очікувань і коваріацій прибутковостей. Звідки взяти ці величини? Як їх знайти, з огляду на наявну інформацію?

1. Прямий статистичний підхід

У розвинених країнах регулярно публікуються відомості про біржовий курс цінних паперів, насамперед акцій провідних компаній. Таким чином, можна проаналізувати послідовності, що відображають історію курсів і виплачуваних дивідендів за досить тривалий період.

Нехай значення прибутковостей d утворять ряд чисел $(d_1,\ldots,d_n)$. Можна застосувати методи математичної статистики і знайти середнє $\bar{d} = \sum_i d_i / n$ і оцінку дисперсії або варіації $\hat{V} = \sum_i (d_i - \bar{d})^2 / n$ і потім використати їх як наближені значення математичного очікування і дисперсії або варіації. Приблизно так само можна поступити з коваріаціями.

Реальні цифри такі. Число провідних компаній, акції яких котируються на біржах США і складають основну (за загальною вартістю) частину ринку, звичайно оцінюється в n=500 (таке число враховується в найбільш популярному виданні «Standard and Poor's index»). Тривалість щоквартальних часових рядів, що мають смисл для статистичної обробки, T=100 (економічні умови і навіть список провідних компаній за період більше 25 років занадто сильно змінюються, щоб настільки застарілі дані вважати такими, які представляють ту ж генеральну сукупність).

Тяким чином, є $n \cdot T$=50000 чисел, а оцінити потрібно n=500 середніх і $n(n-1)/2 > 100000$ коваріацій, тобто оцінити потрібно набагато більше величин, ніж маємо даних, у силу чого точність оцінок не може бути доброю. Тому прямий статистичний підхід для одержання оцінок коваріацій малопридатний, хоча необхідний для знаходження середніх (і тим самим для оцінки математичних очікувань).

2. Вплив головного фактору на складові фінансового ринку

Вихід був знайдений – це аналіз залежностей курсів і інших характеристик цінних паперів від головних факторів фінансового ринку. Що ж таке головний фактор?

Як уже підкреслювалося, в економічному житті все взаємозалежне, але є фактори, які впливають відразу практично на всі показники. Наприклад, рівень цін на близькосхідну нафту впливає на котирування акцій майже всіх компаній США, оскільки ця нафта покриває більше половини енергетичних потреб США. Якщо ціна на нафту підніметься, стане дорожче бензин для автомобілів, зменшиться попит на бензин, на автомобілі, на метал для їхнього виготовлення, підвищаться ціни на сільськогосподарські продукти, оскільки витрати на паливо – основний компонент їхньої собівартості.

Розглянемо один з таких головних факторів, не визначаючи поки його природу. Позначимо його *f* і будемо вважати, що прибутковості всіх цінних паперів залежать від нього. Нехай *d* – прибутковість будь-якого фіксованого цінного паперу. Найпростіша форма залежності – лінійна, так що приймемо гіпотезу, що *d* лінійно залежить від $f : d \approx a + df$. Оскільки обидві величини *d, f* – випадкові, то рівність навряд чи може бути точною, тому використано знак наближеної рівності. Як знайти константи *a, b*? Розглянемо цю задачу в загальному випадку, для довільних двох випадкових величин *X, Y*.

Спробуємо підібрати лінійну залежність $y = a + bx = \varphi(x)$ таку, щоб $F(a,b) = M[(Y - a - bX)^2]$ було мінімальним. Маємо:

$$F(a,b) = M[Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = M[Y^2] - 2aM[Y] -$$
$$- 2bM[XY] + a^2 + 2abM[X] + b^2M[X^2].$$

Диференціюючи *F(a,b)* за *a* і *b* і прирівнюючи часткові похідні 0, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + bM[X] = M[Y], \\ aM[X] + bM[X^2] = M[XY]. \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, одержимо:

$$b = K_{XY} / D_X, a = M[Y] - M[X] \cdot K_{XY} / D_X,$$

виходить, шукана лінійна залежність є:

$$y = \varphi(x)$$
$$= (M[Y] - M[X] \cdot K_{XY} / D_X) + x \cdot K_{XY} / D_X = M[Y] + (x - M[X])K_{XY} / D_X.$$

Знайдемо математичне очікування випадкової величини:

$$Z = M[Y] + (X - M[X])K_{XY} / D_X,$$

що є функцією від випадкової *величини* X. Маємо M[Z]=M[Y]. Виходить, зокрема, при знайдених *a, b* для математичних очікувань в.в. *X, Y* вірна не наближена рівність, а точна:

$$M[Y]=a+b[x]. \tag{4.10}$$

На практиці спільний розподіл випадкових величин *(X,Y)* невідомий, відомі тільки результати спостережень, тобто вибірка пар *(x,y)* значень *(X,Y)*. Всі розглянуті величини заміняються їхніми вибірковими аналогами. Так, для визначення *a, b* одержимо систему рівнянь:

$$a + b\overline{X} = \overline{Y},$$
$$a\overline{X} + b\overline{X^2} = \overline{XY}, \qquad (4.11)$$

де, нагадаємо, $\overline{X} = \left(\sum_i x_i\right)/n$, $\overline{Y} = \left(\sum_i y_i\right)/n$, $\overline{X^2} = \left(\sum_i x_i{}^2\right)/n$, $\overline{XY} = \left(\sum_i x_i y_i\right)/n.$

Вирішуючи цю систему, одержимо:

$b = (\overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y})/[(\overline{X^2} - (\overline{X})^2] = \hat{K}_{XY}/\overline{S^2_X}$, $a = \overline{Y} - \overline{X}\,\hat{K}_{XY}/\overline{S^2_X}$,

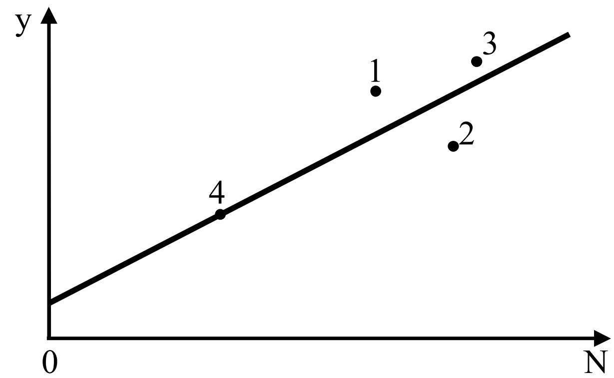
виходить, пряма лінія регресії має рівняння $y = \overline{Y} + (x - \overline{X})\hat{K}_{XY}/\overline{S^2_X}$. Через $\hat{K}_{XY}, \overline{S}^2_X$ позначаємо вибіркові аналоги кореляційного моменту випадкової величини *X,Y* і дисперсії *X*, відповідно.

До речі, як можна переконатися, для середніх арифметичних значень вірна точна рівність:

$$\overline{Y} = a + b\cdot\overline{X} \qquad (4.12)$$

Приклад 5. Знайти оцінки параметрів лінійної регресії по вибірці (9, 6), (10, 4), (12, 7), (5, 3). Зобразити задані точки і пряму регресії в прямокутній системі координат.

Рішення. Знаходимо $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{X^2}, \overline{XY}$.. Одержуємо $\overline{X} = (9 + 10 + 12 + 5)/4 = 9$, $\overline{Y} = 5, \overline{X^2} = 350/4, \overline{XY} = 193/4$. Виходить, b=l/2; a=1/2 (див. систему (4.11)). Отже, рівняння регресії є y=1/2+x/2. Зобразимо зазначені точки і лінію регресії в системі координат на площині:



Отже, у теоретичному плані лінійна (наближена) залежність прибутковості *d* розглянутого паперу від *f* виглядає так: $d \approx a + bf$, де

$b = V_{fd} / V_{ff}$, $a = m_d - b \cdot m_f$. На практиці ж доводиться використовувати відповідні вибіркові оцінки і тоді одержимо:

$$b = \hat{V}_{fd} / \hat{V}_{ff},\ a = \bar{d} - b \cdot \bar{f},\ \text{де}\ \hat{V}_{fd} = \overline{df} - \bar{d} \cdot \bar{f}\ \text{й}\ \hat{V}_{ff} = \bar{f}^2 - (\bar{f})^2.$$

(Нагадуємо, що $\hat{V}_{ff}, \hat{V}_{fd}$, позначають вибіркові аналоги варіації випадкової величини *f* і коваріації *d,f*, зокрема, через $\bar{d}$ позначене середнє вибіркове значення прибутковості *d* і т.ін. – див. приклад 5).

Відзначимо, як і вище (див. формулу (4.10)), що для математичних очікувань або вибіркових середніх значень вірна точна рівність, аналогічна (4.10) або (4.12).

Якщо гіпотеза про вплив головного фактору на даний цінний папір вірна, то всі відхилення від прямої $a+b\cdot f$ вверх і вниз є дійсно випадковими і якщо в майбутньому виникне нова ситуація, нова пара величин *(f,e)*, то відповідна точка розташується в околиці зазначеної прямої.

Якщо головний фактор *f* обраний вдало, то його впливом визначаються майже всі випадкові коливання прибутковості *d*, а залишкові коливання $e = d - (a + bf)$ виявляються порівняно невеликими і некорельованими і один з одним, і з іншими прибутковостями *d*. Позначимо через υ_{ii} варіацію залишкового коливання e_i і через υ_{ij} – спільну коваріацію різних залишкових величин e_i, e_j. Отже, остаточно одержуємо: $d_i = a_i + b_i \cdot f + e_i$ і $\upsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Якщо для кожного цінного паперу аналогічна залежність її прибутковості *d* від головного фактору *f* знайдена, то можна легко знайти і всі потрібні величини для формування оптимального портфеля. Дійсно, маємо для ефективності *i*-го паперу точну рівність $m_i = a_i + b_i m_f$, де m_f – ефективність головного фактору, для варіації *i*-го цінного паперу і спільних коваріацій маємо точні рівності:

$$V_{ii} = b_i^2 V_{ff} + \upsilon_{ii}, V_{ij} = b_i b_j V_{ff}. \tag{4.13}$$

3. Ефективність ринку як головний фактор

У ролі головного фактору *f* найбільше зручно брати середню прибутковість ризикових паперів самого фінансового ринку. Це зважена (з урахуванням капіталу) сума прибутковостей всіх ризикових цінних паперів, що обертаються на ринку.

Приклад 6. На ринку обертаються ризикові цінні папери, частки (серед ризикових паперів) і ефективності яких (середні річні прибутковості у відсотках) такі:

	1	2	3	4	5	6	7
Частки	20	10	10	10	5	5	40
Ефективності	8	10	12	14	16	18	6

Ефективність ринку (середня річна прибутковість ризикових паперів) дорівнює (20·8+10·10+10·12+10·14+5·16+5·18+40·6)/100 = 9,3%.

Визначена таким чином ефективність ринку є абстракцією. Адже на фінансовому ринку обертається величезне число цінних паперів, серед яких багато короткочасних (за рік утворюються і гинуть тисячі корпорацій, що випускають свої цінні папери), є малоризикові, відносно яких не ясно, чи не визнати їх безризиковими. Вихід полягає у відстеженні характеристик найбільш важливих для ринку цінних паперів із тривалою історією. Обробка цих паперів за спеціальними правилами дозволяє одержувати різноманітні індекси, кожний з яких може відображати ефективність ринку, як вона визначена вище. Надалі ефективність ринку розуміється як один з таких глобальних ринкових індексів.

Приклад 7. У таблиці зазначені прибутковості цінного паперу *d* і (середня) прибутковість ринку *f* (по ризикових паперах) протягом ряду кварталів. Знайти регресію *d* на *f*.

d	10	12	9	10	9	10	12	10	8	10
f	15	16	14	15	14	15	17	16	13	15

Рішення. Знаходимо оцінки для математичного очікування, дисперсії *d, f* і т.ін. оцінки і одержимо:

$$\bar{d} = 10, \bar{f} = 15, \hat{V}_{ff} = \sum_{i=1}^{10} (f_i - 15)^2 / 10 = 1{,}2;$$

$$\hat{V}_{ef} = \sum_{i=1}^{10} (e_i - 10) \cdot (f_i - 15) / 10 = 1{,}2.$$

Виходить, $b = \hat{V}_{ef} / \hat{V}_{ff} = (1{,}2)/(1{,}2) = 1, a = \bar{d} - b \cdot \bar{f} = 10 - 1 \cdot 15 = -5.$

Таким чином, рівняння лінійної залежності *d* від *f* є: $d \approx f - 5.$

Отже, припускаємо, що прибутковості всіх цінних паперів залежать від прибутковості ринку $f : d_i = a_i + b_i f + e_i$, причому ефективності паперу m_i і ринку m_f (середні очікувані прибутковості) пов'язані точною рівністю $m_i = a_i + b_i m_f$. Варіація прибутковості *i*-го паперу при цьому дорівнює $V_{ii} = b_i^2 V_{ff} + \upsilon_{ii}$, де V_{ff} – варіація середньої ринкової прибутковості (середньої прибутковості на одиницю вартості цінних паперів ринку).

Розглянемо в цій ситуації портфель цінних паперів. Виявляється, ефективність (ризикової частини) портфеля із зафіксованими частками паперів також лінійно залежить від ефективності ринку. Справді, нехай частка *i*-го цінного паперу є x_i, тоді ефективність портфеля:

$$m_p = \sum_i x_i (a_i + b_i m_f) = \sum_i x_i a_i + \left(\sum_i x_i b_i \right) \cdot m_f \qquad (4.14)$$

або, позначивши $a_P = \sum_i a_i x_i$, $b_P = \sum_i x_i b_i$, одержимо $m_P = a_P + b_P m_f$.

Далі, дисперсія розглянутого портфеля $D_P = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$ може бути розбита на дві частини:

$$D_P = \sum_i x_i^2 (b_i^2 V_{ff} + \upsilon_{ii}) + \sum_{i \neq j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = \sum_i x_i^2 \upsilon_{ii} + \sum_{i,j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = D_1 + D_2 .$$

Оскільки перша частина $D_1 = \sum_i x_i^2 \upsilon_{ii}$ представляє зважену суму власних дисперсій прибутковостей паперів, що входять у портфель, то ця частина може бути названа власною дисперсією портфеля, а квадратний корінь із неї, тобто $r_1 = \sqrt{\sum_i x_i^2 \upsilon_{ii}}$, може бути названий *власним ризиком портфеля*. Друга частина $D_2 = \sum_{i,j} x_i x_j b_i b_j V_{ff} = \left(\sum_i x_i b_i \right)^2 V_{ff}$ повинна бути названа *ринковою дисперсією*. Добуваючи з неї квадратний корінь, одержуємо *ринковий ризик портфеля* $r_2 = r_f \, |\sum_i x_i b_i|$, где r_f – ризик усього ринку, тобто квадратний корінь із дисперсії прибутковості ринку (середньої прибутковості на одиницю вартості цінних паперів ринку).

Припустимо, що капітал портфеля вкладений рівними частками в усі цінні папери, тоді власна дисперсія портфеля дорівнює $\left(\sum_i \upsilon_{ii} \right) / n$ прямує до нуля при $n \to \infty$, якщо власні ризики паперів $\sqrt{\upsilon_{ii}}$ обмежені зверху (тому що доданків всього *n*), так само поводиться і власний ризик портфеля. Таким чином, ще раз підтверджується висновок Марковіца про зменшення власного ризику портфеля при збільшенні числа паперів, що входять у нього. Навпаки, ринковий ризик портфеля при $n \to \infty$ прямує до $r_f |\sum_i b_i| / n$, і якщо коефіцієнти b_i обмежені знизу, то цей ризик до нуля зовсім не прагне (тому що число доданків n).

Задачу Марковіца (див. частина 2, розділ 4 п. 4.1.) про формування портфеля заданої ефективності m_p і мінімального ризику тепер можна сформулювати так:

$$\begin{aligned} &\left(r_f \sum_i x_i b_i\right)^2 + \sum_i x_i^2 \upsilon_{ii} \to \min, \\ &\sum_i x_i (a_i + b_i m_f) = m_P, \\ &\sum_i x_i = 1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

і в залежності, дозволена чи ні операція «short sale» з додаванням вимог невід’ємності змінних.

Як бачимо, вийшла «майже» задача лінійного програмування. Відмінність – у нелінійній добавці в цільовій функції.

4. Ефективність ринку, ефективність цінного паперу і її «бета»

Отже, припускаємо, що прибутковість будь-якого цінного паперу залежить від прибутковості ринку $f: d_i = a_i + b_i f + e_i$ (повторимо ще раз, що під прибутковістю ринку розуміється середня прибутковість ризикових паперів). Звичайно замість букви b_i використають букву β_i. Цей коефіцієнт так і називають: «*бета цінних паперів і-го виду відносно ринку*» або, коротше, «*бета і-го внеску*». Ця величина визначає вплив ринку на дані цінні папери: якщо $\beta_i > 0$, то прибутковість паперів *і*-го виду коливається в такт із ринком, а якщо $\beta_i < 0$, то поведінка паперу прямо протилежна коливанням прибутковості ринку в цілому.

Як відзначено вище, варіація прибутковості V_{ii} кожного цінного паперу дорівнює $\beta_1^2 V_{ff} + \upsilon_{ii}$, тобто складається із двох доданків: «власної» варіації υ_{ii}, що не залежить від ринку, і «ринкової» частини варіації $\beta_i^2 V_{ff}$, обумовленої випадковою поведінкою ринку в цілому. Їхнє відношення $\beta_i^2 V_{ff} / \upsilon_{ii}$ позначається R_i^2 і називається *R-squared*. Це відношення характеризує частку ризику даних цінних паперів, внесену ринком. Ті папери, для яких *R-squared* велико, у деякому смислі переважніші, оскільки їх поведінка більш передбачувана.

Продовжимо розгляд приклада 5 і 7. Регресія *d* на *f* знайдена: $d \approx f - 5$. Отже, випадкова величина залишкових коливань *e* є $d - (f - 5)$. Найпростіше знайти варіацію цього залишку, склавши ряд значень *e*:

0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0

Середнє, природно, дорівнює 0, і тому $\hat{\upsilon} = 2/10$. Далі, $\beta = b = 1, R^2 = 1 \cdot \hat{V}_{ff} / \hat{\upsilon} = (1{,}2)/(0{,}2) = 6$.

(Нагадуємо, що $\hat{V}_{ff}, \hat{\upsilon}$, позначають вибіркові аналоги варіацій випадкових величин *f, e,* зокрема, $\hat{V}_{ff} = (f_i - 10)/10 = 1{,}2)$.

Ефективність цінних паперів зручно відраховувати від ефективності безризикового внеску m_0. Отже, $m_i = a_i + \beta_i m_f = m_0 + \beta_i (m_f - m_0) + a_i$ де $a_i = a_i + (\beta_i - 1) m_0$. Перевищення ефективності цінного паперу над безризиковою ефективністю m_0 називається *премією за ризик*. Таким чином, ця *премія за ризик* в основному лінійно залежить від премії за ризик, що складається для ринку в цілому, і коефіцієнтом є «бета» даного паперу. Це, однак, вірно, якщо, *a=0*. Такі цінні папери називаються «справедливо» *оціненими*. Ті ж папери, у яких, a > 0, ринком *недооцінені*, а якщо, a<0, то ринком *переоцінені*.

Зокрема, у розглянутому прикладі, *a* цінного паперу дорівнює a+4(b-1)=-5, отже, цей папір переоцінений ринком (ефективність безризикових вкладень прийнята рівною 4).

Помітимо, що в силу формули (4.14) можна стверджувати, що не тільки папери мають «бети», але також і портфелі, і «бета» портфеля дорівнює зваженій сумі «бета» паперів, що входять у портфель. Подібним чином (портфель дорівнює $a_P + (\beta_P - 1) m_0$) виражається «бета» портфеля. Як і для паперів, портфель називається «справедливо» оціненим, недооціненим, переоціненим, якщо відповідно $\alpha_P = 0, \alpha_P > 0, \alpha_P < 0$ (рисунок 4.3).

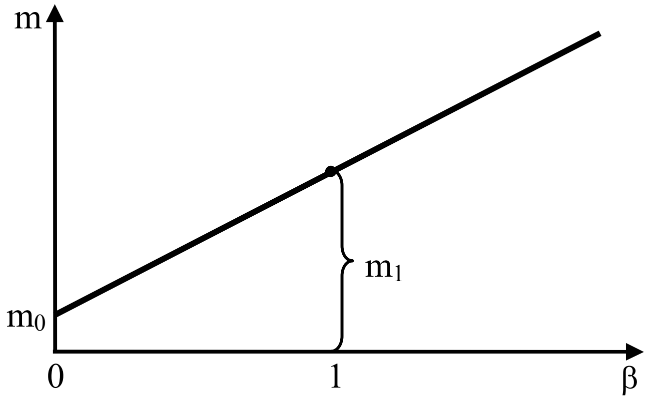


Рисунок 4.3 – Лінія цінних паперів

Пряма рисунку 4.3 називається лінією цінних паперів (Security Market Line – SML). По горизонтальній осі відкладені коефіцієнти β, по вертикальній – ефективності паперів і портфелів. Але ця пряма SML відображає ідеальну залежність між β і ефективністю паперів і портфелів (така залежність приймається як реальна в моделі CAPM – див. п. 4.3). Всі точки, що лежать на прямій SML, відповідають «справедливо» оціненим паперам (портфелям), а ті, які лежать вище /нижче цієї лінії, – недооціненим/переоціненим.

Зокрема, одна із задач фінансового аналітика полягає в знаходженні недооцінених ринком паперів і в рекомендації інвестору купувати їх.

4.3. Моделі фінансового ринку

1. Угоди про фінансовий ринок

На фінансовому ринку його учасники здійснюють фінансові операції за допомогою фінансових інструментів.

Результат більшості операцій неможливо пророчити. Неможливо, загалом, пророчити і інші які-небудь характеристики операції, наприклад дохід і прибутковість. Але практична робота наполегливо вимагає цього. Вихід полягає в прийнятті певних угод про ринок, що дозволяють залучати для аналізу хоча б якісь наукові доводи. В основному наполягають на трьох припущеннях:

1. «Сховані» параметри типу психологічних мотивів не враховуються. Будь-який учасник ринку прагне діяти так, щоб забезпечити собі найбільший дохід, а не діяти «на зло» своєму конкуренту. Дане припущення служить принциповою основою для застосування нау-

кових методів аналізу ринку.

2. Хоча із чисто абстрактної точки зору станів ринку нескінченно багато і вони повністю, з усіма деталями, не повторюються. Все-таки досить часто для даного сьогоднішнього аналізованого стану може знайтися близький аналогічний стан у минулому або в іншому місці. Це дозволяє сподіватися, що і подальший розвиток сьогоднішнього стану піде приблизно так само, як і знайденого аналогічного (з урахуванням змін, що трапилися на ринку). Такий спосіб аналізу називається *пошуком аналогів*. Це припущення про ринок можна розвити далі, допустивши, що різні показники ринку можна моделювати як випадкові величини. Дане припущення відкриває шлях до використання теоретико-ймовірнісних методів. Потрібно зовсім чітко сказати, що повною мірою це припущення не виконується. Однак потрібно визнати, що так завжди трапляється із застосуванням теоретико-ймовірнісних, статистичних закономірностей на практиці.
3. Про аналізований фінансовий інструмент (або про близькі в деякому смислі до нього) повинна бути накопичена певна інформація. У наш час це не так складно, як можна подумати. У базах даних, розсіяних по усьому світі, накопичені величезні масиви різноманітної інформації і правильно складений запит може принести багато потрібної інформації (наприклад, про курс долара і інших валют на світових валютних ринках у цей момент або про поведінку курсів цих валют за останні роки). Цієї інформації цілком може бути достатньо для статистичної обробки, щоб одержати оцінки показників, що цікавлять нас, з потрібною точністю.

Три сформульованих припущення є основою для дослідження фінансових ринків науковими методами (математичними, за допомогою комп'ютерної техніки і т.ін.), побудови моделей таких ринків, які усе більш повно описують і відображають реальні фінансові ринки. Цим моделям і присвячений даний підрозділ.

2. Ефективний ринок

Хоча гіпотеза поведінки цін як випадкового блукання далеко не відразу була прийнята економістами і фінансистами (фінансовими аналітиками), як видно, вона привела до (тепер уже) класичної концепції ефективного ринку. Ефективність означає, що ринок поводиться «раціонально». Під цим мається на увазі, що на ринку:

1) миттєво провадиться корекція цін на зміну зовнішніх умов, ціни

стають знову «справедливими», не залишаючи учасникам ринку чисто спекулятивних можливостей одержання прибутку тільки за рахунок різниці в цінах;

2) учасники ринку однородно оцінюють вхідну інформацію, миттєво коректуючи свої рішення;
3) учасники ринку переслідують свої власні (егоїстичні) цілі, які характеризуються деяким об'єктивним образом; дане припущення дозволяє аналізувати дії конкретного учасника, спираючись на деякі об'єктивні його устремління. Ці припущення виражені чисто словами (дивись частину 3, розділ 2). Тим більш дивно, що вони разом з гіпотезою про випадкове блукання цін дозволяють розвити струнку і досить складну математичну теорію ефективного ринку.

Один з висновків цієї теорії – про відсутність на ефективному ринку арбітражних можливостей. *Арбітраж* – це купівля-продаж активів, що дозволяє одержати прибуток з різниці цін на різних ринках. На ефективному ринку таке неможливо, тому що арбітражери будуть своїми діями усувати різницю цін на активи зі схожими характеристиками. Зокрема, цінний папір, «домінуємий» за своїми характеристиками будь-який інший, не може довго функціонувати на такому ринку і повинен зникнути.

Ключове положення про поведінку цін на такому ринку – що вони «випадково» блукають – приводить до того, що найкращий прогноз ціни на завтра є сьогоднішня ціна.

Ще один висновок цієї теорії – кожний учасник ринку зобов'язаний диверсифікувати свій портфель і тим самим звести до нуля несистематичний ризик. Отже, тільки систематичний ризик портфеля буде оцінений ринком і тому прибутковість портфеля повинна залежати тільки від такого ризику. Цей висновок був зроблений уже після появи згадуваної вище теорії Марковіца про будову оптимального портфеля (математична теорія ефективного портфеля базується на досить складній теорії випадкових процесів і тут не викладається).

Примітно, що теорія ефективного ринку послужила поштовхом до утворення деяких конкретних і раніше невідомих фінансових інструментів нібито «Фондів взаємних вкладень». Специфіка таких фондів полягає в тому, що вони інвестують кошти своїх клієнтів в акції компаній, які давно котируються на ринку і затвердили себе в якості дуже надійних, але не найдохідніших. Справа в тому, що рядові інвестори не можуть швидко реагувати на зміни на ринку, як того вимагає теорія ефективного ринку, і тому вкладають свої кошти (через фонди взаємних вкладень) у цінні папери тих компаній, які можуть собі дозволити не відгукуватися на всілякі короткочасні коливання ринку.

3. Модель CAPM (Capital Asset Prising Model - Модель ціноутворення капітальних активів)

Ця теорія базується на концепції рівноважного ринку і є подальшим розвитком поняття ефективного ринку в деяких напрямках. Згадаємо, що інвестор, стурбований формуванням свого портфеля цінних паперів, шукає такі папери на ринку. Те ж роблять інші. Якщо їхній сукупний попит перевищує пропозицію відповідних паперів, наявних на ринку, то ціна таких паперів підвищується, а інших – падає. Зрештою, ринок може прийти в рівновагу, коли попит по будь-якому цінному паперу в точності дорівнює її наявності на ринку. У концепції рівноважного ринку вважається також, що відсутні операційні витрати (з оформлення угод) і що всі учасники ринку мають рівні можливості оцінювання інформації, яка всім однаково доступна. Передбачається також, що на ринку є безризикові цінні папери.

Основний постулат цієї моделі полягає в тому, що середній очікуваний дохід з активу виражається у вигляді лінійної функції від безризикової ставки доходу m_0, очікуваного доходу по ринковому портфелю (це зважена прибутковість по всіх паперах, що обертається на ринку) m_f і рівня систематичного ризику, властивому активу і виражену через ризик усього ринку і коефіцієнт β даного активу. У цьому немає нічого дивного: припускається, що учасники ринку досить грамотні і знають про ефект диверсифікованості, а тому повинні цю диверсифікованість обов'язково здійснювати. Тому в портфелі оцінюється тільки систематичний ризик, тобто ринковий. Отже, очікуваний дохід по активу і визначається, як $m_i = m_0 + \beta_i(m_f - m_0)$. В п. 4.2 зазначена формула має добавок – член, названий «*альфа*» даного цінного паперу. Виходить, у моделі CAPM для будь-якого паперу, $a=0$, тобто всі точки, що зображують цінні папери і портфелі, лежать на лінії SML – див. рисунок 4.3. В п. 4.2 було показано, що не тільки в цінних паперів є *a*, але і у портфеля, і β портфеля дорівнює зваженій сумі β всіх паперів, що входять у портфель.

У моделі CAPM вирішується задача дисконтування ризикових активів до сучасного моменту. Вище вже відзначено, що майбутні доходи ризикових активів треба дисконтувати по більш високій ставці, чим безризикові.

Розглянемо операцію із цінним папером: покупку його на початку періоду за ціною *P* і продаж наприкінці за ціною *P'*. Якщо є поточні доходи в цьому періоді, наприклад, дивіденди, якщо цей цінний папір – акція, то позначимо їх *D'*. У детермінованому фінансовому аналізі за можливу оцінку курсової вартості на початку періоду, тобто за ціну *P* приймається величина:

$$P = (D`+P`)/(1+i) \tag{4.16}$$

де *i* – процентна ставка.

У детермінованому фінансовому аналізі роль цієї процентної ставки відіграє ефективність безризикового вкладення – безризикова процентна ставка m_0. Разом з тим для інвестора більше точною сьогоднішньою оцінкою майбутньої вартості є величина майбутнього очікуваного доходу, дисконтована по ставці прибутковості, яку він прогнозує як ефективність внеску. У моделі CAPM ця ставка m_i визначається ефективністю *i*-го вкладення і дорівнює:

$$m_i = m_0 + \beta_i(m_f - m_0).$$

Дисконтуючи по цій ставці, одержимо оцінку поточної вартості:

$$P = (M[P`]) + M[D`])/[1 + m_i + \beta_i(m_f - m_0)].$$

У чисельнику цієї формули стоїть сума очікуваних від акції доходів: від майбутнього продажу і дивідендів, а в знаменнику – одиниця плюс ставка прибутковості на ринку.

При позитивній корельованості з ринком, чим більший вносимий ринком ризик, тим більша ставка прибутковості, тим менша сучасна оцінка майбутніх доходів від акції. Навпроти, при негативній корельованості активу з ринком, чим більший ринковий ризик, тим більша сьогоднішня оцінка майбутніх доходів від активу.

4. Модель APT (Arbitrage Prising Theory - Арбітражна модель ціноутворення)

У моделі CAPM ефективність активу залежить від ефективності великого ринку і коефіцієнта активу, що відображає ризик цього активу і взаємозв'язок активу і ринку. Таким чином, у цій моделі ефективність активу залежить від одного фактору – ефективності «великого» ринку.

Модель APT – це узагальнення моделі CAPM, у ній прибутковість активу (як випадкової величини) залежить від декількох факторів – випадкових величин $f_1,...,f_n$, які попарно некорельовані і у яких математичне очікування і дисперсія рівні 0. Крім цих факторів, є ще додатковий «шумовий» член (як і в теорії САРМ), не некорельований ні з факторами, $f_1,...,f_n$, ні з «шумовими» членами інших активів.

Однак модель АРТ програє моделі САРМ у простоті, наочності і тому модель САРМ продовжує залишатися однією з найпоширеніших при розрахунках цінних паперів.

5. Ідеальний фінансовий ринок

Під таким ринком розуміють ринок, всі учасники якого мають однакову інформацію і приймають на її основі найкращі, оптимальні рішення. Отже, такий ринок повинен бути ефективним. Далі, кожний учасник ринку прагне сформувати оптимальний портфель своїх цінних паперів. Але відповідно до теорії Тобіна структура ризикової частини оптимального портфеля однакова і не залежить від схильності інвестора до ризику (у припущенні існування безризикових паперів). Тому всі захочуть сформувати портфель, однаковий за своєю ризиковою частиною. Однак структура цінних паперів, які продаються, може не бути такою. Тоді підуть звичайні перерозподільні процеси: цінні папери, попит на які більший їхньої пропозиції, почнуть підвищуватися в ціні, а ті, попит на які менший, – знижуватися. Зрештою, установиться рівновага, при якій оптимальний портфель у своїй ризиковій частині буде такий же, як і весь ринок у ризиковій частині. Отже, і для ринку в цілому буде справедливо співвідношення: $m_f = m_0 + \beta_f(m_f - m_0)$, де m_f – середня ефективність усього ринку в цілому, тобто коефіцієнт β_f усього ринку дорівнює 1. Отже, премія за ризик, пов'язаний з даним цінним папером, пропорційна премії за ризик ринку в цілому і коефіцієнтом пропорційності є «бета» даного цінного паперу. Бачимо, що на ідеальному ринку виконується основний постулат моделі САРМ.

Отже, оптимальний портфель на ідеальному конкурентному ринку має ту ж структуру ризикових паперів, що й весь ринок. Таким чином, при формуванні портфеля треба довіритися ринку і сформувати структуру ризикової частини портфеля аналогічну ринковій структурі в його ризиковій частині. Якщо, скажемо, у загальній вартості всіх ризикових паперів на ринку акції компанії IBM становлять 1,5% , то і інвестор повинен вкласти 1,5% свого капіталу, призначеного для ризикових цінних паперів, в акції IBM.

Але як розділити капітал на ризикову і безризикову частини, теорія не може підказати, це роздвлення залежить від схильності інвестора до ризику. Бажаючи збільшити ефективність свого портфеля, інвестор повинен буде зменшувати частку безризикових паперів і збільшувати частки ризикових паперів, зберігаючи оптимальні пропорції між ними.

6. Інвестори на ідеальному фінансовому ринку

Позначимо γ_k – частку безризикового активу в портфелі *k*-го інвестора. Як вище відзначалося, ця частка визначається схильністю до ризику (або його неприйняттям) даного інвестора. Отже, $1-\gamma_k$– частка ризикового активу в портфелі *k*-го інвестора.

Якщо $\gamma_k = 1$, то інвестор склав портфель тільки з безризикових паперів, якщо $\gamma_k < 0$, то інвестор позичив гроші під безризиковий відсоток і купив на ці гроші ризикових активів, так що $(1-\gamma_k) > 1$.

Позначимо W_k – сумарний капітал інвестора, а $Y_K = (1-\gamma_k)W_k$ – капітал, вкладений у ризикову частину портфеля. Нехай співвідношення $S_1 : S_2 : .... : S_{n,}$ $\sum_i S_i = 1$ задає пропорції між вартостями різних ризикових паперів на ринку або в ризиковій частині оптимального портфеля. За припущенням, ризикові частини всіх оптимальних портфелів інвесторів упорядковані однаково. Отже,

$$S_i = V_i / V, \tag{4.17}$$

де V – сумарна вартість всіх ризикових ринкових активів на ринку, а V_i – вартість ризикових активів *i*-ї фірми (ототожнюємо акції з фірмами, що їх випустили).

Оскільки ринок розділений між інвесторами, то $\sum_k Y_k = \sum_i V_i = V$.

Одним з важливих властивостей ідеального *k* фінансового ринку є те, що кожний інвестор *k* володіє однаковою властивою йому часткою Z_k кожної фірми. Дійсно, з формули (4.17) випливає, що $S_i / V_i = 1/V$. Звідси частка вартості *i*-ї фірми, що належить інвестору *k*, дорівнює:

$$Z_i^k = \left(S_i Y_k\right)/V_i = Y_k / V = Y_k / \left(\sum_i Y_j\right), \tag{4.18}$$

не залежить від фірми і однакова для всіх фірм. Ця частка дорівнює частці його участі на ринку ризикових активів.

Зауваження. Описані моделі фінансових ринків частково перекривають один одного, так що якихось дуже чітких границь кожної моделі не існує. Можна лише виділити деякі ключові положення цих моделей:

- *ефективний ринок:* раціональність дій учасників, ціни випадково блукають; у портфелі інвестора немає «домінованих» цінних паперів;
- *модель САРМ:* оцінюється тільки систематичний ризик, прибутковість активу лінійно залежить від його систематичного ризику і середньої ринкової прибутковості; «бета» портфеля дорівнює лінійній комбінації від «бета» активів з їхніми частками;
- *модель АРТ:* прибутковість активу залежить від декількох факторів;
- *ідеальний ринок*: портфель кожного інвестора оптимальний і збігається з ринковим портфелем у своїй ризиковій частині, кожний інвестор володіє однією і тою ж відповідною йому частокою будь-якої фірми.

Якої-небудь найкращої, загальновизнаної моделі фінансового ринку не існує.

Задачі до розділу 4

1. Із двох некорельованих цінних паперів з ефективностями 2 і 6 і ризиками 10 і 20 за допомогою комп'ютера складено шість портфелів: у портфелі з номером h частка перших паперів x=1-0,2·k, частка других дорівнює (1-х), тобто портфель, що складається тільки з паперів 1-го виду, одержує номер 0, а портфель, що складається тільки з паперів 2-го виду, одержує номер 5. Комп'ютер знайшов їхні ефективності і ризики:

Ефективності	2,0	2,8	3,6	4,4	5,2	6,0
Ризики	10,0	8,9	10,0	12,6	16,1	20
Портфелі	0	1	2	3	4	5

Перевірте комп'ютерні розрахунки. Потім нанесіть портфелі як точки на площину ризик – ефективність і відзначте доміновні портфелі і недоміновні, тобто оптимальні за Парето?

2. Маючи безризикові цінні папери з ефективністю 4 і некорельовані ризикові з ефективностями 8 і 14 і ризиками 10 і 30, за допомогою комп'ютера склали портфель Тобіна ефективності 12. Частки паперів вийшли такими: -0,51, 1,18, 0,33. Перевірте комп'ютерні розрахунки. Як розуміти від'ємну частку безризикових паперів?
3. У портфелі папери із прибутковістю 5% річних складають 30% за

вартістю, а інші папери мають прибутковість 8% річних. Яка прибутковість портфеля?

4. Сформувати портфель Тобіна мінімального ризику із двох видів цінних паперів: безризикових з ефективністю 2 і ризикових з ефективністю 10 і ризиком 5. Знайти залежність ефективності портфеля від його ризику?

Рішення. Задача формування оптимального портфеля в даній ситуації (див. формулу (4.3)):

$$5x_1 \to \min$$
$$2x_0 + 10x_1 = m_{P,}$$
$$x_0 + x_1 = 1$$

Звідси $x_0^* = (10 - m_P)/8, x_1^* = (m_P - 2)/8$ Тоді $m_P = 2 + 8x_1^* = 2 + 8r_P/5$.

5. Вирішити задачу формування портфеля Тобіна мінімального ризику при наявності безризикових паперів і некорельованих інших у загальному вигляді?

Рішення. Використаємо формулу (4.6). Матриця V коваріацій ризикових видів цінних паперів є в цьому випадку діагональною, зворотна до неї також діагональна:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \cdot & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \ V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & & 0 \\ & 1/\sigma_2^2 & \\ & & \cdot & \\ 0 & & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Зробивши необхідні обчислення, одержуємо вектор часток ризикових паперів:

$$X^* = \frac{m_P - m_0}{\sum_{i=1}^{n} (m_1 - m_0)^2 / \sigma_r^2} \begin{pmatrix} (m_1 - m_0)/\sigma_1^2 \\ \vdots \\ (m_n - m_0)\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

6. Сформувати портфель Тобіна максимальної ефективності і ризику не більше заданого із трьох видів цінних паперів: безризикових з ефективністю 2 і некорельованих ризикових. Очікувані ефективності 4 і 10 і ризиками 2 і 4. Які співвідношення частки паперів у ризиковій частині оптимального портфеля?

Рішення. Отже, $m_0 = 2, M = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. Обмежимо ризик портфеля величиною r_p. Скористаємося формулою (4.6):

$$X^* = (r_P / d)V^{-1}(M - m_0 I).$$

Матрицю, зворотну до *V*, знайдемо методом мінорів: $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}$.

Обчислимо

$d^2 = (M - m_0 I)^T V^{-1}(M - m_0 I) = (M - m_0 I)^T [V^{-1}(M - m_0 I)] = (2;8)$ $\left[\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right] = (2;8)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 5$.

Остаточно вектор часток ризикових паперів $X^* = (r_P / \sqrt{5})\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Таким чином, ризикові частки повинні бути однакові і кожна з них дорівнює $r_P / \sqrt{20}$. Отже $x_0^* = 1 - r_P / \sqrt{5}$.

7. Поставити обидві задачі сформувати портфелі Тобіна: мінімального ризику при заданій ефективності і максимальній ефективності при заданому ризику із трьох видів цінних паперів: безризикових з ефективністю 2 і ризикових з очікуваною ефективністю 6 і 8 і ризиками 4 і 9 і взаємною кореляцією 9?

   Рішення:

   $$16x_2^2x + 18x_1x_2 + 81x_2^2 \to \min, \qquad 2x_0 + 6x_1 + 8x_2 \to \max,$$
   $$2x_0 + 6x_1 + 8x_2 = m, \qquad 16x_1^2 + 18x_1x_2 + 81x_2^2 = r_P^2,$$
   $$x_0 + x_1 + x_2 = 1, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1.$$

8. Портфель складається наполовину за вартістю із цінного паперу з β=1,2 і із цінного паперу з β=0,9. Знайдіть β портфеля?
9. Нехай у двох паперів β рівні відповідно 1,2 і -0,8. Побудуйте портфель із β=0 із цих двох паперів?
10. Дані значення прибутковості цінного паперу (нижній рядок) і ринку (верхній рядок) протягом десяти кварталів:

10	9	9	10	10	11	11	12	10	8
23	21	20	22	23	24	25	27	25	20

За допомогою комп'ютера підраховані характеристики цінного паперу: a=4,67; b=l,83; a=8,00; власна варіація – 0,77; ринкова – 4,03;

R-squared=5,26. Ефективність безризикових вкладень дорівнює 4. Перевірте комп'ютерні розрахунки?

11. У моделі CAPM сформувати портфель максимальної ефективності, «бета» якого не більше 1,1, з паперів з наступними «бета»: 1, 1,2, 0,8 . Безризикова ставка дорівнює 4, ефективність ринку дорівнює 8. Операція «short sale» не дозволена?

    Рішення. У зазначеній моделі перевищення ефективності портфеля над безризиковою ставкою пропорційне β портфеля. Тому треба скласти портфель із максимально можливою β, тобто з β=1,1. Для цього досить взяти будь-які два папери, β який лежать по різні сторони від 1,1; наприклад, другі папери з β=1,2 і треті – з β=0,8, і вирішити систему рівнянь:

$$1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 = 1{,}1,$$
$$x_2 + x_3 = 1.$$

    Одержимо x_2 = 3/4, x_3 = 1/4. Таким чином портфель можна скласти тільки із других і третіх паперів.

12. На ідеальному фінансовому ринку 10% за вартістю становлять безризикові папери і 90% – ризикові. Ризикових усього три: перші становлять 1/6 і їх β=0,8; другі – 1/3 і β=1. Знайти частку і β третього паперу. Знайти ефективності всіх ризикових паперів і середню прибутковість по всьому ринку, якщо ефективність ринку (середня прибутковість по ризикових паперах) дорівнює 8%, а безризикова ставка дорівнює 4%?

    Рішення. Зрозуміло, частка третього паперу дорівнює 1/2. Для знаходження β цих паперів треба згадати, що для ринкового портфеля β = 1. Отже,

$$1/6 \cdot 0{,}8 + 1/3 \cdot 1 + 1/2 \cdot \beta_3 = 1,$$

    звідки $\beta_3 = 1{,}4$. Ефективність кожного цінного паперу дорівнює:

$$m_1 = m_0 + \beta_i (m_f - m_0) = 4 + \beta_i (8 - 4) = 4 + 4\beta_i,$$

    тобто m_1 = 7,2%; m_2 = 8; m_3 = 13,6. Далі, середня прибутковість по всьому ринку дорівнює 0,1·4+ 0,9·8 = 7,6%.

Розділ 5. Теорія очікуваної корисності і відношення інвестора до ризику

5.1. Теорія очікуваної корисності

Теорія корисності існує у двох видах: теорія переваг індивіда і відображаюча її функція корисності - це детермінований варіант, і теорія очікуваної корисності – стохастичний варіант. Детермінований варіант викладений у частині 1, розділі 7, п. 7.1, 7.2. Стохастичний варіант викладається нижче. Може здатися дивним, але основи стохастичної теорії корисності були закладені Д. Бернуллі в 1738 році раніше, ніж детермінованої.

1. Найпростіші лотереї

Уявіть, що вам пропонують купити лотерейний квиток, за яким негайно буде проведений розіграш. У вас рівні шанси виграти суму S=100 доларів і залишитися при своїх – нічого не виграти і не програти. За яку суму ви купили б цей квиток?

Якщо за $50, то ви «об'єктивіст». Так називають тих, хто купує квиток за суму M, рівну математичному очікуванню виграшу – у цьому випадку M=50 доларів. Загалом кажучи, знання теорії ймовірностей сприяє «об'єктивності», тобто серед знаючих теорію ймовірностей набагато більше об'єктивістів, ніж у середньому по всьому розумному людству.

Якщо ви згодні заплатити за квиток менше M, наприклад, тільки 45 доларів, то ви не любите ризикувати. Умовно будемо називати тих, хто не любить ризикувати «песимістами» (вони не вірять у виграш).

Якщо ж ви згодні заплатити за квиток більше M, наприклад, 55 доларів, то ви впевнені, що вам повезе, і ви виграєте $100 дол. У цьому випадку ваше відношення до ризику позитивне. Вас можна назвати «оптимістом» або тим, хто любить ризик (risk lover).

Можна довідатися про ваше відношення до ризику, міркуючи подібним чином про продажну ціну лотерейного квитка. Уявіть, що описаний вище лотерейний квиток у вас уже є і вам пропонують його продати. За яку суму ви б його продали?

Якщо за 50 доларів, то ви «об'єктивіст». Якщо ви згодні продати квиток за суму меншу M, наприклад, за 45 доларів, то ви не любите ризикувати і намагаєтеся позбутися від ризику навіть ціною певних втрат, ці втрати є ваша плата за рятування від ризику.

Якщо ж ви згодні продати квиток лише за суму більшу *M*, наприклад, за 55 доларів, то ваше відношення до ризику позитивне. Ви впевнені, що вам повезе і з можливістю виграти ви розстаєтеся неохоче, лише, якщо вам за це приплатять.

Фіксуємо тепер суму 100 доларів і будемо змінювати ймовірність виграшу *p*. Розглянутий лотерейний квиток при даному значенні *p* дає виграш $100 з ймовірністю *p.* Тепер можна нарисувати графіки покупної і продажної ціни такого квитка для об'єктивіста, песиміста й оптиміста (рисунок 5.1).

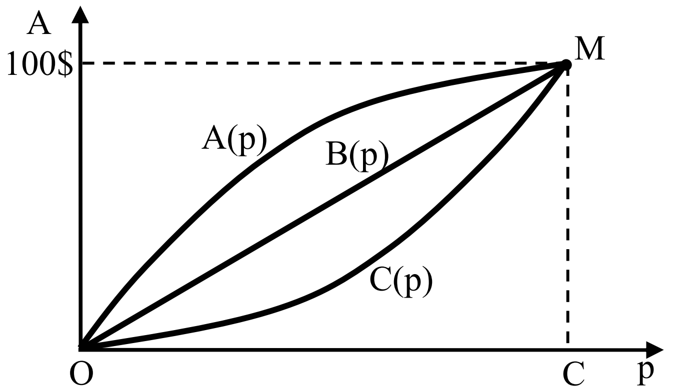


Рисунок 5.1 – Графіки покупної і продажної ціни лотерейного квитка

Пряма лінія – це графік покупної і продажної ціни *B(p)* лотерейного квитка для об'єктивіста, верхня крива *A(p)* – для оптиміста і нижня *C(p)* – для песиміста.

Таким чином, лотерейний квиток при *p*=0,5 об'єктивіст купить або продасть рівно за математичне очікування його виграшу, тобто за 50 дол., оптиміст – за A(0,5) (вище ця сума була 55 дол.), песиміст – за C(0,5) (вище ця сума була 45 дол.).

Взагалі ж, покупна і продажна ціни не обов'язково повинні збігатися для оптиміста і песиміста, як зображено на рисунку 5.1, але ми цим знехтували для спрощення.

Розглянемо плоску фігуру, утворену ламаною *OCM* і прямою об'єктивіста або кривою оптиміста або песиміста. Позначимо *f* частку, що займає ця фігура в прямокутнику *OAMC.* Для об'єктивіста ця фігура є трикутник *OCM* і *f* =0,5; для песиміста ця фігура утворена ламаною *OCM* і його кривою і 0<f<0,5 і для оптиміста ця фігура утворена ламаною *OCM* і його кривою і 0,5<f<1. Число *f* оцінює відношення ЛПР до ризику. Якщо *f*=0,5, то це об'єктивіст і його відношення до ризику нейтральне, при 0<f<0,5, – це песиміст, він ризик не любить, і чим менше *f*, тим більше він не любить ризик; нарешті, якщо 0,5<f< 1, то це оптиміст і чим ближче f до 1, тим позитивніше його відношення до ризику.

Ці міркування виглядають бездоганно. Насправді величезна більшість людей не люблять ризикувати і тому, за нашою термінологією, вони песимісти. Крім того, маючи досить багато грошей і терпіння, оптиміста можна розорити, після чого він, можливо, перегляне своє відношення до ризику. Зробити це можна приблизно так. Нехай він купує у вас лотерейний квиток за 55 доларів. Ви приєднуєте до цієї суми свої 45 доларів і розігруєте квиток з p=0,5. 100 доларів попадають до нього або до вас. Потім ця операція повторюється. Таким чином, за кожний розіграш він програє 5 доларів з ймовірністю 1/2. Якщо в такий спосіб зіграти n раз, то його середній виграш із великою ймовірністю буде близький до 50 доларів, у той час як витрати його будуть у середньому на один розіграш рівні 55 доларів. Але може бути йому дійсно повезе в декількох перших партіях і в цьому випадку переконати його буде дуже важко.

Як побачимо далі (п. 5.2) досить загальні і принципові властивості системи переваг ЛПР змушують його ставитися до ризику неприязно, не приймати його. Знайдемо ми і спосіб вимірювання цього неприйняття. Так що оптимісти являють собою лише чистий курйоз, у всіх серйозних рішеннях ризик прагнуть зменшувати.

2. Теорія очікуваної корисності

Вище розглянуті лотереї із двома варіантами результату: виграшем 100 дол. і „статус-кво”. Розглянемо тепер більш загальні лотереї з n результатами 1,...,n. Ці результати нерівноцінні в системі переваг ЛПР.

Простою лотереєю називається розподіл ймовірностей на множині результатів – $L=(p_1,...,p_n)$. Із простих лотерей можна конструювати більш складні. Візьмемо k простих лотерей $L_1,...,L_k$. Припишемо кожному $i=1,...,k$ ймовірність p_i і одержимо складову лотерею $(L_1,p_1:...;L_k,p_k)$. Ця лотерея здійснюється так: спочатку розігрується розподіл ймовірностей $(p_1,...,p_k)$ за допомогою підходящого випадкового механізму і одержуємо якийсь номер i з множини номерів $1,...,k$. Потім розігрується вже проста лотерея L_i. Таку лотерею називають складовою лотереєю 1-го порядку. З таких лотерей можна сконструювати складову лотерею 2-го порядку і т.ін.

Апріорі ясно, що різні лотереї мають для ЛПР різну цінність, тому на множині всіх лотерей виникає відношення переваги: запис $L \preceq L'$ означає, що ЛПР віддає перевагу лотереї L' над лотереєю L. Відношення переваги описане в частині 1, розділі 7, п. 7.1. Головними властивостями переваги є рефлексивність, транзитивність і досконалість. Рефлексивність означає, що $L`\preceq L$ для будь-якої лотереї, транзитивність означає, що якщо $L_1 \preceq L_2$ і $L_2 \preceq L_3$, то $L_1 \preceq L_3$, і досконалість означає, що для будь-яких двох лотерей $L$, $L'$ вірно або $L \preceq L`$, або $L` \preceq L$.

Багато хто із дослідників визнають, що це відношення переваги досить хитке: багато пар лотерей настільки близькі одна з одною, що ЛПР з великими труднощями може вибрати з них кращу. Труднощі вибору кращої лотереї збільшує також їхня складна природа – адже можна побудувати складові лотереї як завгодно високого порядку.

У процесі дослідження даного кола питань були знайдені три аксіоми, які значно спрощують систему переваг ЛПР на множині лотерей:

Аксіома зведення. Складова лотерея 1-го порядку $(L_1, p_1; \ldots; L_k, p_k)$ еквівалентна (у системі переваг ЛПР) простій лотереї, у якій ймовірність *j*-го результату є $\sum_i p_i p_{ij}$, де p_{ij} – ймовірність *j*-го результату в *i*-й простій лотереї L_i.

Приклад 1. Нехай результата усього два. Візьмемо дві прості лотереї $L_1=(0{,}1;0{,}9)$ і $L_2=(0{,}4;0{,}6)$. Тепер розглянемо складову лотерею. За аксіомою зведення ця складова лотерея еквівалентна простій $(0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}7\cdot 0{,}4;\ 0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}7\cdot 0{,}6) = (0{,}31;\ 0{,}69)$.

Отже, аксіома зведення дозволяє обмежитися тільки простими лотереями, які будемо називати просто лотереями. Множину всіх лотерей позначимо χ. Для випадку *n* результатів лотереї ця множина є $\{(p_1, \ldots, p_n)\}$: всі $p_i \geq 0$ і $\sum_i p_i = 1$ називається *(n-1)-вимірним симплексом.*

Формулювання двох інших аксіом – безперервності і незалежності опустимо, відзначимо тільки, що вони досить прості.

Якщо всі три аксіоми прийняти, то можна довести таку теорему:

Теорема 1. Можливо кожному результату лотереї *i=1,...,n* приписати число u_i таке, що для будь-яких двох лотерей $L=(p_1,\ldots,p_n)$, $L`=(p`_1,\ldots,p`_n)$ буде вірно $L \preceq L`$, якщо і тільки якщо $\sum_i p_i u_i \leq \sum_i p_i^{`} u_i$.

Число u_i, приписане *i*-у результату, називається його *корисністю.* Число $u(L) = \sum_i p_i u_i$, що приписується лотереї *L*, називається *середньою очікуваною корисністю* цієї лотереї. З погляду теорії ймовірностей це просто математичне очікування лотереї.

Корисності лотерей можна обчислити за формулою математичного очікування.

Приклад 2. Продовжимо розгляд прикладу 1. Припишемо результату 0 корисність 0, а результату 1 – корисність 100. Знайдемо середні очікувані корисності всіх трьох згаданих лотерей: двох простих L_1=(0,1; 0,9) і L_2=(0,4; 0,6) одній складовій (L_1, 0,3; L_2, 0,7).

Отже, $u_0 = 0, u_1 = 100$. Виходить, $u(L_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 100 \cdot 100 = 90$;

$u(L_2) = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 100 = 60$; оскільки за аксіомою зведення складова лотерея еквівалентна простій (0,31; 0,69), то її середня очікувана корисність дорівнює 0,31· 0+ 0,69·100 = 69.

Приклад 3. Нехай початковий капітал ЛПР становить 4 дол., а його функція корисності грошей є $u(x) = \sqrt{x}$ (див. частина 1, розділ 7, п. 7.2). Йому пропонують лотерею, у якій можливий виграш 12 дол. з ймовірністю 0,5 і «виграш» 0 дол. також з ймовірністю 0,5. Чи треба ЛПР брати участь у такій лотереї?

Рішення. Корисність 4 для ЛПР дорівнює $u(4) = \sqrt{4} = 2$. Корисність його капіталу після виграшу 12 дол. дорівнює u(4+12)=4; після «виграшу» 0 дол. - u(4)=2; середня очікувана корисність дорівнює 0,5 4+0,5 2=3, що більше початкової. Отже, йому потрібно брати участь у лотереї.

А от, скільки йому можна заплатити за право участі в цій лотереї? Позначимо цю плату *а*. Тоді, *а* визначається з рівняння $0{,}5 \cdot (4\text{-}a\text{+}12)\text{+}0{,}5 \cdot (4\text{-}a)\text{=}2$ і елементарні підрахунки показують, що *а*=3,75.

5.2. Відношення ЛПР, інвестора до ризику

Відомо, що різні люди відносяться до ризику по-різному: одні не люблять ризикувати, інші вважають себе «щасливчиками», яким неодмінно повезе. Виявляється, існують способи виявити і навіть кількісно оцінити відношення ЛПР до ризику і тим самим краще зрозуміти особливості прийняття ним рішень.

1. Вимірювання неприйняття ризику

Вище розглянуті лотереї з кінцевою множиною результатів. Тепер розглянемо більш загальну ситуацію. Множина результатів є множина всіх невід'ємних грошових сум $R^+ = [0, \infty)$. Лотерея задається розподілом ймовірностей на R^+ за допомогою функції розподілу *F*, яку і ототожнимо із самою лотереєю. У даній ситуації *F(x)* – ймовірність того, що при розиграші лотереї ЛПР одержить дохід менше *x*. З теорії очікуваної корисності (див. п. 5.1) слідує, що можна визначити для ЛПР функцію корисності *u(x)*, визначену на R^+, після чого корисність лотереї *F* розраховується за формулою $u(F) = \int\limits_{R^+} u(x) dF(x)$, а якщо розглянутий розподіл безупинен, тобто має щільність розподілу *f*, то $u(F) = \int\limits_{R^+} u(x) f(x) dx$. Цю корисність лотереї також називають *середньою очікуваною корисністю лотереї*. Функція *u(x)* – функція Бернуллі, а *u(F)*, певна на лотереях розглянутого виду, – функція Неймана–Моргенштерна. Фактично функція Бернуллі – це функція корисності грошей (див. частина 1, розділі 7, п. 7.2).

Приклад 4. Нехай функція Бернуллі є $u(u) = \sqrt{x}$, а виграші лотереї рівномірно розподілені на відрізку [0,1]. Тоді середня очікувана корисність лотереї буде $\int\limits_0^1 \sqrt{x dx} = 2/3$.

Нагадаємо властивості функції корисності грошей *u(x)* – вона безперервна, зростаюча і ввігнута, а якщо припустити її диференцируємість, то її перша похідна позитивна, але повинна убувати, що відомо як убутна гранична корисність грошей (а в найзагальнішій формі – для будь-якої функції корисності, як 1-й закон Госсена). У диференціальній формі убування першої похідної виражається від'ємністю 2-ї похідної.

Але від'ємність 2-ї похідної – це і є характеристика ввігнутості функції. На рисунку 5.2 це ілюстровано опуклістю частини площини, розташованої вправо і вниз від графіка функції. Нагадаємо, що ввігнутість функції *f* характеризується тим, що $f(0{,}5a + 0{,}5b) \geq 0{,}5f(a) + 0{,}5f(b)$ для будь-яких *a,b* з області визначення *f* (див. рисунок 5.2), що еквівалентно у свою чергу тому, що $f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ для будь-яких *a,b* з області визначення *f* (область визначення також повинна бути опуклою).

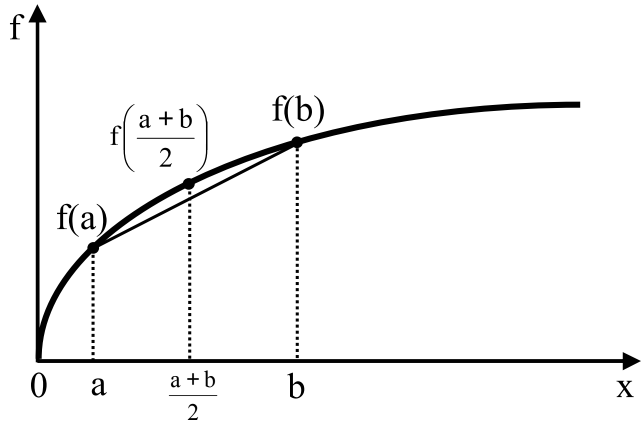


Рисунок 5.2 – Характеристика ввігнутості функції

Оскільки інтеграл $\int\limits_{R^+} u(x)dF(x)$ є аналог суми $\sum\limits_i p_i u(x_i)$, де $p_1+\ldots+p_n=1$, то властивість увігнутості функції корисності *u* еквівалентна виконанню нерівності:

$$U(F) = \int\limits_{R^+} u(x)dF(x) \le u\left(\int\limits_{R^+} xdF(x)\right) \quad (5.1)$$

для будь-якої лотереї *F*.

Який змістовний зміст цієї нерівності?

Як відомо, $U(F) = \int\limits_{R} u(x)dF(x)$ – це середня очікувана корисність лотереї *F*. З іншого боку, $\int\limits_{R} xdF(X)$ – це середній очікуваний розмір грошової суми, яку ЛПР може виграти в лотереї *F*. Отже, для ЛПР цінність усередненої грошової суми більша усередненої корисності цих грошових сум (див. рисунок 5.2). Тим самим ЛПР нагадує «песиміста» з п. 5.1, який більше цінував 50 доларів – очікуване середнє лотереї, ніж усереднену корисність варіантів результатів лотереї.

Позначимо *c(F)* той розмір грошової суми, який для ЛПР рівноцінний величині $\int\limits_{R^+} u(x)dF(x)$, тобто для якого виконується рівність: $u(c(F)) = \int\limits_{R^+} u(x)dF(x)$ – це аналог покупної або продажної ціни лотерейного квитка. Як видно з нерівності (5.1), *c(F)* не більше $u(\int\limits_{R^+} xdF(x))$ – корисності середнього очікуваного розміру грошової суми, яку ЛПР може виграти в лотереї *F*. Величина *c(F)* називається *безумовним еквівалентом лотереї F* (еквівалентом без усяких ймовірнісних міркувань). Різниця $\int_{R^+} x dF(x) - c(F)$ і показує ступінь неприйняття ризику ЛПР.

Приклад 5. Нехай u(x)=ln(x+1), а *F* задає рівномірний розподіл на відрізку [9,19]. Такий розподіл задається постійною щільністю *f(x)*=0,1 на відрізку [9,19]. Обчислимо *c(F)*. Маємо :

$$\int_9^{19} u(x)dF(x) = \int_9^{19} 0{,}1 \cdot \ln(x+1)dx = 0{,}1(x+1)(\ln(x+1)-1\Big|_9^{19} = \ln 40 - 1.$$

Тепер треба знайти *c* із рівняння ln(c+1)=ln40-1. Остаточно одержуємо $c(F) = 40/e - 1 \approx 13{,}76$. Обчислимо тепер $\int_{R^+} x dF(x)$. Для розглянутого рівномірного розподілу математичне очікування $\int_9^{19} x dF(x) = (9+19)/2 = 14$. Як і повинно, бути, 13,75 < 14.

Наступна теорема, що наводиться без доведення, підбиває підсумок викладеного в цьому підрозділі.

Теорема 2. Увігнутість функції корисності ЛПР *u* на множині грошових сум $[0,\infty)$ рівносильна тому, що $c(F) \le \int_{R^+} x dF(x)$ для будь-якої лотереї *F*, і кожне із цих двох рівносильних умов свідчить про неприйняття ризику ЛПР.

2. Деякі відомі конкретні функції корисності грошей

Відомо кілька таких функцій. Розглянемо дві найбільш типові.

Квадратична функція корисності (рисунок 5.3):

$$U(x) = ax - bx^2, \text{де a,b>0}. \tag{5.2}$$

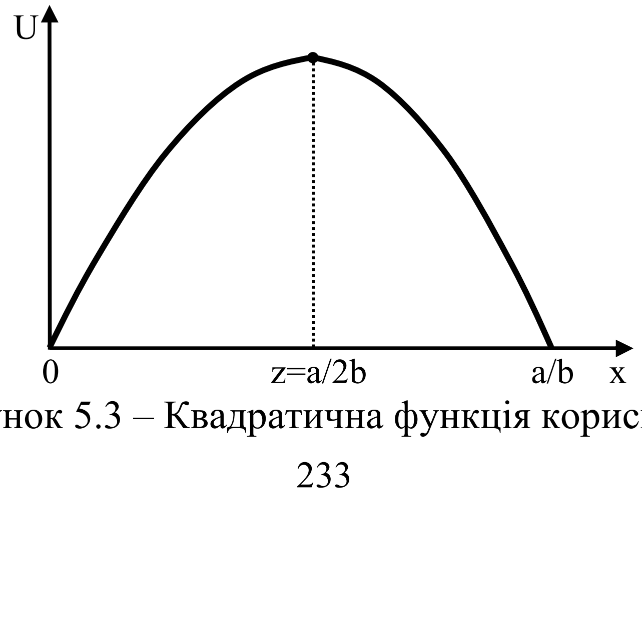


Рисунок 5.3 – Квадратична функція корисності

Ця функція відома ще як функція корисності *Неймана–Моргенштерна*. Вона широко використовується в теорії фінансів, зокрема, у теорії цінних паперів. Звичайно, як функція корисності, вона повинна розглядатися тільки на відрізку $[0, a/2b]$ де вона ввігнута. Широке її використання пояснюється теоремою Неймана-Моргенштерна про те, що при певних природних допущеннях економічна поведінка спрямована на максимізацію очікуваного значення корисності функції *U*.

Логарифмічна функція корисності (рисунок 5.4):

$$U(x) = \log_a x, \text{де } a>0. \quad (5.3)$$

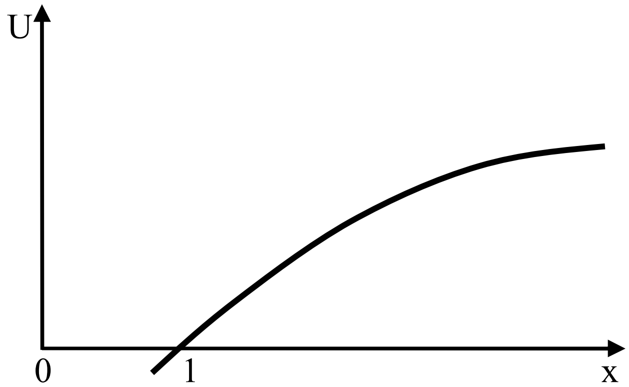


Рисунок 5.4 – Логарифмічна функція корисності

Ця функція ввігнута на всій своїй області визначення. Уперше вона була розглянута Бернуллі в 1738 році.

3. Коефіцієнт Ерроу-Пратта неприйняття ризику

Відношення ЛПР до ризику дуже важливо для аналізу прийняття ним різних рішень і, як видно з теореми 2, вся справа в будові його функції корисності грошей *u(x)* – функції Бернуллі. Тому цю функцію ретельно вивчали і зроблені навіть спроби виміряти ступінь неприйняття ризику в конкретних точках області визначення функції Бернуллі.

Коефіцієнтом Ерроу–Пратта неприйняття ризику в точці *x* для ЛПР із функцією Бернуллі називається число $r_e(x) = -u``(x)/u`(x)$.

Оскільки для функції корисності 1-а похідна додатна, а 2-я від'ємна, то $r_e(x) > 0$ у всякій точці *x*. Це і є обіцяне наприкінці п. 5.1 твердження про неприйняття ризику ЛПР.

Приклад 6. Знайти коефіцієнт Ерроу–Пратта неприйняття ризику для функції Бернуллі $u(x) = 1 - e^{-ax}, a > 0$. Маємо $u`(x) = ae^{-ax}, u``(x) = -a^2e^{-ax}$, виходить, $r_e(x) = a$.

Пояснимо походження коефіцієнта Ерроу-Пратта. Вище була сформульована теорема про те, що ступінь неприйняття ризику визначається ввігнутістю функції корисності. Математично ступінь увігнутості визначається величиною 2-ї похідної. Однак одної 2-ї похідної недостатньо: якщо функцію корисності збільшити, наприклад, в 2 рази, то система переваг ЛПР не зміниться, але 2-а похідна теж зросте в 2 рази, хоча неприйняття ризику, мабуть, не змінилося. Для усунення цього замість 2-ї похідної застосовується відношення її до 1-ї похідної.

Ще одне пояснення будови коефіцієнта Ерроу–Пратта. Фіксуємо яку-небудь ймовірність *p* і запропонуємо ЛПР зіграти в гру: з ймовірністю *p* він одержить суму *x* і з ймовірністю *1-p* – суму *y*. Звичайно, у деякі такі ігри ЛПР відмовиться грати (наприклад, якщо обидві величини *x, y* негативні). Позначимо множину ігор *(x,y)*, у які ЛПР погоджується грати при рівні його багатства *w*, через *A(w)* і назвемо цю множину множиною ігор, прийнятних для нього. Якщо ЛПР не схильний до ризику, то ця множина опукла. Границя цієї множини складається з «граничних» ігор *(x,y)*, таких, що $p\cdot u(w+x)+(1-p)\cdot u(w+y)=u(w)$.

Ця границя задає графік функції *y(x)* (рисунок 5.5). Знайдемо похідну цієї функції в точці $0: p\cdot u`(w)+(1-p)\cdot u`(w)\cdot y`(0)=0$. Отже, $y`(0)=-p/(1-p)$.

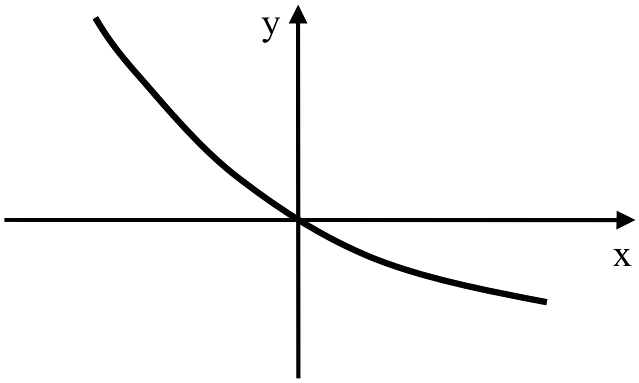


Рисунок 5.5 – Пояснення будови коефіцієнта Ерроу-Пратта

Можна використати множину прийнятних ігор *A(w)* для оцінки схильності ЛПР до ризику. Нехай оцінюється схильність до ризику двох ЛПР – *A* і *B*. Знайдемо їх множину прийнятних ігор *A(w)* і *B(w)*. Якщо $A(w)\subseteq B(w)$ при будь-якому *w*, то можна сказати, що *B* більш схильний до ризику, ніж *A*. Тепер оцінимо цю множину локально в деякій околиці 0. Ясно, що чим більша кривизна кривої *y(x)*, тим менша множина прийнятних ігор, тим більше ЛПР не любить ризик. Але кривизна кривої оцінюється другою похідною. Знайдемо другу похідну

$y``(0): p \cdot u```(w) + (1-p) \cdot u``(w) \cdot (y`(0))^2 + (1+p) \cdot u`(w) \cdot y``(0) = 0$. Використовуючи знайдене вище значення y'(0), одержимо остаточно $y(0) = (p/(1-p)^2)[-u``(w)/u`(w)]$.

Видно, що значення другої похідної пропорційне коефіцієнту Ерроу-Пратта.

4. Колективні рішення і поділ ризику

Як порівняти ЛПР за їх відношенням до ризику? Це питання вже частково розглянуте в попередніх розділах. Тут розглянемо поділ ризику і відповідальності між двома ЛПР.

Розглянемо окремий випадок процедури дослідження системи переваги ЛПР, описаної в попередньому підрозділі.

Запропонуємо ЛПР зіграти в гру, у якій він з рівними шансами одержить суму *x* або заплатить суму *y*. Позначимо множину ігор *(x,y)*, у які ЛПР погоджується грати, через *A*. Границя цієї множини складається з «граничних» ігор і є графіком деякої функції *g(x)*. Якщо ЛПР не схильний до ризику, то множина *A* опукла, а функція *g* увігнута. Ці моменти вже звичні і на них не зупиняємося (рисунок 5.6). Отже, рівноймовірна лотерея *(x,y)* прийнятна для ЛПР, тільки якщо $y \leq g(x)$.

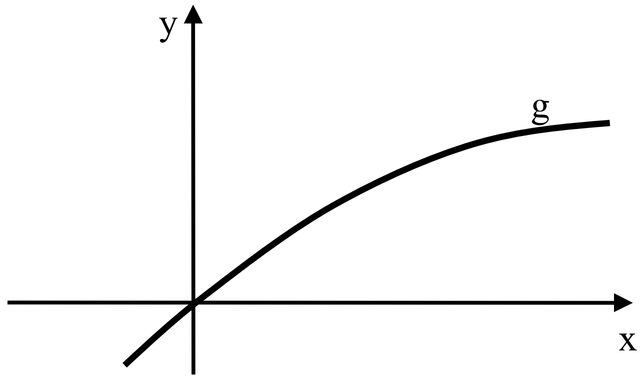


Рисунок 5.6 – Графік при якому ЛПР не схильний до ризику

Спеціально відзначимо, що функція *g(x)* безсумнівно, характеризує відношення ЛПР до ризику – чим більше ввігнута ця функція, тим більше неприйняття ризику ЛПР.

Нехай тепер два ЛПР намагаються спільно розіграти лотерею *(x,y)* зазначеного виду. При цьому вони згодні внести спільно суму *y* при програші і розділити на двох виграш *x*. Як знайти множину лотерей, прийнятних для них? Чи може, зокрема, знайтися лотерея, прийнятна для обох спільно, але неприйнятна для кожного окремо? На рисунку

5.7 графік функції g_1 для першого ЛПР показаний суцільною лінією, g_2 для другого – пунктирною.

Можна спробувати розділити виграш і програш пропорційно. Скажемо, перший бере частку d=3/4, а частку d=1/4 бере на себе другий. Тоді в лотереї (1000, 500) частка першого була б (750, 375), а другого – (250, 125). З рисунку 5.7 видно, що така лотерея прийнятна для другого, а для першого неприйнятна. І взагалі видно, що пропорційний поділ лотерей не підходить для першого – адже всі такі лотереї лежать на діагоналі, а вона не перетинається з множиною A прийнятних для першого ЛПР лотерей. З іншого боку, чому обов'язковий пропорційний підхід до поділу лотерей? Чи мало як можуть домовитися два ЛПР. Наприклад, вони можуть розділити лотерею (1000, 500) так: перший – (500, 175), другий – (500, 325). З рисунку 5.7 видно, що це прийнятно для обох ЛПР.

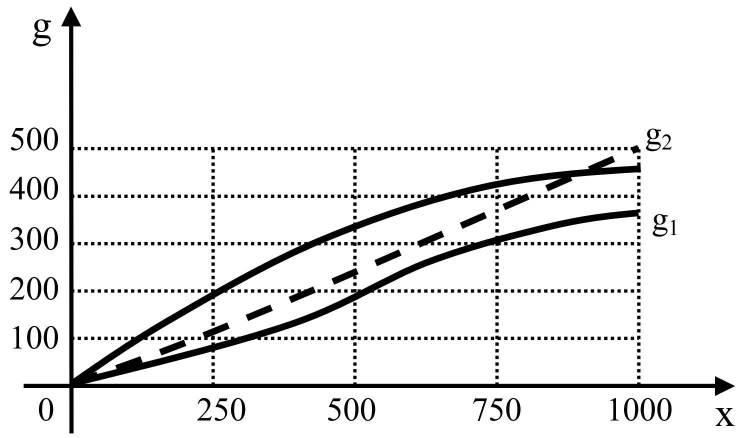


Рисунок 5.7 – Функції ЛПР при розіграші лотерей

Нехай g_1, g_2 – функції, зазначені вище для обох ЛПР. Знайдемо функцію g для «колективу» двох ЛПР.

Розглянемо лотерею (a,b). Вона прийнятна для колективу, якщо і тільки якщо найдуться x_1,x_2,y_1,y_2 такі, що $x_1 + x_2 = a, y_1 + y_2 = b,$ и $y_1 \leq g(x_1), y_2 \leq g_2(x)$.

Звідси ясно, що $g(a) = \max\limits_{0 \leq x \leq a}\{g_1(x) + g_2(a - x)\}$.

Припустимо тепер, що обидві функції g_1, g_2 мають необхідні похідні, тоді максимальне значення функції $\{g_1(x) + g_2(a - x)\}$ досягається в точці c, для якої $g_1^{`}(c) = g_2^{``}(a - c)$. Якщо обоє ЛПР ризик не люблять, то обидві функції, як вище відзначено, увігнуті. Звідси випливає, що рівність похідних функцій $g_1^{`}(x), g_2^{`}(a - x)$ може бути тільки в одній точці. Отже, точка максимуму, якщо вона є, єдина, позначимо її $h(a)$. Маємо дві функції g і h. Ці функції повністю описують умови проведення лотерей у колективі двох ЛПР. Опишемо тільки «граничні» лотереї, тобто лотереї *(a,b)*, для яких $b=g(a)$. Виграш ділиться так: перший одержує $h(a)$, другий – іншу суму $a-h(a)$; програш розподіляється таким чином: перший вносить $g_1(h(a))$, другий – іншу суму $g(a)-g_2(h(a))$.

Тепер можна декількома способами зрівняти відношення цих двох ЛПР до ризику. Наприклад, за допомогою такого твердження.

Твердження. Наступні висловлення еквівалентні:

а) другий не приймає ризик більшою мірою, чим перший;

б) $g_2(x) \le g_1(x)$;

в) $g_2^{``}(x) \ge g_1^{``}(x)$.

5. Врахування відносин ЛПР до ризику

Розглянемо функцію $U(r,m)$, за допомогою якої ЛПР оцінює операцію з ризиком r і ефективністю m (нагадаємо, що ефективність – це середня очікувана прибутковість операції). Така функція відноситься до класу функцій корисності, так і будемо її називати. Будь-яка лінія рівня функції U дає операції, рівноприйнятні для ЛПР, тому вони називаються ще *кривими байдужості*. Залежно від відношення ЛПР до ризику такі функції можуть бути трьох видів (на рисунку 5.8 зображені криві байдужості).

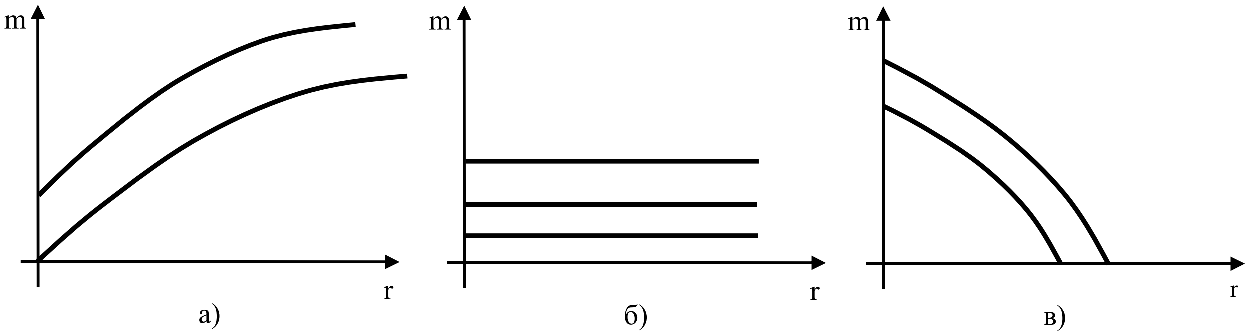


Рисунок 5.8 – Графік кривих байдужості

Рисунок 5.8 а) відповідає неприйняттю ризику – рухаючись по кривій байдужості, ЛПР компенсує збільшення ризику все більшим збільшенням доходу; рисунок 5.8 б) нейтральному, або краще сказати, байдужому відношенню до ризику; рисунок 5.8. в) доброзичливому ставленню до ризику, коли ЛПР уважає, що йому неодмінно повезе і віддає перевагу більш ризиковим операціям. Найбільш природним представляється поведінка ЛПР з неприйняттям ризику. Типова функція такого

ЛПР є, наприклад, $U(r, m) = m - 2r$, тобто коли ЛПР готовий поступитися збільшенням ризику на одиницю, якщо при цьому ефективність збільшиться на 2 одиниці.

Продовжимо тепер рішення задач про оптимальний портфель, викладених у частині 2, розділі 4, з урахуванням відносини ЛПР до ризику за допомогою його функції корисності: серед всіх портфелів знайти портфель, найбільш корисний для даного ЛПР, тобто максимізуючий його функцію корисності. Звичайно, такий портфель треба шукати серед портфелів, оптимальних за Парето, або ефективних. Позначимо множину таких портфелів *P*, тоді треба вирішити задачу:

$$U(P) \to \max \tag{5.4}$$

Природною функцією корисності є така, що зростає зі збільшенням ефективності портфеля і зменшенням його ризику. Тому можна обмежитися лише портфелями, оптимальними за Марковіцем, тобто таким, що мають мінімальний ризик при даній ефективності або максимальній ефективності при даному ризику.

Якщо на ринку є безризикові папери, то задача (5.4) сильно спрощується. Справді, для оптимальних портфелів Тобіна залежність ефективності від ризику лінійна – $m_p = m_0 + d \cdot r_p$. Підставляючи цю лінійну залежність у функцію корисності, зведемо задачу (5.4) до максимізації функції однієї змінної.

Отже, при наявності безризикових паперів є дві можливості врахувати відношення ЛПР до ризику, вибором частки x_0 безризикових паперів і за допомогою функції корисності.

Задачі до розділу 5

1. Нехай функція покупної (і продажної) ціни лотерейного квитка, по якому виграш 1 з ймовірністю *p* і статус-кво з додатковою ймовірністю є p^2. Хто перед, нами – оптиміст, об'єктивіст або песиміст? Знайдіть величину *f*?
2. Розглянемо лотереї із двома результатами. Візьмемо дві прості лотереї L_1=(0,2; 0,8) і L_2=(0,4; 0,6). Опишіть і зобразіть на площині всі лотереї, складені із цих двох?
3. Зведіть до простого складову лотерею (L_1; 0,1; L_2; 0,1; L_3; 0,8), де L_1=(0,l; 0,2; 0,7) і L_2=(0,2; 0,6; 0,2), L_3 = (0,3; 0,4; 0,3)?
4. Розглянемо лотереї із трьома результатами. Візьмемо три прості лотереї L_1=(0,1; 0,2; 0,7) і L_2=(0,2; 0,6; 0,2), L_3=(0,3; 0,4; 0,3). Опишіть і

зобразіть в просторі всі лотереї, складені із цих трьох?

5. Нехай функція корисності ЛПР є $u(x) = \ln(1+x)$, рівень його капіталу *w*. Йому пропонують лотерею, у якій виграш *x* і програш *x* мають ймовірність відповідно *p* і *1-p*. Знайдіть *x*, при якому така лотерея йому байдужа. Яка відповідь при *p=0,5*?
6. Нехай функція Бернуллі індивідуума є *u(x)*, рівень його багатства *w*. Розглянемо лотерею, що з ймовірністю *p* дає виграш *G* і з ймовірністю *(1-p)* – виграш *B*. Знайдіть продажну і покупну ціну цієї лотереї в загальному вигляді. Вирішите цю задачу при конкретних даних: $u(x)\sqrt{x}, w = 10, C = 10, B = 5$?
7. Нехай функція корисності індивідуума є $u(x) = \sqrt{x}$. При рівні багатства 16 знайти ймовірнісну премію за ризик у лотереї, що з ймовірністю 1/2 дає виграш 4 і програш 4?
   Рішення. Ця ймовірнісна премія *e* за ризик задовольняє рівнянню $u(x) = (1/2 + e)\, u(x+4) + (1/2 - e)\, u(x-4)$,
   тобто$16 = (1/2 + e)\cdot(16+4) + \left(1/2 - e\right)\cdot(16-4)$. Вирішуючи це рівняння, знаходимо *e*=0,04. Отже, даному індивідуумові при такому рівні його багатства байдужа лотерея, що дає виграш 4 з ймовірністю 0,54 і програш 4 з ймовірністю *e*=0,46.
8. Нехай функція корисності інвестора є $f(P) = m - \sqrt{r}$. Задані характеристики двох цінних паперів: ефективності і їх ризики, які рівні 4, 8; 6, 30; спільна варіація прибутковості дорівнює 20. За допомогою комп'ютера перебрали із кроком *h*=0,2 частку x[l]=l-k·h 1-го паперу в портфелі і визначили характеристики портфелів з такими частками або характеристики портфелів з такими частками паперів (x[2] при цьому дорівнює 1-x[1]). Таким чином, нульовий портфель складається тільки з паперів 1-го виду, а 5-й – з паперів 2-го виду.

Ефективність	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0
Ризик портфеля	8,0	9,1	13,3	18,5	24,2	30,0
Корисність портфеля	1,2	1,4	1,2	0,9	0,7	0,5
Номер портфеля	0	1	2	3	4	0,5

   Перевірте комп'ютерні розрахунки, переконаєтеся, що 1-й портфель має найбільшу корисність?
9. Нехай оцінка ЛПР корисності портфеля *P* є $u(P)=m-r^2$, де *m, r* – ефективність і ризик портфеля. Портфель складається із двох некорельованих цінних паперів з ефективностями і ризиками відповідно (2,4), (4,8). Знайдіть найкорисніший портфель. Знайдіть ефективність і ризик портфеля?

ЧАСТЬ 3. ОСНОВИ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ ТА СТАТИСТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ

Розділ 1. Основні аспекти економетричних розрахунків

1.1. Основи економетричного моделювання

Розглянемо наступну ситуацію. Допустимо, ми хочемо продати автомобіль і вирішили дати об'яву про продаж у газеті. Природньо, перед нами встає питання: яку ціну вказати в оголошенні?

Очевидно, ми будемо керуватися інформацією про ціну, що виставляють інші продавці подібних автомобілів. Що значить «подібні автомобілі»? – Очевидно, це автомобілі, що мають близькі значення таких факторів, як рік випуску, пробіг, потужність двигуна. Розглянувши колонку оголошень, ми формуємо свою думку про ринок товару, що цікавить нас, і, можливо, після деякого міркування, призначаємо ціну.

На цьому найпростішому прикладі насправді можна простежити основні моменти економетричного моделювання. Розглянемо наші дії більш формалізовано.

Ми ставимо завдання визначити ціну – величину, формовану під впливом деяких факторів (року випуску, пробігу і т.ін.). Такі залежні величини звичайно називаються *залежними* змінними, а фактори від яких вони залежать, – *пояснюючими*.

Формуючи загальну думку про стан ринку, ми звертаємося до об'єкта, що цікавить нас, і одержуємо *очікуване* значення залежної змінної при заданих значеннях пояснюючих змінних.

Зазначена конкретна ціна – *спостережуване* значення залежної змінної залежить також і від випадкових явищ – таких, наприклад, як характер продавця, його потреба в конкретній грошовій сумі, можливі строки продажу автомобіля і інше.

Продавець навряд чи буде будувати яку-небудь математичну модель, але менеджер великого салону, що спеціалізується на торгівлі автомобілями на вторинному ринку, швидше за все, захоче мати більш точне уявлення про очікувану ціну і про можливу поведінку випадкової складової. Наступний крок і є економетричне моделювання.

Загальним моментом для будь-якої економетричної моделі є розбиття залежної змінної на дві частини – *пояснену* і *випадкову*. Сформулюємо задачу моделювання неформальним чином: на підставі експериментальних даних визначити пояснену частину і, розглядаючи випадкову складову як випадкову величину, одержати (можливо, після деяких припущень) оцінки параметрів її розподілу.

Таким чином, економетрична модель має такий вигляд:

Спостережуване значення залежної змінної	=	Пояснена частина, яка залежить від значень пояснених змінних	+	Випадкова складова	
Y	=	$f(X)$	+	ε.	(1.1)

Зупинимося тепер на цілях моделювання.

Приклад 1. Припустимо, отриманий наступний вираз для поясненої частини змінної Y – ціни автомобіля:

$$\hat{y} = 18000-1000x_1-0{,}5x_2,$$

де $\hat{y}$ – очікувана ціна автомобіля (в ум. грош. од., тут і далі ум. гр.од.);

x_1 – строк експлуатації автомобіля (у роках);

x_2 – пробіг (у тис. км.).

Яке практичне використання отриманого результату? Очевидно, по-перше, він дозволяє зрозуміти: як саме формується розглянута економічна змінна – ціна на автомобіль. По-друге, дає можливість виявити вплив кожної з пояснюючих змінних на ціну автомобіля (так, у цьому випадку ціна нового автомобіля (при x_1=0, x_2=0) 18000 ум. гр. од., при цьому тільки за рахунок збільшення строку експлуатації на 1 рік ціна автомобіля зменшується в середньому на 1000 ум. гр. од., а тільки за рахунок збільшення пробігу на 1 тис. км. – на 0,5 ум. гр.од.). У третіх, що, мабуть, найбільше важливо, цей результат дозволяє прогнозувати ціну на автомобіль, якщо відомі його основні параметри. Тепер менеджеру не складно визначити очікувану ціну на автомобіль, що надійшов для продажу, навіть якщо його характеристики раніше не були відомі в данному салоні (рік випуску і пробіг).

Нехай є p пояснюючих змінних $X_1,\ldots,X_p$ і залежна змінна Y. Змінна Y є випадковою величиною, що має при заданих значеннях факторів деякий розподіл. Якщо випадкова величина Y безперервна, то можна вважати, що її розподіл при кожному припустимому наборі значень факторів ($x_1, x_2 ,\ldots, x_p$) має умовну щільність $f_{x_1,x_2,\ldots,x_p}(y)$.

Звичайно робиться деяке припущення щодо розподілу Y. Найчастіше передбачається, що умовні розподіли Y при кожному допустимому значенні факторів – *нормальні*. Подібне припущення дозволяє одержати значно кращі результати. Втім, припущення про нормальність умовних розподілів *Y* доводиться відкинути.

Пояснюючі змінні $X_j(j=1,..,p)$ можуть вважатися як *випадковими*, так і *детермінованими*, тобто приймаючі певні значення. Проілюструємо цю тезу на вже розглянутому прикладі 1 продажу автомобілів. Ми можемо заздалегідь визначити для себе параметри автомобіля і шукати оголошення про продаж автомобіля з такими параметрами. У цьому випадку некерованою, випадковою величиною залишається тільки залежна змінна – ціна. Але ми можемо також випадковим образом вибирати оголошення про продаж, у цьому випадку параметри автомобіля – пояснюючі змінні – також виявляються випадковими величинами.

Класична економетрична модель розглядає пояснюючі змінні X_j як детерміновані, однак, як ми побачимо надалі, основні результати статистичного дослідження моделі залишаються в значній мірі тими ж, що і у випадку, якщо вважати X_j випадковими змінними. Пояснена частина – позначимо її Y_e – у кожному випадку являє собою функцію від значень факторів – пояснюючих змінних:

$$Y_e=f(X_1,\dots,X_p). \tag{1.2}$$

Таким чином, *економетрична* модель має вид:

$$Y=f(X_1,\dots,X_p)+\varepsilon. \tag{1.3}$$

Найбільш природним вибором поясненої частини випадкової величини *Y* є її середнє значення – умовне математичне очікування $M_{x_1,x_2,\dots,x_p}(Y)$, отримане при даному наборі значень пояснюючих змінних $(x_1,x_2,\dots,x_p)$. (Надалі математичне очікування будемо позначати $M_x(Y)$). По своєму змісті пояснена частина – це очікуване значення залежної змінної при заданих значеннях пояснюючих.

Рівняння $M_X(Y) = f(x_1,\dots, x_p)$ називається *рівнянням регресії.*

При такому природному виборі поясненої частини *економетрична* модель має вид:

$$Y=M_x(Y)+\varepsilon, \tag{1.4}$$

де ε – випадкова величина (або помилка). У курсі математичної статистики рівняння (1.4) називається *рівнянням регресійної моделі*.

Відразу ж відзначимо, що *економетрична* модель не обов'язково є регресійною, тобто пояснена частина не завжди являє собою умовне математичне очікування залежної змінної.

Приклад 2. Визначити залежність витрат Y на який-небудь товар від доходу X. Допустимо, є дані опитування ста чоловік і сто пар чисел $(x_1, y_1),...,(x_{100}, y_{100})$. Аналізуючи ці дані, ми одержуємо (відкладемо поки питання – яким чином) залежність $Y_e=f(X)$.

Однак може виявитися, що дані про дохід, отримані в результаті опитування, насправді є хибним (наприклад, у середньому заниженими), тобто пояснюючі змінні виміряються із систематичними помилками. У цьому випадку люди, які дійсно володіють доходом X, будуть насправді витрачати на досліджуваний товар у середньому величину, меншу, чим $f(X)$, тобто в розглянутому прикладі пояснена частина не є умовним математичним очікуванням залежної змінної.

Систематичні помилки вимірювання пояснюючих змінних – одна з можливих причин того, що *економетрична* модель не є регресійною. В економічних дослідженнях подібна ситуація зустрічається досить часто. Одним з можливих шляхів усунення цього є вибір інших пояснюючих змінних.

З математичної точки зору регресійні моделі виявляються істотно більш простим об'єктом, чим *економетрична* модель загального типу. Відзначимо тут деякі властивості регресійної моделі.

Розглянемо рівність $Y=M_x(Y)+\varepsilon$ і візьмемо від обох частин математичне очікування при заданому наборі значень пояснюючих змінних X. У цьому випадку $M_x(Y)$ є числова величина, рівна своєму математичному очікуванню, і ми одержуємо рівність:

$$M_x(\varepsilon) = 0 \qquad (1.5)$$

(з цього і $M(\varepsilon)=0$), тобто в регресійній моделі очікуване значення випадкової помилки дорівнює нулю. Можна показати (якщо пояснюючі змінні розглядаються як випадкові величини) некорельованість випадкових помилок і пояснюючих змінних X. Ця обставина виявляється найбільш істотною умовою переконливості одержуваних кількісних результатів аналізу *економетричної* моделі.

1.2. Економетрична модель і експериментальні дані

Щоб одержати досить достовірні і інформативні дані про розподіл якої-небудь випадкової величини, необхідно мати *вибірку* її спостережень досить великого обсягу. Вибірка спостережень залежної змінної Y і пояснюючих змінних $X_j(j=1,...,p)$ є відправною точкою будь-якого економетричного дослідження.

Такі вибірки являють собою матриці значень $(x_{i1},..., x_{ip}; y_i)$, де i=1,...,n; p – кількість пояснюючих змінних, n – число спостережень.

Як правило, число спостережень n чимале (десятки, сотні) і значно перевищує число p пояснюючих змінних. Проблема, однак, полягає в тому, що спостереження y_i які розглядаються в різних вибірках як випадкові величини Y_i і одержувані при різних наборах значень пояснюючих змінних X_j, мають різний розподіл. А це означає, що для кожної випадкової величини Y_i ми маємо всього лише одне спостереження. Зрозуміло, на підставі одного спостереження ніякого адекватного висновку про розподіл випадкової величини зробити не можна, і потрібні додаткові припущення.

Загалом розглядається два типи вибіркових даних.

1. Просторова вибірка або просторові дані (cross-sectional data). В економіці під *просторовою вибіркою* розуміють набір показників економічних змінних, отриманих у певний момент часу. Але таке визначення не дуже зручно – через неоднозначність поняття «момент часу». Це може бути і день, і тиждень, і рік. Очевидно, про просторову вибірку має сенс говорити в тому випадку, якщо всі спостереження отримані приблизно в незмінних умовах, тобто являють собою набір незалежних вибіркових даних з деякої генеральної сукупності.

Таким чином, ми будемо називати *просторовою вибіркою* серію з n незалежних спостережень (p+1)-мірної випадкової величини $(X_1,...,X_P;Y)$. (При цьому надалі можна не розглядати X_j як випадкові величини.) У цьому випадку різні випадкові величини Y_i виявляються між собою незалежними, що спричиняє некорельованість їхніх збурювань, тобто:

$$r(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \text{ при } i=j \tag{1.6}$$

де $r(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$ – коефіцієнт кореляції між збурюваннями ε_i і ε_j.

Умова (1.6) істотно спрощує модель і її статистичний аналіз.

Як визначити, чи є вибірка серією незалежних спостережень? На це питання немає однозначної відповіді. Формальне визначення незалежності випадкових величин, як правило, неперевіряється. Звичайно за незалежні приймаються величини, які не зв'язані причинно. Однак на практиці далеко не завжди питання про незалежність виявляється беззаперечним.

Повернемося до прикладу про продаж машини (п. 1.1).

Нехай *Y* – ціна машини, *X* – рік випуску, а $(x_1, y_1),..., (x_n, y_n)$ – серія даних, отримана з газети. Чи можна вважати ці спостереження незалежними?

Різні продавці не знайомі між собою, вони дають свої об'яви незалежно друг від друга, так що припущення про незалежність спостережень виглядає цілком розумно. З іншого боку, людина, що призначає ціну за свій автомобіль, керується цінами попередніх оголошень, так що і заперечення проти незалежності спостережень також має право на існування.

Із цього можна зробити висновок, що рішення про просторовий характер вибірки певною мірою суб'єктивно і пов'язане з умовами використовуваної моделі. Втім, те ж саме можна сказати про припущення, які робляться в математичній статистиці.

Отже, економетрична модель, побудована на основі просторової вибірки експериментальних даних (x_i, y_i), має вид:

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \ i=1,\ldots,n, \tag{1.7}$$

де помилки регресії задовольняють умовам:

$$M(\varepsilon_i) = 0, \tag{1.8}$$

$$r(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \tag{1.9}$$

$$D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2. \tag{1.10}$$

Що стосується умови (1.10), то тут можливо два випадки:

а) $\sigma_i^2 = \sigma_j^2$ при всіх *i* і *j*. Властивість сталості дисперсій помилок регресії називається *гомоскедастичнісю*. У цьому випадку розподіл випадкових величин Y_i відрізняються тільки значенням математичного очікування (поясненої частини);

б) $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$. У цьому випадку має місце *гетероскедастичністъ* моделі. Гетероскедастичність «псує» багато результатів статистичного аналізу і, як правило, вимагає усунення.

Як визначити, чи є досліджувана модель гомо- або гетероскедастичною? У деяких випадках це очевидно. Наприклад, ціна автомобіля, якому п'ятнадцять років, навряд чи може піднятися вище 2000 ум. гр. од., так що стандартна помилка ціни в цьому випадку навряд чи може бути більше, ніж 300-400 ум. гр. од. Тим часом автомобіль, якому два роки, може коштувати і 7000, і 17000 ум. гр. од., тобто стандартна помилка свідомо не менше 1500-2000 ум. гр. од.

Однак у багатьох випадках гетероскедастичність моделі далеко не настільки очевидна, і потрібно застосовувати методи математичної статистики для прийняття рішення про те, який тип моделі буде використовуватися.

2. Часовий (динамічний) ряд (time-series data). Часовим (динамічним) рядом називається вибірка спостережень, у якій важливі не тільки самі спостережувані значення випадкових величин, але і порядок їхнього проходження один за одним. Найчастіше впорядкованість обумовлена тим, що експериментальні дані являють собою серію спостережень однієї й тієї ж випадкової величини в послідовні моменти часу. У цьому випадку динамічний ряд називається *часовим рядом*. При цьому передбачається, що тип розподілу спостережуваної випадкової величини залишається тим самим (наприклад, нормальним), але параметри його змінюються залежно від часу.

Моделі часових рядів, як правило, виявляються складніше моделей просторової вибірки, тому що спостереження у випадку часового ряду не є незалежними, а це значить, що помилки регресії можуть корелювати один з одним, тобто умова (1.6) не виконується.

Слід особливо зазначити, що маючи тільки ряд спостережень без розуміння їхньої природи, неможливо визначити, маємо ми справу із просторовою вибіркою або часовим рядом.

Приклад 3. Нехай є 500 пар чисел $(x_1,y_1),\dots,(x_{500}, y_{500})$, де Y – ціна автомобіля, а X – рік випуску (дані взяті з газети). Можливі наступні варіанти:

1) n газет було впорядковано по даті їхнього випуску, і з кожної газети було обрано (випадковим чином) по одній об'яві. У цьому випадку ми, можемо вважати, що маємо справу з часовим рядом;

2) газети були довільним чином перемішані, і незважаючи на дату випуску випадковим чином було відібрано n оголошень. У цьому випадку ми, можемо вважати, що наша вибірка – просторова.

При цьому, можливо, що в обох випадках ми одержимо однаковий набір числових даних. Більше того, теоретично можливо навіть і те, що вони опиняться в тій же послідовності. Однак у другому випадку ми повинні зазначити некорельованість помилок регресії (виконання умови (1.6)), тим часом як у першому випадку подібна передумова може виявитися неправомірною.

1.3. Лінійна регресійна модель та система одночасних рівнянь

Нехай визначений характер експериментальних даних і виділений певний набір пояснюючих змінних.

Для того, щоб знайти пояснену частину, тобто величину $M_x(Y)$, потрібне знання *умовних розподілів випадкової величини Y*. На практиці це майже ніколи не має місця, тому точне знаходження поясненої частини неможливо.

У таких випадках застосовується стандартна процедура згладжування експериментальних даних. Ця процедура складається із двох етапів:

1) визначається параметричне сімейство, до якого належить функція $M_x(Y)$ (розглянута як функція від значень пояснюючих змінних X). Це може бути множина лінійних функцій, показових функцій і т.ін.;
2) знаходяться оцінки параметрів цієї функції за допомогою одного з методів математичної статистики.

Формально ніяких способів вибору параметричного сімейства не існує. Однак у переважній більшості випадків економетричні моделі вибираються *лінійними*.

Крім цілком очевидної переваги лінійної моделі – її відносної простоти, – для такого вибору є, принаймні, дві суттєві причини.

Перша причина: якщо випадкова величина (X,Y) має спільний нормальний розподіл, то, як відомо, *рівняння регресії лінійні* (див. частина 3, розділ 2). Припущення про нормальний розподіл є цілком природним і в ряді випадків може бути обгрунтований за допомогою граничних теорем теорії ймовірностей (див. частина 3, розділ 2).

В інших випадках самі величини Y або X можуть не мати нормального розподілу, але деякі функції від них розподілені нормально. Наприклад, відомо, що логарифм доходів населення – нормально розподілена випадкова величина. Цілком природно вважати нормально розподіленою випадковою величиною пробіг автомобіля. Часто гіпотеза про нормальний розподіл приймається в багатьох випадках, коли немає явного їй протиріччя, і, як показує практика, подібна передумова виявляється цілком розумною.

Друга причина, по якій лінійна регресійна модель виявляється переважнішою за інші, – це менший ризик значної помилки прогнозу.

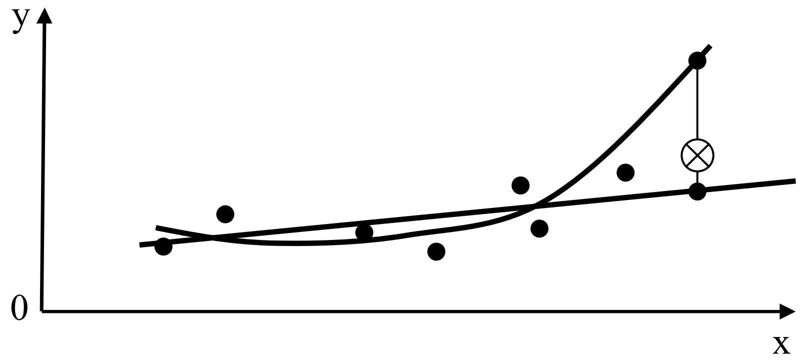


Рисунок 1.1 – Ілюстрація функції регресії: лінійної і квадратичної

Рисунок 1.1 ілюструє два вибори функції регресії – лінійної і квадратичної. Як видно, наявна множина експериментальних даних (точок) парабола згладжує, мабуть, навіть краще, ніж пряма. Однак парабола швидко віддаляється від кореляційного поля і для доданого спостереження (позначеного хрестиком) теоретичне значення може дуже відрізнятися від емпіричного.

Можна надати точний математичний зміст цьому твердженню: *очікуване значення помилки прогнозу*, тобто математичне очікування квадрата відхилення спостережуваних значень від згладжених (або теоретичних) $M(Y_{спостер} - Y_{теор})^2$ виявляється менше в тому випадку, якщо рівняння регресії обране лінійним. У даному посібнику ми в основному будемо розглядати лінійні регресійні моделі.

Найбільше вивчені лінійні регресійні моделі, що задовольняють умовам (1.8), (1.9) і властивості сталості дисперсії помилок регресії, – вони називаються *класичними моделями*.

Помітимо, що умовам класичної регресійної моделі задовольняють і гомоскедастича модель просторової вибірки, і модель часового ряду, спостереження якого не корелюють, а дисперсії постійні. З математичної точки зору вони дійсно нерозрізнені (хоча можуть значно розрізнятися економічні інтерпретації отриманих математичних результатів).

Докладному розгляду класичної регресійної моделі присвячені розділі 3, 4 даної частини посібника. Практично весь наступний матеріал присвячений моделям, які так чи інакше можуть бути зведені до класичного.

Дотепер ми розглядали економетричні моделі, які задаються рівняннями, що виражають залежну змінну через пояснюючі змінні. Однак реальні економічні об'єкти, досліджувані за допомогою економетричних методів, приводять до поширення поняття економетричної моделі, яка описується системою *регресійних рівнянь і тотожностей*.

Особливістю цих систем є те, що кожне з рівнянь системи, крім «власних» пояснюючих змінних, може включати пояснючи змінні з інших рівнянь. Таким чином, ми маємо не одну залежну змінну, а набір залежних змінних, пов'язаних рівняннями системи. Таку систему називають також *системою одночасних рівнянь*, підкреслюючи той факт, що в системі ті самі змінні одночасно розглядаються як залежні в одних рівняннях і незалежні в інших.

Системи одночасних рівнянь найбільше повно описують економічний об'єкт, що містить множину взаємозалежних ендогенних (формуються усередині функціонування об'єкта) і екзогенних (зовнішніх) змінних. При цьому в якості ендогенних і екзогенних можуть виступати лагові (узяті в попередній момент часу) змінні.

Класичним прикладом такої системи є модель попиту Q^d і пропозиції Q^s, коли попит на товар визначаться його ціною P і доходом споживача I, пропозиція товару – його ціною P і досягається рівновага між попитом та пропозицією:

$$Q_d=\beta_1+\beta_2 P+\beta_3 I+\varepsilon_1; \qquad (1.11)$$

$$Qs = \beta_4+\beta_5 P+\varepsilon_2; \qquad (1.12)$$

$$Q_d = Q_s. \qquad (1.13)$$

У цій системі екзогенної змінною виступає дохід споживача I, а ендогенними – попит (пропозиція) товару $Q^d=Q^s=Q^d$ і ціна товару (ціна рівноваги) P.

В іншій моделі попиту та пропозиції в якості пропозиції Q_t^s може бути не тільки ціна товару P у даний момент часу t, тобто P_t але і ціна товару в попередній момент часу P_{t-1} , тобто лагова ендогенна змінна:

$$Q_t^s=\beta_4+\beta_5 P_t+\beta_6 P_{t-1}+\varepsilon_2. \qquad (1.14)$$

Узагальнюючи викладене, можна сказати, що економетрична модель дозволяє пояснити поводження ендогенних змінних залежно від значень екзогенних і лагових ендогенних змінних.Також слід зазначити наступне. Не всяка економіко-математична модель, що представляє математико-статистичний опис досліджуваного економічного об'єкта, може вважатися економетричною. Вона стає економетричною тільки в тому випадку, якщо буде відображати цей об'єкт на основі його емпіричних (статистичних) даних.

1.4. Основні етапи економетричного моделювання

Можна виділити шість основних етапів економетричного моделювання: постановочний, апріорний, етап параметризації, інформаційний, етапи ідентифікації і верифікації моделі.

Зупинимося докладніше на кожному із цих етапів і розглянемо проблеми, пов'язані з їхньою реалізацією.

1-й етап (постановочний). Формується мета дослідження, набір економічних змінних моделі.

Метою економетричного моделювання звичайно розглядається аналіз досліджуваного економічного об'єкта (процесу); прогноз його економічних показників, імітацію розвитку об'єкта при різних значеннях екзогенних змінних (відображаючи їхній випадковий характер, зміну в часі), вироблення управлінських рішень.

При виборі економічних змінних необхідно теоретичне обгрунтування кожної змінної (при цьому рекомендується, щоб число їх було не дуже великим і, як мінімум, у кілька разів менше числа спостережень). Пояснюючі змінні не повинні бути пов'язані функціональною або тісною кореляційною залежністю, тому що це може призвести до неможливості оцінки параметрів моделі або до одержання нестійких (немаючих реального змісту) оцінок.

Відзначимо, що для відбору змінних можуть бути використані різні методи, зокрема процедури *покрокового відбору змінних*. А для оцінки впливу якісних ознак (наприклад, стать, освіта і т.ін.) можуть бути використані *фіктивні змінні*. Але в кожному разі при включенні в модель певних змінних основою є економічний (якісний) аналіз досліджуваного об'єкта.

2-й етап (апріорний). Проводиться аналіз сутності досліджуваного об'єкта, формування і формалізація апріорної (відомої до початку моделювання) інформації.

3-й етап (параметризація). Здійснюється безпосередньо моделювання, тобто вибір загального виду моделі, виявлення вхідних зв'язків.

Основне завдання, розв'язуване на цьому етапі, – вибір виду функції *f(X)* в економетричній моделі (1.1), зокрема, можливість використання лінійної моделі як найбільш простої і надійної. Досить важливою проблемою на цьому (і попередніх) етапі економетричного моделювання є проблема *специфікації моделі*, зокрема: вираз в математичній формі виявлених зв'язків і співвідношень; встановлення складу екзогенних і ендогенних змінних, у тому числі лагових; формулювання вихідних передумов і обмежень моделі. Від того, наскільки вдало вирішена проблема специфікації моделі, у значній мірі залежить успіх усього економетричного моделювання.

4-й етап (інформаційний). Здійснюється збір необхідної статистичної інформації – спостережуваних значень економічних змінних:

$$(x_{i1},x_{i2}, x_{ip}; y_{i1}\ y_{i2},\ldots,y_{ip}),\ i=1,\ldots,n. \qquad (1.15)$$

Тут можуть бути спостереження, отримані як за участю дослідника, так і без його участі (в умовах активного або пасивного експерименту).

5-й етап (ідентифікація моделі). Здійснюється статистичний аналіз моделі і оцінка її параметрів.

6-й етап (верифікація моделі). Проводиться перевірка істинності, адекватності моделі. З'ясовується, наскільки вдало вирішені проблеми специфікації і ідентифікації моделі, яка точність розрахунків по даній моделі, в остаточному підсумку, наскільки відповідає побудована модель реальному економічному об'єкту або процесу.

Варто помітити, що якщо є статистичні дані, що характеризують економічний об'єкт моделювання у даний і попередні моменти часу, то для верифікації моделі, побудованої для прогнозу, досить порівняти реальні значення змінних у наступні моменти часу з відповідними їхніми значеннями, отриманими на основі розглянутої моделі за даними попередніх моментів.

Наведене вище розділення економетричного моделювання на окремі етапи носить певною мірою умовний характер, тому що ці етапи можуть перетинатися, взаємно доповнювати один одного і т.ін.

Розділ 2. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики

2.1. Випадкові величини і їх числові характеристики

Імовірністю P(A) події *A* називається чисельна міра ступеня об'єктивної можливості появи певної події.

Відповідно до класичного визначення *ймовірність події A* дорівнює відношенню позитивного числа випадків *m*, до загального числа випадків *n*, тобто $P(A)=m/n$. За певних умов як оцінка ймовірності події *P(A)* може бути використана *статистична ймовірність* $P^*(A)$, тобто відносна частота *W(A)* появи події *A* в n зроблених випробуваннях.

Одним з найважливіших понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини.

Під *випадковою величиною* розуміється змінна, яка в результаті випробування залежно від випадку приймає одне значення з можливої множини своїх значень (яке саме – заздалегідь не відомо).

Більш строго *випадкова величина X* визначається як функція, задана на множині елементарних результатів (або в просторі елементарних подій), тобто:

$$X = f(\omega), \tag{2.1}$$

де ω – елементарний результат (або елементарна подія, що належить простору Ω, тобто $\omega \in \Omega$.

Для дискретної випадкової величини множина можливих значень випадкової величини, тобто функції *f(ω)* – скінченно, для безперервної - нескінченно і незліченно. Приклади випадкових величин:

X – число народжених дітей протягом доби в місті Вінниці;

Y – число зроблених пострілів до першого влучення;

Z – дальність польоту артилерійського снаряда.

Тут *X*, *Y* – дискретні випадкові величини, а Z – безперервна випадкова величина.

Найбільш повним, вичерпним описом випадкової величини є її закон розподілу.

Законом розподілу випадкової величини називається всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм імовірностями.

Для дискретної випадкової величини закон розподіли може бути заданий у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) і графічно.

Наприклад:

X:

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

або

$$X = \begin{pmatrix} x_1\ x_2 \ldots x_n \\ p_1\ p_2 \ldots p_n \end{pmatrix}$$

Така таблиця називається *рядом розподілу* дискретної випадкової величини.

Для будь-якої дискретної випадкової величини:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (2.2)$$

Якщо по осі абсцис відкладати значення випадкової величини, по осі ординат – відповідні їхні ймовірності, то одержувана (з'єднанням точок) ламана називається багатокутником або полігоном розподілу ймовірностей.

Задача 1. У лотереї розігрується: автомобіль вартістю 5000 ум. гр. од., 4 телевізори вартістю 250 ум. гр. од., 5 відеомагнітофонів вартістю 200 ум. гр. од. Усього продається 1000 квитків по 7 ум. гр. од. Скласти закон розподілу чистого виграшу, отриманого учасником лотереї, що купили один квиток.

Рішення: Можливі значення випадкової величини X – чистого виграшу на один квиток – рівні 0-7=-7 ум. гр. од. (якщо квиток не виграв), 200-7=193, 250-7=243, 5000-7=4993 ум. гр. од. (якщо на квиток випав виграш – відеомагнітофон, телевізор або автомобіль відповідно). З огляду на, що з 1000 квитків число що не виграли становить 990, а указаних виграшів 5, 4 і 1 відповідно; використовуючи класичне визначення ймовірності, одержимо:

$P(X=-7) = 990/1000 = 0{,}990$; $P(X=193) = 5/1000=0{,}005$;

$P(X=243) = 4/1000 = 0{,}004$; $P(X=4993)=1/1000=0{,}001$,

тобто ряд розподілу

X:

xi	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

Дві випадкові величини називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не змінюється від того, які можливі значення прийняла інша величина.

Закон (ряд) розподілу дискретної випадкової величини надає вичерпну інформацію про неї, тому що дозволяє обчислити ймовірності будь-яких подій, пов'язаних з випадковою величиною. Однак такий закон (ряд) розподілу буває важко доступним для огляду, не завжди зручним (і навіть необхідним) для аналізу.

Тому для опису випадкових величин часто використовуються їхні *числові характеристики* – числа, у стислій формі виражають найбільш істотні риси розподілу випадкової величини. Найбільш важливими з них є математичне очікування, дисперсія, середнє квадратичне відхилення і інші. Звертаємо увагу на те, що в силу визначення, числові характеристики випадкових величин є числами невипадковими, визначеними.

Математичним очікуванням, або *середнім значенням*, *M(X)* дискретної випадкової величини *X* називається сума добутків всіх її значень на відповідні їм імовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\,. \tag{2.3}$$

(Для математичного очікування використовуються також позначення: $E(X), \overline{X}$).

Задача 2. Обчислити *M(X)* для випадкової величини *X* – чистого виграшу за даними задачі 1.

Рішення: По формулі (2.3)

$M(X) = (-7)\cdot 0{,}990 + 193\cdot 0{,}005 + 243\cdot 0{,}004 + 4993\cdot 0{,}001 = 0$,
тобто середній виграш дорівнює нулю. Отриманий результат означає, що весь виторг від продажу квитка лотереї йде на виграші.

При $n\to\infty$ математичне очікування представляє суму ряду $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, якщо він абсолютно сходиться.

Властивості математичного очікування:

1) $M(C) = C$, де C – постійна величина;
2) $M(kX) = kM(X)$;
3) $M(X\pm\ ) = M(X) \pm M(Y)$;
4) $M(XY) = M(X)\cdot M(Y)$, де X, Y – незалежні випадкові величини;
5) $M(X\pm C) = M(X)\pm C$;

6) *M(X-a) = 0*, де *a = M(X)*.

Дисперсією D(X) випадкової величини *X* називається математичне очікування квадрата її відхилення від математичного очікування:

$$D(X) = M[X-M(X)]^2,$$

$$\textit{або } D(X) = M(X-a)^2, \text{ де } a = M(X). \tag{2.4}$$

(Для дисперсії випадкової величини *X* використовують також позначення *Var(X)*).

Дисперсія характеризує *відхилення* (розкид, розсіювання, варіацію) значень випадкової величини щодо середнього значення.

Якщо випадкова величина *X* – дискретна з кінцевим числом значень, то:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \cdot p_i \tag{2.5}$$

Дисперсія *D(X)* має розмірність квадрата випадкової величини, що не завжди зручно. Тому як показник розсіювання використовують також величину $\sqrt{D(X)}$.

Середнім квадратичним відхиленням (*стандартним відхиленням* або *стандартом*) σ_x випадкової величини *X* називається арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} \tag{2.6}$$

Задача 3. Обчислити дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X* по даним задачі 2.

Рішення: У задачі 2 було обчислено *M(X) = 0*. За формулою (2.5) і (2.6): $D(X) = (-7-0)^2 \cdot 0{,}990+(193-0)^2 \cdot 0{,}005+(243-0)^2 \cdot 0{,}004+(4993-0)^2 \cdot 0{,}001=$ $=25401$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{25401} = 159{,}38$ (ум. гр. од.).

Властивості дисперсії випадкової величини:

1) *D(C) = 0*, де *C* – постійна величина;
2) $D(kX) = k^2 D(X)$;
3) $D(X) = M(X^2) - a^2$, де *a = M(X)*;
4) *D(X+Y)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)*, де *X* і *Y* – незалежні випадкові величини.

Задача 4. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини *Z=8X-5Y+7*, якщо дані *M(X)=3*, *M(Y)=2*, *D(X)=1,5* і *D(Y)=1* і відомо, що *X* і *Y* – незалежні випадкові величини.

Рішення: Використовуючи властивості математичного очікування і дисперсії, обчислимо:

$M(Z)=8M(X)-5M(Y)+7=8\cdot 3-5\cdot 2+7 = 21;$

$D(Z) = 8^2D(X)+5^2D(Y)+0 = 8^2\cdot 1{,}5+5^2\cdot 1=121.$

2.2. Функції розподілу випадкової величини

Функцією розподілу випадкової величини *X* називається функція *F(x)*, що виражає для кожного *x* імовірність того, що випадкова величина *X* прийме значення, менше *x*:

$$F(x)=P(X<x). \qquad (2.7)$$

Задача 5. Даний ряд розподілу випадкової величини:

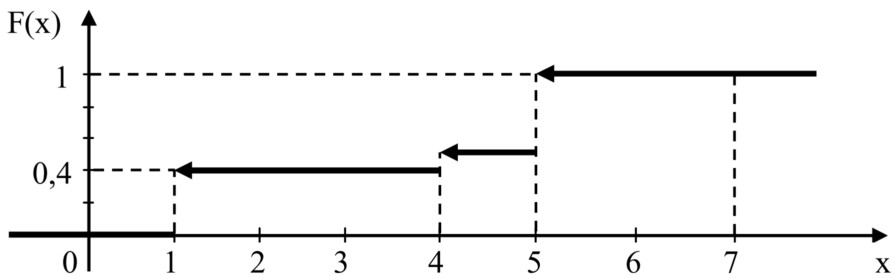
X:

xi	1	4	5
p_i	0,4	0,1	0,5

Знайти і зобразити графічно її функцію розподілу.

Рішення: Відповідно до визначення: *F(x)*=0 при *x*≤1; *F(x)*=0,4 при 1<*x*<4; *F(x)*=0,4+0,1=0,5 при 4<*x*≤5; *F(x)*=0,5+0,5=1 при *x*>5. Отже (див. рисунок):

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x \le 1; \\ 0{,}4 & \text{якщо} \quad 1 < x \le 4; \\ 0{,}5 & \text{якщо} \quad 4 < x \le 5; \\ 1 & \text{якщо} \quad x > 5. \end{cases}$$



Властивості функції розподілу:

1) Функція розподілу випадкової величини є ненегативна функція, яка знаходиться між нулем і одиницею: 0≤*F(x)*≤1.

2) Функція розподілу випадкової величини є неубутна функція на всій числовій осі, тобто при $x_2 \geq x_1$: $F(x_2) \geq F(x_1)$.
3) На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, на плюс нескінченності – дорівнює одиниці, тобто:
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$
4) Імовірність влучення випадкової величини X в інтервал $[x_1,x_2)$ (включаючи x_1) дорівнює приросту її функції розподілу на цьому інтервалі, тобто:
$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)\ . \tag{2.8}$$

Приклад 1. Функція розподілу випадкової величини X має вид:
$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x \leq 1; \\ \dfrac{x}{2} & \text{якщо} \quad 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$$
Знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення в інтервалі $[1;3)$.

За формулою (2.8): $P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Випадкова величина X називається *безперервною*, якщо її функція розподілу безперервна в будь-якій точці і диференційовна всюди, крім, бути може, окремих точок.

Для безперервної випадкової величини X імовірність будь-якого окремо взятого значення дорівнює нулю, тобто $P(X=x_1)=0$, а ймовірність влучення X в інтервал (x_1,x_2) не залежить від того, чи є цей інтервал відкритим або закритим (тобто, наприклад, $P(x_1<X<x_2)=P(x_1 \leq X \leq x_2)$).

Щільністю ймовірності (*щільністю розподілу* або просто *щільністю*) $\varphi(x)$ безперервної випадкової величини X називається похідна її функції розподілу:
$$\varphi(x) = F'(x). \tag{2.9}$$

Щільність імовірності $\varphi(x)$, як і функція розподілу $F(x)$, є однією з форм закону розподілу, але на відміну від функції розподілу вона існує тільки для безперервних випадкових величин.

Графік щільності ймовірності називається *кривою розподілу*.

Приклад 2. За даними прикладу 1 знайти щільність імовірності випадкової величини X.

Щільність імовірності $\varphi(x) = F'(x)$ тобто:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x \le 0 \ \text{ і } \ x > 2; \\ \dfrac{1}{2} & \text{якщо} \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Властивості щільності ймовірності безперервної випадкової величини:

1) Щільність імовірності – ненегативна функція, тобто $\varphi(x) \ge 0$.
2) Імовірність влучення безперервної випадкової величини в інтервал [a,b] дорівнює певному інтегралу від її щільності ймовірності в межах від a до b (див. рисунок 2.1), тобто:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{2.10}$$

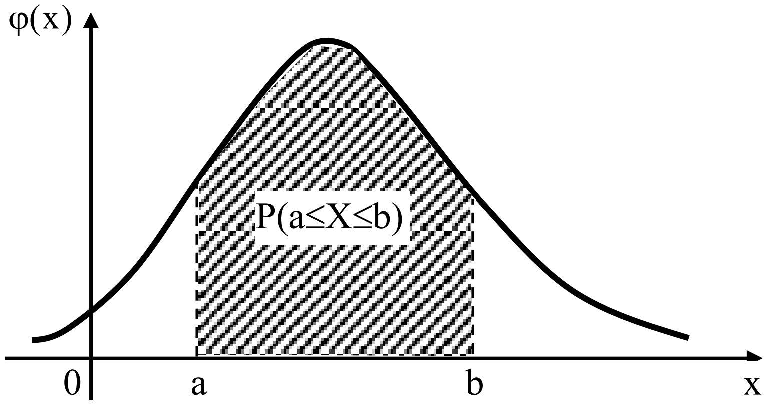


Рисунок 2.1 – Властивості щільності ймовірності

3) Функція розподілу безперервної випадкової величини (див. рисунок 2.2) може бути виражена через щільність імовірності по формулі:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx. \tag{2.11}$$

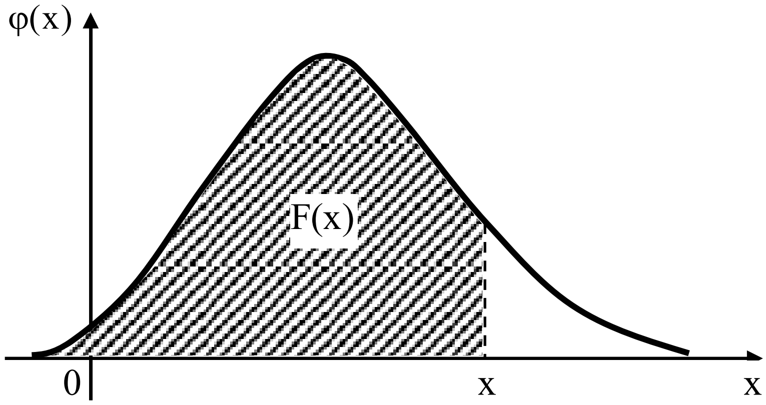


Рисунок 2.2 – Властивості щільності ймовірності

4) Невласний інтеграл у нескінченних межах від щільності ймовірності безперервної випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \qquad (2.12)$$

Геометрично властивості *1* і *4* щільності ймовірності означають, що її графік – *крива розподілу* – лежить не нижче осі абсцис, і повна площа фігури, обмеженої кривої розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

Для безперервної випадкової величини *X* математичне очікування *M(X)* і дисперсія *D(X)* визначаються по формулах:

$$a = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx \qquad (2.13)$$

(якщо інтеграл абсолютно сходиться);

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \varphi(x)dx\,, \qquad (2.14)$$

або $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)dx - a^2$ (якщо наведені інтеграли сходяться).

Поряд з відзначеними вище числовими характеристиками для опису випадкової величини використовуються поняття квантилів і процентних точок.

Квантилем рівня q (або *q-квантилем*) називається таке значення x_q випадкової величини, при якому функція її розподілу приймає значення, рівне q, тобто:

$$F(x_q) = P(X < x_q) = q. \qquad (2.15)$$

100 відсотковой q%-точкой називається квантиль x_{1-q}.

Приклад 3. За даними приклада 1 знайти квантиль $x_{0,3}$ і 30%-ну точку випадкової величини *X*.

По визначенню (2.15) $F(x_{0,3})=0,3$, тобто $x_{0,3}/2=0,3$, звідки квантель $x_{0,3}=0,6$. 30%-на точка випадкової величини *X*, або квантиль $x_{1-0,3}=x_{0,7}$, визначається аналогічно з рівняння $x_{0,7}/2=0,7$, звідки $x_{0,7}=1,4$.

Серед числових характеристик випадкової величини виділяють початкові v_k і центральні μ_k моменти *k*-го порядку, які визначаються для дискретних і безперервних випадкових величин за формулами:

$$v_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i; \tag{2.16}$$

$$v_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)dx; \tag{2.17}$$

$$\mu_k=\sum_{-\infty}^{+\infty} (x_i - a)^k p_i; \tag{2.18}$$

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^k \varphi(x)dx. \tag{2.19}$$

Розглянемо найбільше часто використовувані в економетриці розподіли випадкових величин.

1. Дискретна випадкова величина *X* має біноміальний закон розподілу, якщо вона приймає значення 0,1,2,...,*m*,...,*n* з імовірностями:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{2.20}$$

де $0<p<1$, $q=1-p$, $m=0,1,...,n$.

Біноміальний закон розподілу являє собою закон розподілу числа $X=m$ настань події *A* в *n* незалежних випробуваннях, у кожному з яких воно може відбутися з одною і тою ж ймовірністю *p*.

Формула (2.20) називається *формулою Бернуллі*.

Числові характеристики: $M(X)=np$, $D(X)=npq$.

Зокрема, для події $W=m/n$ у *n* незалежних випробуваннях (де $X=m$ має біноміальний закон розподілу з параметром *p*) числові характеристики:

$$M(W)=p,\ D(W)=(pq)/n. \tag{2.21}$$

2. Дискретна випадкова величина *X* має *закон розподілу Пуассона*, якщо вона приймає значення 0,1,2,...,*m*,... (нескінченну, але рахункову множину значень) з імовірностями:

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \tag{2.22}$$

де m= 0,1, 2,... .

Числові характеристики: $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

3. Безперервна випадкова величина X має рівномірний закон розподілу на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність імовірності постійна на цьому відрізку і дорівнює нулю поза ним, тобто:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{якщо} \quad a \le x \le b; \\ 0 \quad \text{якщо} & x < a, x > b. \end{cases} \tag{2.23}$$

Числові характеристики:

$M(X) =(a+b)/2; D(X)=(b-a)^2/12$.

4. Безперервна випадкова величина X має *експонентний закон* розподілу з параметром λ, якщо її щільність імовірності має вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{якщо} \quad x \ge 0; \\ 0 \quad \text{якщо} & x < 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Числові характеристики: $M(X)=1/\lambda$, $D(X)=1/\lambda^2$.

5. Безперервна випадкова величина X має *нормальний закон розподілу* (*закон Гауса*) з параметрами a і σ^2 , якщо її щільність імовірності має вид:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.25}$$

Криву нормального закону розподілу називають нормальною або гаусовою кривою (див. рисунок 2.3).

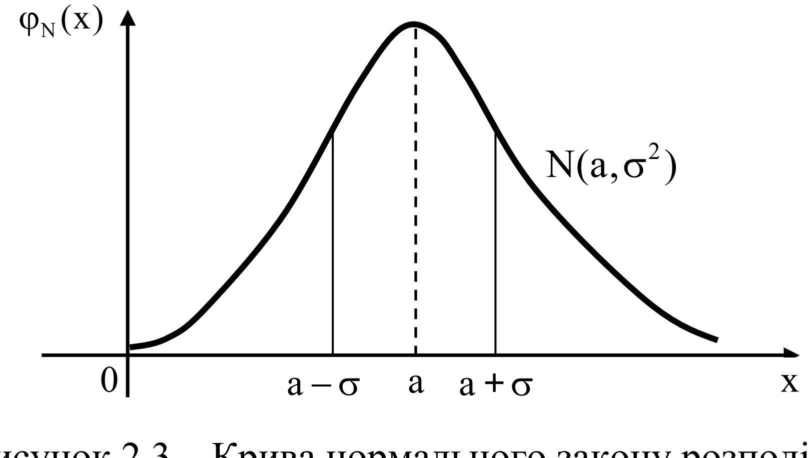


Рисунок 2.3 – Крива нормального закону розподілу

Числові характеристики: $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$.

При зміні тільки параметра a нормальна крива переміщається уздовж осі $0x$, при зміні тільки параметра σ^2 змінюється форма нормальної кривої.

Нормальний закон розподілу з параметрами $a=0$, $\sigma^2=1$, тобто N(0;1), називається *стандартним* або *нормованим*.

Функція розподілу випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, виражається через функцію Лапласа $\Phi(x)$ за формулою:

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{2.26}$$

де $\Phi(x)=2/\sqrt{2\pi}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$ – *функція (інтеграл імовірностей) Лапласа*, рівна площі під стандартною нормальною кривою N(0;1) на відрізку $[-x, x]$.

Властивості випадкової величини, розподіленої за нормальним законом:

1) Імовірність влучення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, в інтервал $[x_1, x_2]$, дорівнює:

$$P(x_1 \le X \le x_2)=1/2\ [\Phi(t_2)-\Phi(t_1)], \tag{2.27}$$

де $t_1=(x_1-a)/\sigma$, $t_2=(x_2-a)/\sigma$.

2) Імовірність того, що відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, від математичного очікування a не перевищить величину $\Delta > 0$ (по абсолютній величині), дорівнює:

$$P(|X-a| \le \Delta) = \Phi(t), \tag{2.28}$$

де $t = \Delta/\sigma$.

Із другої властивості випливає, зокрема, *правило трьох сигм*: Якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами a і σ^2, тобто $N(a;\sigma^2)$, то практично вірогідно, що її значення знаходяться в інтервалі $(a-3_\sigma, a+3_\sigma)$.

3) Безперервна випадкова величина X має *логарифмічно нормальний розподіл*, якщо її логарифм підпорядкований нормальному закону.

4) *Розподілом* χ^2 (хі-квадрат) з k ступенями свободи називається розподіл суми квадратів k незалежних випадкових величин, розподілених по стандартному нормальному закону, тобто:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2, \tag{2.29}$$

де Z_i (i=1,2,...,k) має нормальний розподіл $N(0;1)$.

При k>30 розподіл випадкової величини $Z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2k-1}$ близько до стандартного нормального закону, тобто $N(0;1)$.

5) *Розподілом Стьюдента* (або t-розподілом) називається розподіл випадкової величини:

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}}, \tag{2.30}$$

де Z – випадкова величина, розподілена по стандартному нормальному закону, тобто $N(0;1)$; χ^2 – незалежна від Z випадкова величина, що має χ^2-розподіл з k ступенями свободи.

При $k \to +\infty$ – розподіл наближається до нормального. Практично вже при $k > 30$ можна вважати t-розподіл приблизно нормальним.

6) *Розподілом Фішера-Снедекора* (або *F-розподілом*) називається розподіл випадкової величини:

$$F = \frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)}, \tag{2.31}$$

де $x_2(k_1)$ і $\chi^2(k_2)$ – випадкові величини, що мають χ^2 розподіл відповідно з k_1 і k_2 ступенями свободи.

2.3. Багатомірні випадкові величини, умовні закони розподілу, закон великих чисел, граничні теореми

Упорядкований набір $X=(X_1, X_2,..., X_n)$ випадкових величин називається *багатомірною (n-мірною) випадковою величиною* (або системою випадкових величин, *n*-мірним вектором).

Функцією розподілу n-мірної випадкової величини $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ називається функція $F(x_1,x_2,..., x_n)$, що виражає ймовірність спільного виконання *n* нерівностей $X_1<x_1$, $X_2<x_2$,..., $X_n<x_n$ тобто:

$$F(x_1, x_2, ,.. ,x_n) = P(X_1 <x_1, X_2 < x_2 ,..., X_n<x_n). \tag{2.32}$$

У двовимірному випадку (надалі для простоти виклад ведемо в основному для двовимірної (n=2) випадкові величини, при цьому практично всі поняття і твердження можуть бути перенесені на випадок n>2) для випадкової величини (X,Y) функція розподілу $F(x,y)$ визначиться рівністю:

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y). \tag{2.33}$$

Властивості функції розподілу $F(x,y)$, аналогічні властивостям одномірної випадкової величини:

1) $0\le F(x,y)\le 1$;
2) при $x_2>x_1$ $F(x_2,y)\ge F(x_1,y)$; при $y_2>y_1$ $F(x,y_2)\ge F(x,y_1)$;
3) $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0$;
4) $F(x,+\infty)=F_1(x)$, $F(+\infty,y)=F_2(y)$, де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ – функції розподілу випадкових величин X і Y;
5) $F(+\infty,+\infty)=1$.

Щільністю ймовірності (щільністю розподілу або спільною щільністю) безперервної двовимірної випадкової величини (X,Y) називається друга змішана частинна похідна її функції розподілу, тобто:

$$\varphi(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''xy(x,y). \tag{2.34}$$

Властивості щільності ймовірності двовимірної випадкової величини $\varphi(x,y)$ аналогічні властивостям щільності ймовірності одномірної випадкової величини:

1) $\varphi(x,y)\ge 0$;

2) $P[(X,Y)\in D]=\iint\limits_{D}\varphi(x,y)dxdy$;

3) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dxdy=1$.

Умовним законом розподілу однієї з одномірної складової двовимірної випадкової величини *(X,Y)* називається її закон розподілу, обчислений за умови, що інша складова прийняла певне значення (або потрапила в якийсь інтервал).

Умовні щільності ймовірності $\varphi_y(x)$ і $\varphi_x(y)$ двовимірної випадкової величини *(X,Y)* визначаються за формулами:

$$\varphi_y(x)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_2(y)},\ \varphi_x(y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_1(y)}\ \text{або}$$

$$\varphi_y(x)=\frac{\varphi(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx},\ \varphi_x(y)=\frac{\varphi(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dx}. \qquad (2.35)$$

Умовні щільності $\varphi_y(x)$ і $\varphi_x(y)$ мають всі властивості «безумовної» щільності, розглянутої в п. 2.2.

Числові характеристики умовних розподілів: умовні математичні очікування $M_x(Y)$ і $M_y(X)$ і умовні дисперсії $D_x(Y)$ і $D_y(X)$. Ці характеристики знаходяться по звичайних формулах математичного очікування і дисперсії, у яких замість імовірностей подій або щільностей імовірності використовуються умовні ймовірності або умовні щільності ймовірності.

Умовне математичне очікування випадкової величини Y при $X=x$, тобто $M_x(Y)$, є функція від x, яка названа *функцією регресії* або просто *регресією Y* по *X*; аналогічно $M_y(X)$ називається *функцією регресії* або просто регресією *X* по *Y*. Графіки цих функцій називаються відповідно *лініями регресії* (або *кривими регресії*) *Y* по *X* і *X* по *Y*.

Властивості умовного математичного очікування:

1) Якщо $Z=g(X)$, де g – деяка невипадкова функція від X, то $M_z(M_x(Y))=M_z(Y)$ зокрема, $M(M_x(Y))=M(Y)$.
2) Якщо $Z=g(X)$, то $M_x(ZX)=ZM_x(Y)$.

3) Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $M_x(Y)=M(Y)$. Для незалежних випадкових величин: $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$ або $\varphi_y(x)=\varphi_1(x)$ і $\varphi_x(y)=\varphi_2(y)$, де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – щільності відповідних одномірних розподілів випадкових величин X і Y; $\varphi_y(x)$, $\varphi_x(y)$ – щільності їхніх умовних розподілів X по Y і Y по X.

Залежність між двома випадковими величинами називається *імовірнісною* (стохастичною або статистичною), якщо кожному значенню однієї з них відповідає певний (умовний) розподіл іншої.

Коваріацією (або кореляційним моментом) $Cov(X,Y)$ випадкових величин X і Y називається математичне очікування добутку відхилень цих величин від своїх математичних очікувань, тобто:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = M[(X - a_x)\cdot(Y - a_y)], \qquad (2.36)$$

де $a_x=M(X)$, $a_y=M(Y)$.

(Для коваріації випадкових величин X і $У$ використовуються також позначення K_{xy}, σ_{xy}).

Коваріація двох випадкових величин характеризує як *ступінь залежності* випадкових величин, так і їхнє розсіювання навколо точки (a_x,a_y). Коваріація – величина розмірна, що утрудняє її використання для оцінки ступеня залежності випадкових величин. Цих недоліків позбавлений коефіцієнт кореляції.

Коефіцієнтом кореляції двох випадкових величин називається відношення їх коваріації до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}. \qquad (2.37)$$

З визначення бачимо, що коефіцієнт кореляції – величина безрозмірна – характеризує тісноту лінійної залежності між випадковими величинами.

Властивості коваріації двох випадкових величин:

1) $Cov(X,Y)=0$, якщо X і Y незалежні;
2) $Cov(X,Y)=M(X,Y)-a_xa_y$;
3) $|Cov(X,Y)|\le\sigma_x\sigma_y$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) $-1\le\rho\le1$;

2) ρ=0, якщо випадкові величини X і Y незалежні;
3) якщо $|\rho|$=1, то між випадковими величинами X і Y існує лінійна функціональна залежність.

З незалежності двох випадкових величин слідує їх некорельованість, тобто рівність ρ=0. Однак некорельованість двох випадкових величин ще не означає їхню незалежність.

Під *законом великих чисел* у широкому змісті розуміється загальний принцип, відповідно до якого, по формулюванню академіка А.Н. Колмогорова, сукупна дія великої кількості випадкових факторів призводить (при деяких досить загальних умовах) до результату, що майже не залежить від випадку. Інакше кажучи, при великій кількості випадкових величин їхній середній результат перестає бути випадковим і може бути передвіщений з великим ступенем визначеності.

Теорема Чебишева. Якщо дисперсії n незалежних випадкових величин $X_1,X_2,...,X_n$ обмежені одною і тою ж постійною, то при необмеженому збільшенні числа n середня арифметична випадкових величин сходиться по ймовірності до середніх арифметичних їхніх математичних очікувань $a_1,a_2,...,a_n$, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)=1, \qquad (2.38)$$

$$\text{або} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Теорема Бернулі. Частість події в n повторних незалежних випробуваннях, у кожному з яких воно може відбутися з однією і тою ж ймовірністю p, при необмеженому збільшенні числа n сходиться по ймовірності до ймовірності p цієї події в окремому випробуванні, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1, \qquad (2.39)$$

Відповідно до теореми *Ляпунова* (наведена формулювання не є точною і дає лише поняття про теорему), якщо незалежні випадкові величини $X_1,X_2...X_n$ мають кінцеві математичні очікування і дисперсії, за своїм значенням жодна із цих випадкових величин різко не виділяється серед інших, то при $n \to \infty$ закон розподілу їхньої суми $\sum_{i=1}^{n} X_i$ необмежено наближається до нормального.

Також, якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ однаково розподілені, то закон розподілу їхньої суми $\sum_{i=1}^{n} X_i$, при $n \to \infty$ необмежено наближається до нормального.

2.4. Перевірка статистичних гіпотез

Статистичною гіпотезою називається будь-яке припущення про вид або параметр невідомого закону розподілу.

Гіпотезу, яку перевіряють, звичайно називають нульовою і позначають H_0. Поряд з нульовою гіпотезою H_0 розглядають *альтернативну*, або конкуруючу, гіпотезу H_1, яка є логічним запереченням H_0. Нульова і альтернативна гіпотези являють собою дві можливості вибору, здійснюваного в задачах перевірки статистичних гіпотез.

Зміст *перевірки (тестування) статистичної* гіпотези полягає в тому, що використовується спеціально складена вибіркова характеристика (статистика) $\tilde{\theta}_n$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отримана по вибірці $X_1, X_2, \ldots, X_n$, точний або наближений розподіл якої відомо. Потім по цьому вибірковому розподілу визначається критичне значення $\theta_{кр}$ – таке, що якщо гіпотеза H_0 вірна, то ймовірність $P(\tilde{\theta}_n > \theta_{кр})$ мала; так що відповідно до принципу практичної впевненості в умовах даного дослідження подію $\tilde{\theta}_n > \theta_{кр}$ можна (з деяким ризиком) уважати практично неможливою. Тому, якщо в даному конкретному випадку виявляється відхилення $\tilde{\theta}_n > \theta_{кр}$, то гіпотеза H_0 відкидається, у той час як поява значення $\tilde{\theta}_n \le \theta_{кр}$ вважається сумісним з гіпотезою H_0, яка тоді приймається (точніше, не відкидається). Правило, по якому гіпотеза H_0 відкидається або приймається, називається *статистичним критерієм* або *статистичним тестом*.

Тяким чином, множина можливих значень статистики критерію (критичної статистики) $\tilde{\theta}_n$ розбивається на дві непересічні підмножини: критичну область (область відхилення гіпотези) W і область припустимих значень (область прийняття гіпотези) $\overline{W}$. Якщо фактично спостережуване значення статистики критерію $\tilde{\theta}_n$ попадає в критичну область W, то гіпотезу H_0 відкидають. При цьому можливі чотири випадки:

Гіпотеза H_0	Приймається	Відкидається
Вірна	Правильне рішення	Помилка 1-го роду
Невірна	Помилка 2-го роду	Правильне рішення

Імовірність a припуститися помилки 1-го роду, тобто відкинути гіпотезу H_0, коли вона вірна, називається *рівнем значимості критерію*.

Імовірність припуститися помилки 2-го роду, тобто прийняти гіпотезу H_0, коли вона невірна, звичайно позначають β.

Імовірність (1-β) не припуститися помилки 2-го роду, тобто відкинути гіпотезу H_0, коли вона невірна, називається *потужністю* (або *функцією потужності*) *критерію*.

Імовірності помилок 1-го і 2-го роду (a і β) однозначно визначаються вибором критичної області. Очевидно, бажано зробити як завгодно малими a і β. Однак це суперечливі вимоги: при фіксованому обсязі вибірки можна зробити як завгодно малою лише одну з величин – a або β, що зв'язано з неминучим збільшенням іншої. Лише при збільшенні обсягу вибірки можливо одночасне зменшення ймовірностей a і β.

Критичну область W варто вибирати так, щоб імовірність влучення в неї статистики критерію $\tilde{\theta}_n$ була мінімальною і дорівнювала a, якщо вірна нульова гіпотеза H_0, і максимальною в протилежному випадку:

$$P\left(\bar{\theta}_n \in \frac{W}{H_0}\right) = \alpha, \quad P\left(\bar{\theta}_n \in \frac{W}{H_1}\right) = \max . \qquad (2.40)$$

Інакше кажучи, критична область повинна бути такою, щоб при заданому рівні значимості потужність критерію 1-β була максимальною. Задача побудови такої критичної області (або, як говорять, побудови найбільш потужного критерію) для простих гіпотез вирішується за допомогою теореми Неймана-Пірсона, що викладається в повних курсах математичної статистики.

Залежно від виду конкуруючої гіпотези H_1 вибирають правобічну, лівосторонню або двосторонню критичну область. Границі критичної області при заданому рівні значимості a визначаються відповідно зі співвідношень:

- для правобічної критичної області:

$$P(\tilde{\theta}_n > \theta_{кр}) = \alpha \qquad (2.41)$$

- для лівосторонньої критичної області:

$$P(\tilde{\theta}_n < \theta_{кр}) = \alpha \qquad (2.42)$$

- для двосторонньої критичної області:

$$P(\tilde{\theta}_n < \theta_{кр.1}) = P(\tilde{\theta}_n > \theta_{кр.2}) = \frac{\alpha}{2}. \qquad (2.43)$$

Слід зазначити, що в комп'ютерних економетричних пакетах звичайно не знаходяться границі критичної області $\theta_{кр}$, необхідні для порівняння їх з фактично спостережуваними значеннями вибіркових характеристик $\tilde{\theta}_{набл.}$ і ухвалення рішення про справедливість гіпотези H_0. А розраховуються точні значення рівня значимості (*p-valio*), виходячи зі співвідношення $P(\tilde{\theta}_n > \tilde{\theta}_{набл.}) = p$. Якщо ймовірність p дуже мала, то гіпотезу H_0 приймають (точніше, не відкидають).

Принцип перевірки (тестування) статистичної гіпотези не дає логічного доказу її вірності або невірності. Прийняття гіпотези H_0 варто розцінювати не як назавжди встановлений, абсолютно вірний факт, а лише як досить правдоподібне твердження.

Задачі до розділу 2

1. Є ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,07	0,27	0,43	0,19

Необхідно: а) знайти математичне очікування *M(X)*, дисперсію *D(X)* і середнє квадратичне відхилення σ випадкової величини *X*; б) визначити функцію розподілу *F(x)* і побудувати її графік.

2. Дана функція розподілу випадкової величини *X*:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x < 1; \\ 0{,}3 & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2; \\ 0{,}7 & \text{якщо} \quad 2 < x \le 3; \\ 1 & \text{якщо} \quad x > 3. \end{cases}$$

Знайти: а) ряд розподілу; б) математичне очікування *M(X)* і дисперсію *D(X)*; в) побудувати багатокутник розподілу і графік *F(x)*.

3. Випадкова величина *X*, зосереджена на інтервалі [-1;3], задана функцією розподілу *F(x)=¼ x+¼*. Знайти ймовірність влучення випадкової величини *X* в інтервал [0;2].
4. Випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(X)=\begin{cases}0 & \text{якщо} \quad x\le 0;\\ x^2 & \text{якщо} \quad 0<x\le 1;\\ 1 & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність імовірності *φ(x)*; б) математичне очікування *M(X)* і дисперсію *D(X)*; в) імовірності *P(X=0,5)*, *P(X<0,5)*, *P(0,5<X<1)*; д) побудувати графіки *φ(x)* і *F(x)* і показати на них математичне очікування *M(X)* і ймовірності, знайдені в пункті в) даного завдання; е) квантиль $x_{0,3}$ і 20%-ву точку розподілу *X*.

5. Дана функція:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{якщо} \quad x<0;\\ Cxe^{-x} & \text{якщо} \quad x\ge 0.\end{cases}$$

При якому значенні параметра *C* ця функція є щільністю розподілу деякої випадкової величини? Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини *X*.

6. Дані дві випадкові величини *X* і *Y*. Величина *X* розподілена за біноміальним законом з параметрами n=19, p=0,1; величина *Y* розподілена за законом Пуассона з параметром λ=2. Побудувати ряди розподілу випадкових величин *X* і *Y*. Знайти *M(X)*, *D(X)*; *M(Y)*, *D(Y)*; *P(X<2)*, *P(Y>1)*.

7. Є дві випадкові величини *X* і *Y*; величина *X* розподілена за рівномірним законом на відрізку [0;1]; величина *Y* розподілена за показовим законом з параметром λ =1/80. Визначити щільності ймовірності і функції розподілу випадкових величин *X* і *Y*. Знайти *P(X≥0,05)*, *P(Y≤100)*.

8. Випадкова величина *X* розподілена за нормальним законом з параметрами a=15, σ^2=0,04. Написати вирази щільності і функції розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірності *P(X≤15,3)*, *P(X≥15,4)*, *P(14,9≤X≤15,3)*, *P(X-15)≤0,3*; квантиль $x_{0,6}$, 30%-ву точку розподілу *X*. За допомогою правила трьох сигм визначити границі для значення випадкової величини *X*.

Розділ 3. Парний регресійний аналіз

У практиці економічних досліджень наявні дані не завжди можна вважати вибіркою з багатомірної нормальної сукупності, коли одна з розглянутих змінних не є випадковою або коли лінія регресії явно не пряма і т.ін. У цих випадках намагаються визначити криву, яка дає найкраще (у змісті методу найменших квадратів) наближення до вихідних даних. Відповідні методи наближення одержали назву регресійного аналізу. Завданнями регресійного аналізу є встановлення форми залежності між змінними, оцінка функції регресії, оцінка невідомих значень (прогноз значень) залежної змінної.

3.1. Функціональна, статистична і кореляційна залежності

У природничих науках часто мова йде про функціональну залежність (зв'язки), коли кожному значенню одної змінної відповідає цілком визначене значення іншої (наприклад, швидкість вільного падіння у вакуумі залежно від часу і т.ін.).

В економіці в більшості випадків між змінними величинами існують залежності, коли кожному значенню однієї змінної відповідає не якесь визначене, а множина можливих значень іншої змінної. Інакше кажучи, кожному значенню однієї змінної відповідає визначений (умовно) розподіл іншої змінної. Така залежність одержала назву статистичною (про неї згадувалося в п. 2.3).

Виникнення поняття статистичного зв'язку обумовлюється тим, що залежна змінна піддається впливу ряду неконтрольованих або неврахованих факторів, а також тим, що вимір значень змінних неминуче супроводжується деякими випадковими помилками. Прикладом статистичного зв'язку є залежність урожайності від кількості внесених добрив, продуктивності праці на підприємстві від його енергооснащеності і т.ін.

У силу неоднозначності статистичної залежності між Y і X для дослідника, зокрема, становить інтерес усереднена по X схема залежності, тобто закономірність у вимірі умовного математичного очікування $M_X(Y)$ або $M(Y/X=x)$ (математичного очікування випадкової змінної Y, обчисленої в припущенні, що змінна X прийняла значення x) у залежності від x.

Якщо залежність між двома змінними така, що кожному значенню одієї змінної відповідає визначене умовне математичне очікування (середнє значення) іншої, то така статистична залежність називається *кореляційною*.

Інакше, *кореляційною залежністю* між двома змінними називається функціональна залежність між значеннями однієї з них і умовним математичним очікуванням іншої.

Кореляційна залежність може бути представлена у вигляді:

$$M_x(Y) = \varphi(x) \text{ або } M_y(X) = \psi(y), \qquad (3.1)$$

де $\varphi(x) \neq \text{const}$, $\psi(y) \neq \text{const}$.

У регресійному аналізі розглядаються *однобічна залежність випадкової змінної* Y від однієї (або декількох) невипадкової незалежної змінної X. Така залежність може виникнути, наприклад, у випадку, коли при кожному фіксованому значенні X відповідні значення Y піддаються випадковому розкиду за рахунок дії ряду неконтрольованих факторів. Така залежність Y від X (іноді її називають *регресійною*) може бути також представлена у вигляді модельного рівняння регресії Y по X (формула 3.1). При цьому залежну змінну Y називають також функцією відгуку, вихідною, результуючою, ендогенною змінною, результативною ознакою, а незалежну змінну X – пояснюючою, вхідною, екзогенною змінною, фактором, регресором, факторною ознакою.

Рівняння (3.1) називається *модельним рівнянням регресії* (або просто рівнянням регресії), а функція *$\varphi(x)$ – модельною функцією регресії* (або просто функцією регресії), а її графік – *модельною лінією регресії* (або просто лінією регресії).

Для точного опису рівняння регресії необхідно знати умовний закон розподілу залежної змінної Y за умови, що змінна X прийме значення x, тобто $X=x$. У статистичній практиці таку інформацію одержати, як правило, не вдається, тому що звичайно дослідник має лише вибіркові пари значень (x_i, y_i) обмеженого обсягу n. У цьому випадку мова може йти про оцінку (апроксимації) по вибірці функції регресії. Такою оцінкою є *вибіркова лінія (крива) регресії*:

$$\hat{y} = \varphi(x, b_0, b_1, \ldots, b_p) \qquad (3.2)$$

де $\hat{y}$ – умовна (групова) середня змінної y при фіксованому значенні змінної $X=x$; $b_0, b_1, \ldots, b_p$ – параметри кривої.

Рівняння (3.2) називається *вибірковим рівнянням регресії*.

При правильно визначеній апроксимуючій функції $\varphi(x,b_0,b_1,\ldots,b_p)$ з збільшенням обсягу вибірки $(n\rightarrow\infty)$ вона буде сходитися по ймовірності до функції регресії $\varphi(x)$.

3.2. Лінійна парна регресія

Розглянемо як приклад залежність між змінним видобутком вугілля на одного робітника *Y(т)* і потужністю пласту *X(м)* по наступним (умовним) даним, що характеризують процес видобутку вугілля в $n=10$ шахтах (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
y_i	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Зобразимо отриману залежність графічно точками координатної площини (див. рисунок 3.1). Таке зображення статистичної залежності називається *полем кореляції*.

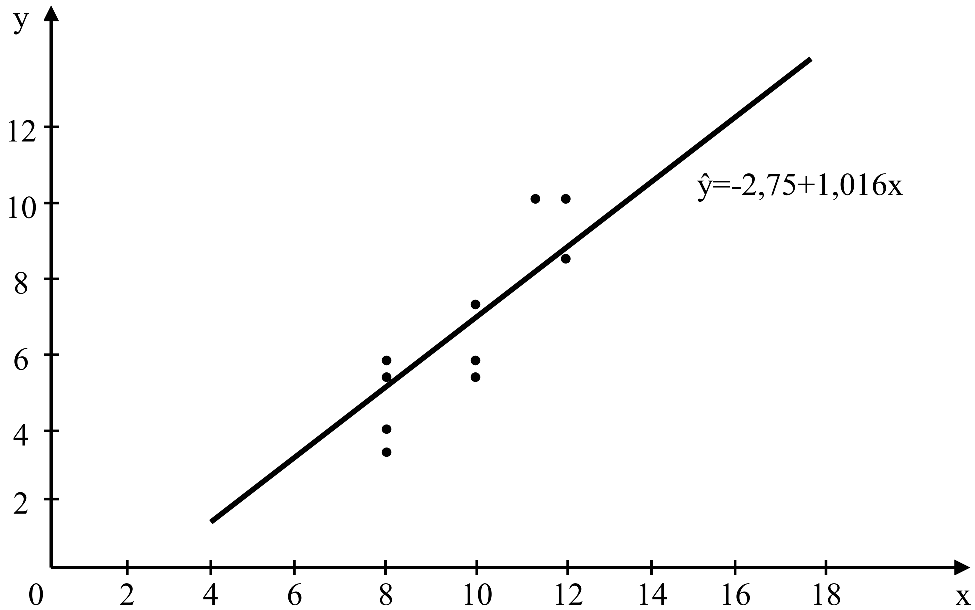


Рисунок 3.1 – Графічне зображення поля кореляції

По розташуванню емпіричних точок можна припускати наявність лінійної кореляційної (регресійної) залежності між змінними *X* і *Y*.

Тому рівняння регресії (3.2) будемо шукати у вигляді лінійного рівняння:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \qquad (3.3)$$

Розглянемо формули розрахунку невідомих параметрів рівняння лінійної регресії.

Відповідно до *методу найменших квадратів* невідомі параметри b_0 і b_1 вибираються таким чином, щоб сума квадратів відхилень емпіричних значень y_i від значень $\hat{y}_i$, знайдених за рівнянням регресії (3.3), була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (b_0 + b_1 x_i - y_i)^2 \to \min. \qquad (3.4)$$

Слід зазначити, що для оцінки параметрів b_0 і b_1 можливі і інші підходи. Так, наприклад, відповідно до методу найменших модулів варто мінімізувати суму абсолютних величин відхилень $\sum_{i=1}^{n} |\hat{y}_i - y_i|$. Однак метод найменших квадратів істотно простіше при проведенні обчислювальної процедури і дає, як ми побачимо далі, хороші по статистичних властивостях оцінки. Цим і пояснюється його широке застосування в статистичному аналізі.

На підставі необхідної умови екстремуму функції двох змінних $S=S(b_0,b_1)$ (3.4) дорівнюємо до нуля її часні похідні, тобто:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (b_0 + b_1 x_1 - y_i) = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (b_0 + b_1 x_1 - y_i) x_i = 0, \end{cases} \qquad (3.5)$$

звідки після перетворень одержимо *систему нормальних рівнянь* для визначення параметрів лінійної регресії:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Тепер, розділивши обидві частини рівнянь (3.6) на *n*, одержимо систему нормальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} b_0 + b_1\overline{x} = \overline{y}; \\ b_0\overline{x} + b_1\overline{x}^2 = \overline{xy}, \end{cases} \tag{3.7}$$

де відповідні середні визначаються по формулах:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \tag{3.8}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; \tag{3.9}$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}; \tag{3.10}$$

$$\overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}. \tag{3.11}$$

Підставляючи значення:

$$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x} \tag{3.12}$$

з першого рівняння системи (3.7) у рівняння регресії (3.3), одержимо:

$$\hat{y} = \overline{y} - b_1\overline{x} + b_1 x, \text{ або}$$

$$\hat{y} - \overline{y} = b_1(x - \overline{x}) \tag{3.13}$$

Коефіцієнт b_1 називається *вибірковим коефіцієнтом регресії* (або просто *коефіцієнтом регресії*) *Y* по *X*.

Коефіцієнт регресії *Y* по *X* показує, на скільки одиниць у середньому змінюється змінна *Y* при збільшенні змінної *X* на одну одиницю.

Вирішуючи систему (3.7), знайдемо:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\hat{Cov}(X,Y)}{s_x^2}\ , \tag{3.14}$$

де s_X^2 – вибіркова дисперсія змінної *X*:

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\overline{x})^2, \tag{3.15}$$

Côv(X,Y) – вибірковий кореляційний момент або вибіркова коваріація:

$$\hat{Cov}(X,Y) = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}. \tag{3.16}$$

Відзначимо, що з отриманого рівняння регресії (3.13) слідує, що лінія регресії проходить через точку $(\overline{x}, \overline{y})$, тобто $\overline{y} = b_0 + b_1\overline{x}$.

Задача 1. За даними таблиці 3.1 знайти рівняння регресії *Y* по *X*.

Рішення: Обчислимо всі необхідні суми:

$\sum_{i=1}^{10} x_i = 8+11+12+9+8+8+9+9+8+12 = 94;$

$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 8^2+11^2+12^2+9^2+8^2+8^2+9^2+9^2+8^2+12^2 = 908;$

$\sum_{i=1}^{10} y_i = 5+10+10+7+5+6+6+5+6+8 = 68;$

$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 8\cdot5+11\cdot10+12\cdot10+9\cdot7+8\cdot5+8\cdot6+9\cdot6+9\cdot5+8\cdot6+12\cdot8 = 664.$

Потім по формулах (3.8)-(3.16) знаходимо вибіркові характеристики і параметри рівнянь регресії:

$\overline{x} = 94/10 = 9{,}4$ (м); $\overline{y} = 68/10 = 6{,}8$ (т); $s_x^2 = 908/10 - 9{,}4^2 = 2{,}44$;

$\hat{Cov}(X,Y) = 664/10 - 9{,}4\cdot6{,}8 = 2{,}48$; $b_1 = 2{,}48/2{,}44 = 1{,}016$.

Отже, рівняння регресії *Y* по *X*:

$\hat{y} - 6{,}8 = 1{,}016(x - 9{,}4)$ або $\hat{y} = 2{,}75 + 1{,}016x$.

З отриманого рівняння регресії (див. рисунок 3.1) слідує, що при збільшенні потужності пласту *X* на 1 м. видобуток вугілля на одного робітника *Y* збільшується в середньому на 1,016 т. (в ум.од.) (відзначимо, що вільний член у даному рівнянні регресії не має реального змісту).

Зауваження. Значення змінних x_i, і y_i можуть бути вимірювані у відхиленнях від середніх значень, тобто як $x_i^{'} = x_i - \overline{x}$, $y_i^{'} = y_i - \overline{y}$. Початок координат при цьому переміститься у точку $(\overline{x}, \overline{y})$, а лінією регресії буде та ж пряма на площині, що і для початкових даних x_i, y_i. Отже $\overline{x'} = 0$, $\overline{y'} = 0$, і рівняння регресії (3.13) у відхиленнях прийме вид $\hat{y}' = b_1 x'$, а формула (3.14) того ж коефіцієнта регресії b_1 спроститься (враховуючи, що $\overline{x'y'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x'y'}{n}$, $\overline{x'^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x'^2}{n}$):

$$b_1 = \frac{\overline{x'y'}}{\overline{x'^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x'y'}{\sum_{i=1}^{n} x'^2}. \qquad (3.17)$$

3.3. Коефіцієнт кореляції

Перейдемо до оцінки тісноти кореляційної залежності. Розглянемо найбільш важливий для практики і теорії випадок лінійної залежності виду (3.13).

На перший погляд, вимірником тісноти зв'язку *Y* від *X* є коефіцієнт регресії b_1, тому що, як уже було відзначено, він показує, на скільки одиниць у середньому змінюється *Y*, коли *X* збільшується на одну одиницю. Однак b_1 залежить від одиниць виміру змінних. Наприклад, в отриманій раніше залежності (задача 1) він збільшиться в 100 разів, якщо потужність пласту *X* виразити не в метрах, а в сантиметрах.

Очевидно, що для «виправлення» b_1 як показника тісноти зв'язку потрібна така стандартна система одиниць виміру, у якій дані по різних характеристиках виявилися б порівнянні між собою. Статистика знає таку систему одиниць. Ця система використовує як одиницю виміру змінної її середнє квадратичне відхилення *s*.

Представимо рівняння (3.13) у еквівалентному виді:

$$\frac{\hat{y} - y}{s_y} = b_1 \frac{s_x}{s_y} \cdot \frac{x - \overline{x}}{s_x}$$

У цій системі величина:

$$r = b_1 \frac{s_x}{s_y} \qquad (3.18)$$

показує, на скільки величин s_y зміниться в середньому *Y* коли *X* збільшиться на одне s_x.

Величина *r* є показником тісноти зв'язку і називається *вибірковим коефіцієнтом кореляції* (або просто *коефіцієнтом кореляції*).

Дві кореляційні залежності змінної *Y* від *X* наведені на рисунку 3.2. Очевидно, що у випадку *а)* залежність між змінними менш тісна і коефіцієнт кореляції повинен бути менше, ніж у випадку *б)*, тому що точки кореляційного поля *а)* далі відстоять від лінії регресії, чим точки поля *б)*.

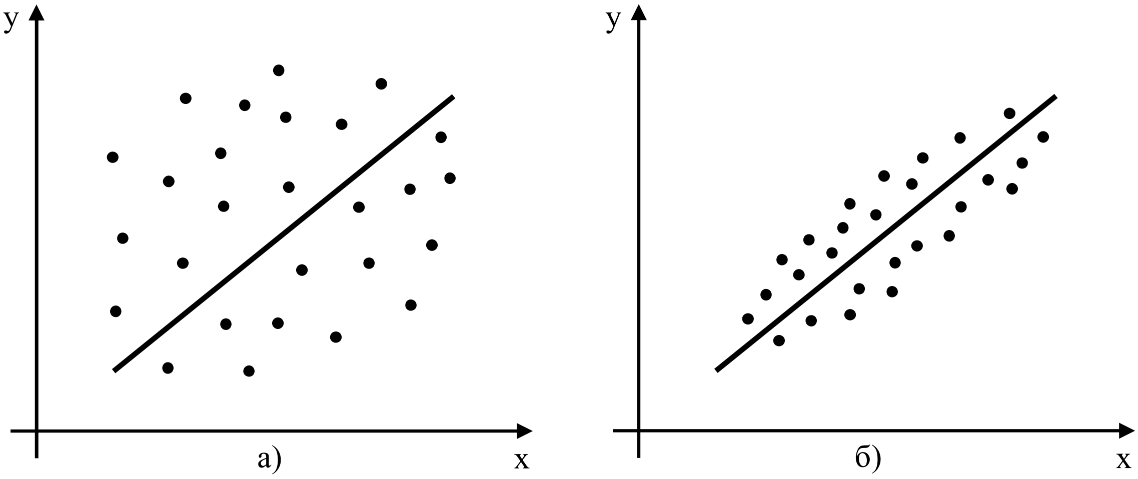


Рисунок 3.2 – Графічне зображення кореляційних залежностей

Якщо *r*>0 (b_1>0), то кореляційний зв'язок між змінними називається *прямій*, якщо *r*<0 (b_1<0), – зворотній. При прямому (зворотньому) зв'язку збільшення одної із змінних веде до збільшення (зменшення) умовної (групової) середньої іншої.

Враховуючи (3.14), формулу для *r* представимо у вигляді:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{s_x s_y} = \frac{\hat{Cov}(X,Y)}{s_x s_y} \qquad (3.19)$$

Відзначимо інші модифікації формули *r*, які отримані з формули (3.19) та за допомогою формул (3.8)-(3.17), (3.14)-(3.16):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n s_x s_y}\ ; \qquad (3.20)$$

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}. \qquad (3.21)$$

Для практичних розрахунків більш зручна формула (3.21), тому що по ній r знаходиться безпосередньо з даних спостережень і на значенні r не позначаться округлення даних, пов'язаних з розрахунком середніх і відхилень від них.

Вибірковий коефіцієнт кореляції r (при досить великому обсязі вибірки n) так само, як і коефіцієнт кореляції двох випадкових величин, має наступні *властивості*.

1) Коефіцієнт кореляції приймає значення на відрізку [-1;1], тобто $-1 \le r \le 1$. Чим ближче $|r|$ до одиниці, тим тісніше зв'язок.
2) При $r = \pm 1$ кореляційний зв'язок представляє лінійну функціональну залежність. При цьому всі спостережувані значення розташовуються на прямій лінії (рисунок 3.3).

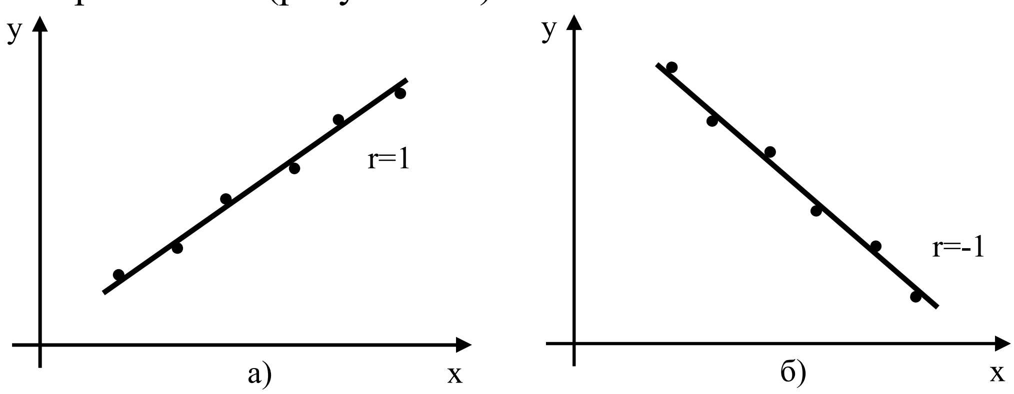


Рисунок 3.3 – Графічне зображення лінійної кореляційної залежності $r = \pm 1$

3) При $r = 0$ лінійний кореляційний зв'язок відсутній. При цьому лінія регресії паралельна осі Ox (рисунок 3.4).

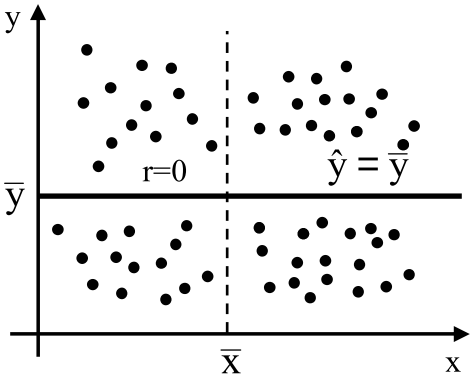


Рисунок 3.4 – Графічне зображення лінійної кореляційної залежності $r = 0$

Слід зазначити, що ми ввели вибірковий коефіцієнт кореляції r виходячи з оцінки близькості точок кореляційного поля до прямої регресії Y по X. Однак r є безпосередньою але оцінкою генерального коефіцієнта кореляції ρ між X і Y лише у випадку двовимірного нормального закону розподілу випадкових величин X і Y. В інших випадках (коли розподіли X і Y відхиляються від нормального, одна з досліджуваних величин, наприклад X, не є випадковою і т.ін.) вибірковий коефіцієнт кореляції не слід розглядати як строгу міру взаємозв'язку змінних.

Задача 2. За даними таблиці 3.1 обчислити коефіцієнт кореляції між змінними X і Y.

Рішення: У задачі 2 були обчислені $\sum_{i=1}^{10} x_i = 94$; $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 908$; $\sum_{i=1}^{10} y_i =$ 68; $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 664$. Обчислимо суму:

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 5^2+10^2+10^2+7^2+5^2+6^2+6^2+5^2+6^2+8^2=496.$$

За формулою (3.21): $r = \dfrac{10 \cdot 664 - 94 \cdot 68}{\sqrt{10 - 908 - 94^2}\sqrt{10 \cdot 496 - 68^2}} = 0{,}866$,

тобто зв'язок між змінними досить тісний.

3.4. Оцінка параметрів парної регресійної моделі

Як відзначено п. 3.2, розглянута в регресійному аналізі залежність Y від X може бути представлена у вигляді модельного рівняння регресії (3.1).

У зв'язку з впливом неврахованих випадкових факторів і причин окремі спостереження змінної *Y* будуть у більшій або меншій мірі відхилятися від функції регресії $\varphi(X)$. У цьому випадку рівняння взаємозв'язку двох змінних (*парна регресійна модель*) може бути представлена у вигляді:

$$Y = \varphi(X)+\varepsilon, \tag{3.22}$$

де ε – випадкова змінна (випадковий член), що характеризує відхилення від функції регресії. Цю змінну будемо називати збурюванням (або помилкою). Таким чином, у регресійній моделі залежна змінна *Y* є деяка функція $\varphi(X)$ з точністю до випадкового збурювання ε.

Розглянемо *лінійний регресійний аналіз*, для якого функції $\varphi(X)$ лінійна щодо оцінюваних параметрів:

$$M_x(Y) = \beta_0+\beta_1 x. \tag{3.23}$$

Припустимо, що для оцінки параметрів лінійної функції регресії (3.23) узята вибірка, що містить *n* пар значень змінних (x_i, y_i), де $i=1,2,...,n$. У цьому випадку лінійна парна регресійна модель має вигляд:

$$y_i = \beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i \tag{3.24}$$

Відзначимо основні передумови регресійного аналізу.

1. У моделі (3.24) збурювання ε_i (або залежна змінна y_i) є величина випадкова, а пояснююча змінна x_i – величина невипадкова.
2. Математичне очікування збурювання ε_i дорівнює нулю:

$$M(\varepsilon_i) = 0 \tag{3.25}$$

(або математичне очікування залежної змінної y_i дорівнює лінійної функції регресії: $M(y_i) = \beta_0+\beta_1 x$).

3. Дисперсія збурювання ε_i, (або залежної змінної y_i) постійна для будь-якого i:

$$D(\varepsilon_i)=\sigma^2 \tag{3.26}$$

(або $D(y_i)=\sigma^2$) – умова гомоскедастичності збурювання (залежної змінної)).

4. Збурювання ε_i і ε_j (або змінні y_i і y_j) не корельовані:

$$M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \ (i \neq j). \qquad (3.27)$$

5. Збурювання ε_i (або залежна змінна y_i) є нормально розподілена випадкова величина.

У цьому випадку модель (3.24) називається *класичною нормальною лінійною регресійною моделлю* (Classical Normal Linear Regression model).

Для одержання рівняння регресії досить передумов 1-4. Вимога виконання передумови 5 (тобто розгляд «нормальної регресії») необхідно для оцінки точності рівняння регресії і його параметрів.

Оцінкою моделі (3.24) по вибірці є рівняння регресії $\hat{y}=b_0+b_1x$ (3.3). Параметри цього рівняння b_0 і b_1 визначаються на основі методу найменших квадратів (див. п. 3.2).

Вплив неврахованих випадкових факторів і помилок спостережень у моделі (3.24) визначається за допомогою дисперсії збурювань (помилок) або *залишкової дисперсії σ^2*. Незміщеною оцінкою цієї дисперсії є вибіркова залишкова дисперсія:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}, \qquad (3.28)$$

де $\hat{y}_i$ – групова середня, знайдена за рівнянням регресії;

$e_i = \hat{y}_i - y_i$ *вибіркова оцінка збурювання* ε_i або *залишок регресії*.

Нагадаємо, що в математичній статистиці для одержання незміщеної оцінки дисперсії випадкової величини відповідну суму квадратів відхилень від середньої ділять не на число спостережень n, а на число *ступенів свободи* (degress of freedom) $n\text{-}m$, рівне різниці між числом незалежних спостережень випадкової величини n і числом зв'язків, що обмежують свободу їх зміни, тобто число m рівнянь, що зв'язують ці спостереження. Тому в знаменнику виразу (3.28) стоїть число ступенів свободи $n\text{-}2$, тому що дві ступені свободи втрачаються при визначенні двох параметрів прямої із системи нормальних рівнянь (3.6).

Виникає питання, чи є оцінки b_0, b_1, s^2 параметрів β_0, β_1, σ^2 «найкращими»? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема Гауса-Маркова. Якщо регресійна модель (3.24) задовольняє передумовам 1-4 (п. 3.4), то оцінки b_0 (3.12), b_1 (3.14) мають найменшу дисперсію в класі всіх лінійних незміщених оцінок (Best Linear Unbiased Estimator, або BLUE).

Таким чином, оцінки b_0 і b_1 у певному смислі є найбільш ефективними лінійними оцінками параметрів β_0 і β_1.

До цього часу ми використовували оцінки параметрів, отримані методом найменших квадратів. Розглянемо ще один важливий метод одержання оцінок, широко використовуваний в економетриці, – метод максимальної правдоподібності.

Метод максимальної правдоподібності. Для його застосування повинен бути відомий вид закону розподілу ймовірностей наявних вибіркових даних.

Враховуючи виконання передумови 5 (п. 3.4) регресійного аналізу, тобто нормальну класичну регресійну модель (3.24), будемо розглядати значення y_i як незалежні нормально розподілені випадкові величини з математичним очікуванням $M(y_i)=\beta_0+\beta_1 x_i$, що є функцією від x_i, і постійною дисперсією σ^2. Тоді щільність нормально розподіленої випадкової величини y_i буде:

$$\varphi_N(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1 x_1)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.29}$$

Функція правдоподібності, яка виражає щільність імовірності спільної появи результатів вибірки, має вигляд:

$$L(y_i, x_i; ...; y_n, x_n; \beta_0, \beta_1; \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2}} . \tag{3.30}$$

Відповідно до методу максимальної правдоподібності за оцінки параметрів β_0, β_1 і σ^2 приймаються такі значення $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$, $\hat{\sigma}^2$ які максимізують функцію правдоподібності L.

При заданих значеннях $x_1, x_2, ..., x_n$ пояснюючої змінної X і постійної дисперсії σ^2 функція правдоподібності L досягає максимуму, коли показник ступеня при e буде мінімальним по абсолютній величині, тобто за умови мінімуму функції $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1)$ що збігається з умовою (3.4) знаходження оцінок b_0 і b_1 методом найменших квадратів. Отже, оцінки b_0 (3.12) і b_1(3.14) параметрів β_0, β_1 збігаються з оцінками методу максимальної максимальної правдоподібності $\hat{\beta}_0$ і $\hat{\beta}_1$.

Для знаходження оцінки $\hat{\sigma}^2$ максимальної правдоподібності параметра σ^2, максимизующою функцію L, якісних міркувань уже недостатньо, і необхідно вдатися до методів диференціального обчислення. Дорівнявши часну похідну $\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = 0$ одержимо:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_1)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n}, \tag{3.31}$$

де параметри β_0 і β_1 замінені їхніми оцінками b_0 і b_1. Порівнюючи з отриманою раніше незміщеною оцінкою s^2 (3.28), бачимо, що оцінка $\hat{\sigma}^2$ (3.31) метода максимальної правдоподібності параметра σ^2 є зміщеною.

У відповідності із властивостями оцінок максимальної правдоподібності оцінки (b_0 і b_1) і $\hat{\sigma}^2$ (а виходить, і s^2) є надійними оцінками. Можна показати, що при виконанні передумови 5 (п. 3.4) про нормальний закон розподілу збурювання ε_i *(i=1,..., n)* ці оцінки є незалежними.

Задачі до розділу 3

1. Є наступні дані про рівень механізації робіт X(%) і продуктивність праці Y (тон/годину) для 14 однотипних підприємств:

x_i	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
y_i	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

   Необхідно: а) оцінити тісноту і напрямок зв'язку між змінними за допомогою коефіцієнта кореляції; б) знайти рівняння регресії Y по X.
2. При дослідженні кореляційної залежності між ціною на нафту X і індексом нафтових компаній Y отримані наступні дані:
   $\bar{x}$=16,2 (ум. гр. од.), $\bar{y}$=4000 (ум. од), s_x^2=4, s_y^2=500, $\hat{Cov}(X,Y)$=40.
   Необхідно: а) скласти рівняння регресії Y по X; б) використовуючи рівняння регресії, знайти середнє значення індексу при ціні на нафту 16,5 ум. гр. од.
3. За даними задачі 1 даного розділу знайти рівняння регресії Y по X.

Розділ 4. Множинний регресійний аналіз

4.1. Класична нормальна лінійна модель множинної регресії

Економічні явища, як правило, обумовлюються великим числом одночасно і сукупно діючих факторів. У зв'язку із цим часто виникає завдання дослідження залежності однієї залежної змінної Y від декількох пояснюючих змінних $X_1, X_2, ..., X_n$. Це завдання вирішується за допомогою *множинного регресійного аналізу*.

Позначимо i спостереження залежної змінної y_i а пояснюючих змінних – $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip}$. Тоді модель множинної лінійної регресії можна представити у вигляді:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \tag{4.1}$$

де $i=1,2,...,n$; ε_i задовольняє наведеним вище передумовам (3.25)-(3.27) даної частини посібника.

Модель (4.1), у якій залежна змінна y_i, збурювання ε_i і пояснюючі змінні $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip}$ задовольняють наведеним у п. 3.4. даної часини посібника передумовам 1–5 регресійного аналізу і, крім того, передумові 6 (див. далі п. 4.2.) значень пояснюючих змінних, називається *класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії* (Classic Normal Linear Multiple Regression model).

Включення в регресійну модель нових пояснюючих змінних ускладнює одержувані формули і обчислення. Це приводить до доцільності використання матричних позначень. Матричний опис регресії полегшує як теоретичні концепції аналізу, так і необхідні розрахункові процедури.

Введемо позначення: $Y=(y_1\, y_2 ... y_n)'$ (’–позначення операції транспонування матриць) – матриця-стовпець, або вектор значень залежної змінної розміру n ; $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots x_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots x_{np} \end{pmatrix}$ – *матриця значень пояснюючих змінних*, або матриця плану розміру $n \cdot (p+1)$ (звертаємо увагу на те, що в матрицю X додатково введений стовпець, всі елементи якого рівні 1, тобто умовно припускається, що в моделі (4.1) вільний член β_0 помножується на фіктивну змінну x_{i0}, що приймає значення 1 для всіх i:

$x_{i0} = 1$ $(i = 1,2,...,n)$; $\beta = (\beta_0\ \beta_1 ... \beta_p)'$ – матриця-стовпець, або *вектор параметрів розміру* $(p+1)$; $\varepsilon = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2 .. .\varepsilon_n)'$ – матриця-стовпець, або *вектор збурювань* (випадкових помилок) розміру n.

Тоді в матричній формі модель (4.1) прийме вигляд:

$$Y = X\beta + \varepsilon. \tag{4.2}$$

Оцінкою цієї моделі по вибірці є рівняння:

$$\hat{Y} = Xb + e, \tag{4.3}$$

де $b = (b_0\, b_1 ...\ b_p)'$; $e = (e_1\ e_2 ...\ e_n)'$.

4.2. Оцінка параметрів класичної регресійної моделі

Для оцінки вектора невідомих параметрів β застосуємо метод найменших квадратів. Тому що добуток транспонованої матриці e' на саму матрицю e: $e'e = (e_1\ e_2\ ...\ e_n)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix} = e_1^2 + e_2^2 + ... + e_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2$, то умова мінімізації залишкової суми квадратів запишеться у вигляді:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_{x_1} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e = (Y - Xb)'(Y - Xb) \to \min. \tag{4.4}$$

З огляду на, що при транспонуванні добутку матриць виходить добуток транспонованих матриць, узятих у зворотному порядку, тобто $(Xb)' = b'X$; після розкриття дужок одержимо:

$$S = Y'Y - b'X'Y - Y'Xb + b'X'Xb. \tag{4.5}$$

Добуток $Y'Xb$ є матриця розміру $(1 \cdot n)[n \cdot (p+1)] \cdot [(p+1) \cdot 1] = (1 \cdot 1)$, тобто величина скалярна, отже, вона не змінюється при транспонуванні, тобто $Y'Xb = (Y'Xb)' = b'X'Y'$. Тому умова мінімізації (4.4) прийме вигляд:

$$S = Y'Y - 2b'X'Y + b'X'Xb \to \min. \tag{4.6}$$

На підставі необхідної умови екстремуму функції декількох змінних $S(b_0, b_1,...,b_p)$ (4.4), необхідно дорівняти нулю часні похідні по цим змінним або в матричній формі – вектор часних похідних: $\frac{\partial S}{\partial b} = \left(\frac{\partial S}{\partial b_0} \frac{\partial S}{\partial b_1} \ldots \frac{\partial S}{\partial b_p} \right)$.

Для вектора часних похідних доведені наступні формули: $\frac{\partial}{\partial b}(b'c) = c, \frac{\partial}{\partial b}(b'Ab) = 2Ab$, де b і c – вектори-стовпці; А – симетрична матриця, у якій елементи, розташовані симетрично щодо головної діагоналі, рівні.

Тому, уважаючи $c=X'Y$, а матрицю $A= X'X$ (вона є симетричною), знайдемо: $\frac{\partial S}{\partial b} = -2X'Y' + 2X'Xb = 0$, звідки одержуємо систему нормальних рівнянь в матричній формі для визначення вектора b:

$$X'Xb = X'Y. \tag{4.7}$$

Знайдемо матриці, що входять у це рівняння (під $\sum$ розуміємо $\sum_{i=1}^{n}$). Матриця $X'X$ представляє матрицю сум перших ступенів, квадратів і попарних добутків n спостережень пояснюючих змінних:

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ x_{11} & x_{21} & ... & x_{n_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{1p} & x_{2p} & ... & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots x_{2p} \\ ... & ... & ... & \ldots ... \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots x_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & ... & \sum x_{ip} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & ... & \sum x_{i1}x_{ip} \\ ... & ... & ... & .... \\ \sum x_{ip} & \sum x_{i1}x_{ip} & ... & \sum x_{ip}^2 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Матриця $X'Y$ є вектор добутків n спостережень пояснюючих і залежної змінних:

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ x_{11} & x_{21} & ... & x_{n_1} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{1p} & x_{2p} & ... & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{i1} \\ ... \\ \sum y_i x_{ip} \end{pmatrix}. \qquad (4.9)$$

В окремому випадку з розглянутого матричного рівняння (4.7) з урахуванням (4.8) і (4.9) для однієї пояснюючої змінної *(p=1)* неважко одержати вже розглянуту вище систему нормальних рівнянь (3.6) (наведеної в п. 3.2. даної частини посібника). Дійсно, у цьому випадку матричне рівняння (4.7) приймає вигляд: $\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{pmatrix}$ звідки безпосередньо слідує система нормальних рівнянь (3.6).

Для вирішення матричного рівняння (4.7) щодо вектора оцінок параметрів *b* необхідно ввести ще одну *передумову 6* (див. п. 3.4. даної часини посібника) для множинного регресійного аналізу: *матриця X'X є неособливою*, тобто її визначник не дорівнює нулю. Отже, ранг матриці *X'X* дорівнює її порядку, тобто *r(X'X)=p+1*. З матричної алгебри відомо, що *r(X'X)=r(X)*, виходить, *r(X)=p+1*, тобто ранг матриці плану *X* дорівнює числу її стовпців. Це дозволяє сформулювати *передумову 6* (п. 3.4.) множинного регресійного аналізу в наступному вигляді:

6. Вектори значень пояснюючих змінних, або стовпці матриці плану *X*, повинні бути лінійно незалежними, тобто ранг матриці *X* – максимальний (*r(X)=p+1*).

Крім того, вважають, що число наявних спостережень (значень) кожної з пояснюючих і залежної змінних перевершує ранг матриці *X*, тобто *n>r(X)* або *n>p+1*, тому що в протилежному випадку в принципі неможливе одержання надійних статистичних висновків.

Нижче, в п. 4.3, розглядається коваріаційна матриця вектора збурювань $\sum_\varepsilon$, що є багатомірним аналогом дисперсії однієї змінної. Тому передумови для множинного регресійного аналізу можуть бути записані таким чином (де E_n – одинична матриця *n*-го порядку, 0_n – нульовий вектор розміру *n*):

1. У моделі (4.2) *ε* – випадковий вектор, *X* – невипадкова (детермінована) матриця.
2. $M(\varepsilon)=0_n$.
3. $\Sigma_\varepsilon=M(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2 E_n$.
4. Аналогічно п.3.

5. ε – нормально розподілений випадковий вектор, тобто $\varepsilon \sim N_n(0;\sigma^2 E_n)$.
6. $r(X) = p+1<n$.

Як уже відзначено в п. 4.1, модель (4.2), що задовольняє наведеним передумовам 1–6, називається *класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії*; якщо ж серед наведених не виконується лише передумова 5 про нормальний закон розподілу вектора збурювань ε, то модель (4.2) називається просто *класичною лінійною моделлю множинної регресії*.

Вирішенням рівняння (4.7) є вектор:

$$b = (X'X)^{-1}X'Y, \tag{4.10}$$

де $(X'X)^{-1}$ – матриця, зворотна матриці коефіцієнтів системи (4.7), $X'Y$ – матриця-стовпець, або вектор, її вільних членів.

Теорема Гауса-Маркова, розглянута вище для парної регресійної моделі (п. 3.4), виявляється вірною і у загальному вигляді для моделі (4.2) множинної регресії:

При виконанні передумов множинного регресійного аналізу оцінка методу найменших квадратів $b=(X'X)^{-1}X'Y$ є найбільш ефективною, тобто має найменшу дисперсію в класі лінійних, незміщених, оцінок (Best Linear Unbiased Estimator, або BLUE).

Знаючи вектор b, вибіркове рівняння множинної регресії представимо у вигляді:

$$\hat{y} = X'_0\, b \tag{4.11}$$

де $\hat{y}$ – групова (умовна) середня змінної Y при заданому векторі значень пояснюючої змінної: $X'_0=(1\ x_{10}\ x_{20}\ \ldots\ x_{p0})$.

Задача 1. Є наступні умовні дані (беремо дані задачі 1, п. 3.2 даної частини посібника, з доданням результатів спостережень над новою пояснюючою змінною X_2, при цьому стару змінну X позначимо X_1) про змінний видобуток вугілля на одного робітника $Y(m)$, потужності пласту $X_1(м)$ і рівню механізації робіт $X_2(\%)$ що характеризує процес видобутку вугілля в 10 шахтах (таблиця 4.1).

Таблиця 4.1

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i	i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
1	8	5	5	6	8	8	6
2	11	8	10	7	9	6	6
3	12	8	10	8	9	4	5
4	9	5	7	9	8	5	6
5	8	7	5	10	12	7	8

Припускаючи, що між змінними *Y*, X_1 і X_2 існує лінійна кореляційна залежність, знайти її аналітичний вираз (рівняння регресії *Y* по X_1 і X_2).

Рішення: Позначимо:

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ ... \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 8 \\ ... & ... & ... \\ 1 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

(нагадуємо, що в матрицю плану *X* уводиться додатковий стовпець чисел, що складається з одиниць).

Для зручності обчислень складаємо допоміжну таблицю 4.2.

Таблиця 4.2

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i	x_{i1}^2	x_{i2}^2	y_i^2	$x_{i1}\cdot x_{i2}$	$y_i\cdot x_{i1}$	$y_i\cdot x_{i2}$	$\hat{y}_i$	$e_i^2 = (\hat{y}_i - y_i)^2$
1	8	5	5	64	25	25	40	40	25	5,13	0,016
2	11	8	10	121	64	100	88	110	80	8,79	1,464
3	12	8	10	144	64	100	96	120	80	9,64	1,127
4	9	5	7	81	25	49	45	63	35	5,98	1,038
5	8	7	5	64	49	25	56	40	35	5,86	0,741
6	8	8	6	64	64	36	64	48	48	6,23	0,052
7	9	6	6	81	36	36	54	54	36	6,35	0,121
8	9	4	5	81	16	25	36	45	20	5,61	0,377
9	8	5	6	64	25	36	40	48	30	5,13	0,762
10	12	7	8	144	49	64	84	96	56	9,28	1,631
Σ	94	63	68	908	417	496	603	664	445	—	6,329

Тепер:

$$X'X=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots 1\\ 8 & 11 & \dots 12\\ 5 & 8 & \dots 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 8 & 5\\ 1 & 11 & 8\\ \dots & \dots & \dots\\ 1 & 12 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 94 & 63\\ 94 & 908 & 603\\ 63 & 603 & 417\end{pmatrix}$$

(дивись суми в підсумковому рядку таблиці 4.2);

$$X'Y=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots 1\\ 8 & 11 & \dots 12\\ 5 & 8 & \dots 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 10\\ \dots\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}68\\ 664\\ 445\end{pmatrix}.$$

Матрицю $A^{-1}=(X'X)^{-1}$ визначимо по формулі $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\overline{A}$, де $|A|$ – визначник матриці $X'X$; $\overline{A}$ – матриця приєднана до матриці $X'X$. Одержимо:

$$A^{-1}=\frac{1}{3738}\cdot\begin{pmatrix}15027 & -1209 & -522\\ -1209 & 201 & -108\\ -522 & -108 & 244\end{pmatrix}.$$

Тепер відповідно до (4.10) помножуючи цю матрицю на вектор: $X'X=\begin{pmatrix}68\\ 664\\ 445\end{pmatrix}$, одержимо: $b=\frac{1}{3738}\cdot\begin{pmatrix}-13230\\ 3192\\ 1372\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3{,}5393\\ 0{,}8539\\ 0{,}3670\end{pmatrix}$.

З урахуванням (4.11) рівняння множинної регресії має вигляд: $\hat{y}=-3{,}54+0{,}854x_i+0{,}367x_2$. Воно показує, що при збільшенні тільки потужності пласту X_1 (при незмінному X_2) на *1* м. видобуток вугілля на одного робітника Y збільшується в середньому на 0,854 т., а при збільшенні тільки рівня механізації робіт X_2 (при незмінної X_1) – у середньому на 0,367 т.

Додавання в регресійну модель нової пояснюючої змінної X_2 змінило коефіцієнт регресії b_1 (Y по X_1) з 1,016 для парної регресії (див. задачу 1 п. 3.2. даної частини посібника) до 0,854 – для множинної регресії. У цьому ніякого протиріччя немає, тому що в другому випадку коефіцієнт регресії дозволяє оцінити приріст залежної змінної Y при зміні на одиницю пояснюючої змінної X_1 у чистому виді, незалежно від X_2. У випадку парної регресії b_1 ураховує вплив на Y не тільки змінної X_1, але і побічно кореляційно пов'язаної з нею змінної X_2.

На практиці часто буває необхідно порівняння впливу на залежну змінну різних пояснюючих змінних, коли останні виражаються різними одиницями виміру. У цьому випадку використовують *стандартизовані коефіцієнти регресії b_j'* і коефіцієнти еластичності E_j *($j = 1,2,..., p$)*:

$$b_j' = b_j \frac{S_{x_j}}{S_y}; \tag{4.12}$$

$$E_j = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}. \tag{4.13}$$

Стандартизований коефіцієнт регресії b_j' показує, на скільки величин s_y зміниться в середньому залежна змінна Y при збільшенні тільки j-ї пояснюючої змінної на s_{xj} , а коефіцієнт еластичності E_j – на скільки відсотків (від середньої) зміниться в середньому Y при збільшенні тільки X_j на 1%.

Задача 2. За даними задачі 1 порівняти роздільний вплив на змінний видобуток вугілля двох факторів – потужності пласту і рівня механізації робіт.

Рішення: Для порівняння впливу кожної з пояснюючих змінних по формулі (4.12) обчислимо стандартизовані коефіцієнти регресії: $b_1'=0{,}8539\cdot1{,}56/1{,}83=0{,}728$; $b_2'=0{,}3670\cdot1{,}42/1{,}83=0{,}285$, а по формулі (4.13) – коефіцієнти еластичності: $E_1=0{,}8539\cdot9{,}4/6{,}8 =1{,}180$; $E_2=0{,}3670\cdot 6{,}3/6{,}8=0{,}340$. (Тут ми опустили розрахунок необхідних характеристик змінних: $\bar{x}_1=9{,}4$; $\bar{x}_2=6{,}3$; $\bar{y}=6{,}8$; $s_{x_1}=1{,}56$; $s_{x_2}=1{,}42$; $s_y=1{,}83$). Таким чином, збільшення потужності пласту і рівня механізації робіт тільки на одне s_{x_1} або на одне s_{x_2} збільшує в середньому змінний видобуток вугілля на одного робітника відповідно на $0{,}728s_y$ або на $0{,}285s_y$, а збільшення цих змінних на 1% (від своїх середніх значень) приводить у середньому до росту видобутку вугілля відповідно на 1,18% і 0,34%. Отже, по обох показниках на змінний видобуток вугілля більше впливає фактор «потужність пласту» у порівнянні з фактором «рівень механізації робіт».

Перетворимо вектор оцінок (4.10) з урахуванням (4.2):

$$b = (X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon) = (X'X)^{-1}(X'X)\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon = E\beta+(X'X)^{-1} X'\varepsilon \quad \textit{або}$$

$$b = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon, \tag{4.14}$$

тобто оцінки параметрів (4.10), які знайдені по вибірці, будуть містити випадкові помилки.

Так, як математичне очікування оцінки b дорівнює оцінюваному параметру β, тобто: $M(b) = M[\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon] = M(\beta)+(X'X)^{-1}X'M(\varepsilon) = \beta$, тому що в силу (3.25) $M(\varepsilon)=0$, означає що вектор b є незміщеною оцінкою параметра β.

4.3. Коваріаційна матриця і її вибіркова оцінка

Варіації оцінок параметрів будуть в остаточному підсумку визначати точність рівняння множинної регресії. Для їхнього виміру в багатомірному регресійному аналізі розглядають так звану *коваріаційну матрицю* вектора оцінок параметрів Σ_b, що є матричним аналогом дисперсії однієї змінної:

$$\Sigma_b = \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \sigma_{01} & \ldots & \sigma_{0p} \\ \sigma_{10} & \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{p0} & \sigma_{p1} & \ldots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} \qquad (4.15)$$

де елементи σ_{ij} – *коваріації (або кореляційні моменти)* оцінок параметрів β_i і β_j. Коваріація двох змінних визначається як математичне очікування добутку відхилень цих змінних від їхніх математичних очікувань (див. п. 2.3. даної частини посібника). Тому:

$$\sigma_{ij} = M[(b_i - M(b_i))\cdot(b_j - M(b_j))]. \qquad (4.16)$$

Коваріація характеризує як ступінь розсіювання значень двох змінних щодо їхніх математичних очікувань, так і взаємозв'язок цих змінних.

У силу того, що оцінки b_j, отримані методом найменших квадратів, є незміщеними оцінками параметрів β_j, тобто $M(b_j)=\beta_j$, вираз (4.16) прийме вид: $\sigma_{ij}=M[(b_i-\beta_i)\cdot(b_j-\beta_j)]$.

Розглядаючи коваріаційну матрицю Σ_b, легко помітити, що на її головній діагоналі знаходяться дисперсії оцінок параметрів регресії, тому що:

$$\sigma_{jj} = M[(b_j-\beta_j)\cdot(b_j-\beta_j)] = M(b_j-\beta_j)^2 = \sigma_{bj}^{\,2}. \qquad (4.17)$$

У скороченому виді коваріаційна матриця вектора оцінок параметрів Σ_b, має вигляд: $\Sigma_b = M[(b-\beta)(b-\beta)']$ (у цьому легко переконатися, перемноживши вектори $(b- \beta)$ і $(b- \beta)'$). З огляду на (4.14), перетворимо цей вираз:

$$\Sigma_b = M\{[(X'X)^{-1}X'\varepsilon]\cdot[(X'X)^{-1}X'\varepsilon]'\} = M[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}] =$$
$$= (X'X)^{-1} X'M(\varepsilon\varepsilon') X(X'X)^{-1}, \qquad (4.18)$$

тому що елементи матриці X – невипадкові величини.

Матриця $M(\varepsilon\varepsilon')$ являє собою коваріаційну *матрицю вектора збурювань*:

$$\Sigma_\varepsilon = M(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} M(\varepsilon_1^2) & M(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ M(\varepsilon_2\varepsilon_1) & M(\varepsilon_2^2) & \cdots & M(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M(\varepsilon_n\varepsilon_1) & M(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix} \qquad (4.19)$$

у якій всі елементи, які не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю в силу передумови 4 про некорельованість збурювань ε_i і ε_j між собою (формула 3.27 даної частини посібника), а всі елементи, що лежать на головній діагоналі, у силу передумов 2 і 3 регресійного аналізу (формули (3.25) і (3.26) даної частини посібника) дорівнюють однієї і тієї ж дисперсії σ^2: $M(\varepsilon_i^2)=M(\varepsilon_i-0)^2=D(\varepsilon_i^2)=\sigma^2$. Тому матриця $M(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2E_n$, де E_n – одинична матриця n-го порядку. Отже, у силу (4.18) коваріаційна матриця вектора оцінок параметрів:

$$\Sigma_b = [(X'X)^{-1}X'(\sigma^2E_n)]X(X'X)^{-1} = \sigma^2((X'X)^{-1}(X'E_nX)(X'X)^{-1} \text{ або}$$
$$\Sigma_b = \sigma^2(X'X)^{-1}. \qquad (4.20)$$

Отже, за допомогою зворотної матриці $(X'X)^{-1}$ визначається не тільки сам вектор b оцінок параметрів (4.10), але і дисперсії і коваріації його компонентів.

Задачі до розділу 4

1. Є наступні дані про вироблення лиття на одного працюючого $X_1(m)$, браку лиття $X_2(\%)$ і собівартості 1 тони лиття Y(грн.) по 25 ливарних цехах заводів:

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i	i	x_{i1}	x_{i2}	y_i	i	x_{i1}	x_{i2}	y_i
1	14,6	4,2	239	10	25,3	0,9	198	19	17,0	9,3	282
2	13,5	6,7	254	11	56,0	1,3	170	20	33,1	3,3	196
3	21,5	5,5	262	12	40,2	1,8	173	21	30,1	3,5	186
4	17,4	7,7	251	13	40,6	3,3	197	22	65,2	1,0	176
5	44,8	1,2	158	14	75,8	3,4	172	23	22,6	5,2	238
6	111,9	2,2	101	15	27,6	1,1	201	24	33,4	2,3	204
7	20,1	8,4	259	16	88,4	0,1	130	25	19,7	2,7	205
8	28,1	1,4	186	17	16,6	4,1	251				
9	22,3	4,2	204	18	33,4	2,3	195				

Необхідно: а) знайти множинний коефіцієнт детермінації і пояснити його зміст; б) знайти рівняння множинної регресії *Y* по X_1 і X_2, оцінити значимість цього рівняння і його коефіцієнтів на рівні α=0,05; в) порівняти роздільний вплив на залежну змінну кожній з пояснюючих змінних, використовуючи стандартизовані коефіцієнти регресії і коефіцієнти еластичності.

2. Є наступні дані про річні ставки місячних доходів по трьох акціях за шестимісячний період:

Акція	Доходи по місяцях, %					
A	5,4	5,3	4,9	4,9	5,4	6,0
B	6,3	6,2	6,1	5,8	5,7	5,7
C	9,2	9,2	9,1	9,0	8,7	8,6

Є підстави припускати, що доходи *Y* по акції *C* залежать від доходів X_1 і X_2 по акціях *A* і *B*. Необхідно: скласти рівняння регресії *Y* по X_1 і X_2.

Розділ 5. Часові ряди

При розгляді класичної моделі регресії характер експериментальних даних, як правило, не має принципового значення. Однак це виявляється не так, якщо умови класичної моделі порушені.

Методи дослідження моделей, заснованих на даних просторових вибірок і часових рядів істотно відрізняються. Пояснюється це тим, що на відміну від просторових вибірок спостереження в часових рядах, як правило, не можна вважати незалежними.

У цій главі ми зупинимося на деяких загальних поняттях і питаннях, пов'язаних з часовими рядами, використанням регресійних моделей часових рядів для прогнозування.

5.1. Загальні відомості про часові ряди

Під *часовим рядом* (*динамічним рядом*) в економіці мається на увазі послідовність спостережень деякої ознаки (випадкової величини) Y у послідовні моменти часу. Окремі спостереження називаються *рівнями ряду*, які будемо позначати $y_t\ (t=1,2,...,n)$, де n – число рівнів.

У таблиці 5.1 наведені дані, що відображають попит на деякий товар за восьмирічний період (ум. гр. од), тобто часовий ряд попиту y_t.

Таблиця 5.1

Рік, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Попит, y_t	213	171	291	309	317	362	351	361

В якості прикладу на рисунку 5.1 часовий ряд y_t зображений графічно.

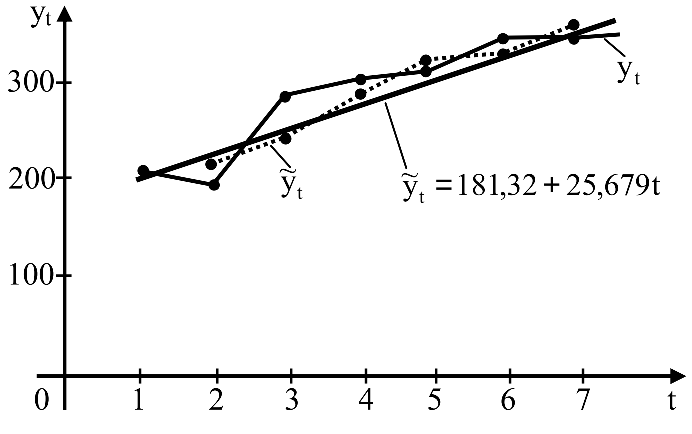


Рисунок 5.1 – Графічне зображення часового ряду y_t (таблиця 5.1)

В загальному виді при дослідженні економічного часового ряду y_t виділяються кілька складових:

$$y_t = u_t + \nu_t + c_t + \varepsilon_t \ (t = 1,2,\ldots, n), \tag{5.1}$$

де u_t – *тренд*, що описує чистий вплив довгострокових факторів, тобто тривалу тенденцію зміни ознаки (наприклад, збільшення населення, економічний розвиток, зміну структури споживання і т.ін.);

v_t – *сезонний компонент*, що відображає повторюваність економічних процесів протягом не дуже тривалого періоду (року, іноді місяця, тижня і т.д., наприклад, обсяг продажів товарів або перевезень пасажирів у різні пори року);

c_t – *циклічний компонент*, що відображає повторюваність економічних процесів протягом тривалих періодів (наприклад, вплив хвиль економічної активності, циклів сонячної активності і т.ін.);

ε_t – випадковий компонент, що відображає вплив випадкових факторів які не піддаються обліку і реєстрації.

Варто звернути увагу на те, що на відміну від ε_t перші три складові (компоненти) u_t, v_t, c_t є *закономірними, невипадковими*.

Найважливішою класичною задачею при дослідженні економічних часових рядів є виявлення і статистична оцінка *основної тенденції* розвитку досліджуваного процесу і відхилень від неї.

Відзначимо основні етапи аналізу часових рядів:

1) графічне подання і опис поведінки часового ряду;
2) виділення і видалення закономірних (невипадкових) складових тимчасового ряду (тренда, сезонних і циклічних складових);
3) згладжування і фільтрація (видалення низько- або високочастотних складових часового ряду);
4) дослідження випадкової складової часового ряду, побудова і перевірка адекватності математичної моделі для її опису;
5) прогнозування розвитку досліджуваного процесу на основі наявного часового ряду;
6) дослідження взаємозв'язку між різними часовими рядами.

Серед найпоширеніших методів аналізу часових рядів виділимо кореляційний і спектральний аналіз, моделі авторегресії і ковзної середньої. Про деяких з них мова йтиме нижче.

Якщо вибірка $y_1, y_2,\ldots, y_i,\ldots, y_n$ розглядається як одна з реалізацій випадкової величини Y, часовий ряд $y_1, y_2,\ldots, y_i,\ldots, y_n$ розглядається як одна з *реалізацій* (траєкторій) випадкового процесу $Y(t)$. Разом з тим варто мати на увазі принципові відмінності часового ряду y_t $(t= 1,2,...,n)$ від послідовності спостережень y_1, y_2,…, y_n утворюючих випадкову вибірку. По-перше, на відміну від елементів випадкової вибірки члени часового ряду, як правило, не є статистично незалежними. По-друге, члени часового ряду не є однаково розподіленими.

5.2. Стаціонарні часові ряди, автокореляційна функція

Важливе значення в аналізі часових рядів мають *стаціонарні часові ряди*, імовірнісні властивості яких не змінюються в часі. Стаціонарні часові ряди застосовуються, зокрема, при описі випадкових складових аналізованих рядів.

Часовий ряд y_t $(t = 1,2,..., n)$ називається *строго стаціонарним*, якщо спільний розподіл імовірностей n спостережень y_1, y_2,…, y_n таке ж, як і n спостережень $y_{1+\tau}$, $y_{2+\tau}$, ..., $y_{n+\tau}$ при будь-яких n, t і τ. Інакше кажучи, властивості строго стаціонарних рядів y_t не залежать від моменту t, тобто закон розподілу і його числові характеристики не залежать від t. Отже, математичне очікування $a_y(t)=a$, середнє квадратичне відхилення $\sigma_y(t) =\sigma$ можуть бути оцінені за спостереженнями y_t $(t = 1,2,..., n)$ за формулами:

$$\overline{y}_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_t}{n}; \tag{5.2}$$

$$s_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_t - \overline{y}_t)^2}{n}. \tag{5.3}$$

Найпростішим прикладом стаціонарного часового ряду, у якого математичне очікування дорівнює нулю, а помилки ε_t, некорельовані, є «білий шум». Отже, можна сказати, що збурювання (помилки) ε_t, у класичній лінійній регресійній моделі утворюють «білий шум», а у випадку їхнього нормального розподілу – нормальний (гаусовський) «білий шум».

Ступінь тісноти зв'язку між послідовностями спостережень часового ряду y_1, y_2,…, y_n, і $y_{1+\tau}$, $y_{2+\tau}$, ..., $y_{n+\tau}$ (зрушених відносно один одного на τ одиниць, або, як говорять, з лагом τ) може бути визначена за допомогою коефіцієнта кореляції:

$$\rho(\tau)=\frac{M[(y_t-a)(y_{y+\tau}-a)]}{\sigma_x(t)\sigma_x(t+\tau)}=\frac{M[(y_t-a)(y_{y+\tau}-a)]}{\sigma^2}, \qquad (5.4)$$

тому що $M(y_t)=M(y_{t+\tau})=a$, $\sigma_y(t)=\sigma_y(t+\tau)=\sigma$.

Так як коефіцієнт $p(\tau)$ вимірює кореляцію між членами того самого ряду, його називають *коефіцієнтом автокореляції*, а залежність $p(\tau)$ – *автокореляційною функцією*. У силу стаціонарності часового ряду y_t $(t=1,2,..., n)$ автокореляційна функція $p(\tau)$ залежить тільки від лага τ, причому $p(-\tau)=p(\tau)$, тобто при вивченні $p(\tau)$ можна обмежитися розглядом тільки позитивних значень τ.

Статистичною оцінкою $p(\tau)$ є *вибірковий коефіцієнт автокореляції* $r(\tau)$, який визначається по формулі коефіцієнта кореляції (3.21) (п. 3.3. даної часини посібника), у якій $x_i=y_i$, $y_i=y_{i+\tau}$, а n заміняється на n-τ:

$$r(\tau)=\frac{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t y_{t+\tau}-\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t\sum_{t=1}^{n-\tau}y_{t+\tau}}{\sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t^2-\left(\sum_{t=1}^{n-\tau}y_t\right)^2}\sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1+\tau}^{n-\tau}y_{t+\tau}^2-\left(\sum_{t=1}^{n-\tau}y_{t+\tau}\right)^2}}. \qquad (5.5)$$

Функцію $r(\tau)$ називають *вибірковою автокореляційною функцією*, а її графік – *корелограмою*.

При розрахунку $r(\tau)$ варто пам'ятати, що зі збільшенням τ число n-τ пар спостережень y_t, $y_{t+\tau}$ зменшується, тому лаг τ повинен бути таким, щоб число n-τ було достатнім для визначення $r(\tau)$. Звичайно орієнтуються на співвідношення $\tau \le n/4$.

Для стаціонарного часового ряду зі збільшенням лага τ взаємозв'язок членів часового ряду y_t і $y_{t+\tau}$ слабшає і автокореляційна функція $p(\tau)$ повинна убувати (по абсолютній величині). У той же час для її вибіркового (емпіричного) аналога $r(\tau)$, особливо при невеликому числі пар спостережень n-τ, властивість монотонного убування (по абсолютній величині) при зростанні τ може порушуватися.

Поряд з автокореляційною функцією при дослідженні стаціонарних часових рядів розглядається *часна автокореляційна функція* $p_{часн}(\tau)$ де $p_{часн}(\tau)$ є часний коефіцієнт кореляції між членами часового ряду y_t і $y_{t+\tau}$, тобто коефіцієнт кореляції між y_t і $y_{t+\tau}$, при усуненні впливу проміжних (між y_t і $y_{t+\tau}$) членів.

Статистичною оцінкою $p_{часн}(\tau)$ є вибіркова часна автокореляційна функція $r_{часн}(\tau)$, де $r_{часн}(\tau)$ – вибірковий часний коефіцієнт кореляції. Наприклад, вибірковий часний коефіцієнт автокореляції 1-го порядку між членами часового рада y_t і y_{t+2} при усуненні впливу y_{t+1} може бути обчислений по формулі:

$$r_{\text{часн}}(2) = \frac{r(2) - r(1)r(1,2)}{\sqrt{1-r^2(1)}\sqrt{1-r^2(1,2)}}, \qquad (5.6)$$

де *r(1)*, *r(1,2)*, *r(2)* – вибіркові коефіцієнти автокореляції між y_t і y_{t+1}, y_{t+1} і y_{t+2}, y_t і y_{t+2}, $t = 1, ..., n$.

Задача 1. За даними таблиці 5.1 для часового ряду y_t знайти середнє значення, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнти автокореляції (для лагів τ =1;2) і часний коефіцієнт автокореляції 1-го порядку.

Рішення: Середнє значення часового ряду знаходимо по формулі (5.2): y = (213+171+...+361)/8= 296,88 (од.).

Дисперсію і середнє квадратичне відхилення можна обчислити по формулі (5.3), але в даному випадку простіше скористатися співвідношенням: $s_t^2 = \overline{y_t^2} - \overline{y}_t^2 = 92478{,}38 - 296{,}88^2 = 4343{,}61$;

$s_t = \sqrt{4343{,}61} = 65{,}31$ од., де

$$\overline{y}_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_t^2}{n} = \frac{213^2 + 171^2 + ... + 361^2}{8} = 92478{,}38.$$

Знайдемо коефіцієнт автокореляції *r(τ)* часового ряду (для лага *τ=1*), тобто коефіцієнт кореляції між послідовностями семи пар спостережень y_t і y_{t+1} *(t= 1,2,...,7)*:

y_t	213	171	291	309	317	362	351
$y_{t+\tau}$	171	291	309	317	362	351	361

Обчислюємо необхідні суми:

$$\sum_{t=1}^{7} y_t = 213+171+...+351=2014;$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_t^2 = 213^2+171^2+...+351^2=609506;$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_{t+\tau} = 171+291+...+361=2162;$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_{t+\tau}^2 = 171^2+291^2+...+361^2=694458;$$

$$\sum_{t=1}^{7} y_t y_{t+\tau}=213\cdot171+171\cdot291+...+351\cdot361=642583.$$

Тепер по формулі (5.5) коефіцієнт автокореляції:

$$r(1)=\frac{7-642583-2014\cdot2162}{\sqrt{7\cdot609506-2014^2}\sqrt{7\cdot694458-2162^2}}=0{,}725$$

Коефіцієнт автокореляції *r(2)* для лага $\tau=2$ між членами ряду y_t і y_{t+2} *(t=1,2,...,6)* по шести парах спостережень обчислюємо аналогічно: *r(2)*=0,842.

Для визначення часного коефіцієнта кореляції 1-го порядку $r_{часн}(2)$ між членами ряду y_t і y_{t+2} при виключенні впливу y_{t+1} спочатку знайдемо (за аналогією з попереднім) коефіцієнт автокореляції *r(1,2)* між членами ряду y_{t+1} і y_{t+2}: *r*=(1,2)=0,825, а потім обчислимо $r_{часн}(2)$ *за* формулою (5.6):

$$r_{часн}(2)=\frac{0{,}842-0{,}725\cdot0{,}825}{\sqrt{1-0{,}725^2}\sqrt{1-0{,}825^2}}=0{,}627\,.$$

Знання автокореляційних функцій $r(\tau)$ і $r_{часн}(\tau)$ може надати суттєву допомогу при підборі і ідентифікації моделі аналізованого часового ряду і статистичній оцінці його параметрі).

5.3. Аналітичне вирівнювання часового ряду

Як уже відзначено вище, однією з найважливіших задач дослідження економічного часового ряду є виявлення основної тенденції досліджуваного процесу, вираженою невипадковою складовою *f(t)* (тренда або тренда із циклічним або сезонним компонентом).

Для вирішення цієї задачі спочатку необхідно вибрати вид функції *f(t)*. Найбільше часто використовуються наступні функції:

- лінійна – $f(t) = b_0+b_1t$;
- поліноміальна – $f(t) = b_0+b_1t+b_2t^2+...+b_nt^n$;
- експонентна – $f(t) = e^{b0+b1}$;
- логістична – $f(t) = a/(1+be^{-ct})$;
- Гомперца – $\log_c f(t) =a-br^t$, де $0<r<1$.

Це досить відповідальний етап дослідження. При виборі відповідної функції *f(t)* використовують змістовний аналіз (який може встановити характер динаміки процесу), візуальні спостереження (на основі графічного зображення часового ряду). При виборі поліноміальної функції може бути застосований метод послідовних вирахувань (що складається в обчисленні вирахувань першого порядку $\Delta_t=y_t-y_{t-1}$, другого порядку $\Delta_t^{(2)}=\Delta_t-\Delta_{t-1}$ і т.д.), і порядок вирахувань, при якому вони будуть приблизно однаковими, приймається за ступінь полінома.

Із двох функцій перевага звичайно віддається тієї, при якій менша сума квадратів відхилень фактичних даних від розрахункових на основі цих функцій. Але цей принцип не можна доводити до абсурду: так, для будь-якого ряду з *n* точок можна підібрати поліном *(n-1)*-го ступеня, який проходить через всі точки, і відповідно з мінімальною – нульовою – сумою квадратів відхилень, але в цьому випадку, мабуть, не слід говорити про виділення основної тенденції, з огляду на випадковий характер цих точок. Тому за інших рівних умов перевагу варто віддавати більш простим функціям.

Для виявлення основної тенденції найчастіше використовується метод найменших квадратів, розглянутий у розділі 3 даної частини посібника. Значення часового ряду y_t розглядаються як залежна змінна, а час t – як пояснююча:

$$y_t = f(t)+\varepsilon_t, \tag{5.7}$$

де ε_t – збурювання, що задовольняють основним передумовам регресійного аналізу, наведеним в п. 3.4 даної частини посібника, тобто відносяться до незалежних і однаково розподілених випадкових величин, розподіл яких припускаємо нормальним.

Відповідно до методу найменших квадратів параметри прямої $\hat{y}_t=f(t)=b_0+b_1t$ знаходяться із системи нормальних рівнянь (п. 3.2 формула (3.6) даної частини посібника), у якій у якості x_i, беремо t:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1\sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} y_t, \\ b_0\sum_{t=1}^{n} t + b_1\sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} y_t t. \end{cases} \tag{5.8}$$

З огляду на, що значення змінної $t=1,2,...,n$ утворять натуральний ряд чисел від 1 до n, суми $\sum_{t=1}^{n} t$, $\sum_{t=1}^{n} t^2$ можна виразити через число членів ряду n по відомим у математиці формулам:

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2}; \ \sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (5.9)$$

Задача 2. За даними таблиці 5.1 знайти рівняння невипадкової складової (тренда) для часового ряду y_t уважаючи тренд лінійним.

Рішення: За формулою (5.9):

$$\sum_{t=1}^{8} t = \frac{8\cdot 9}{1\cdot 2} = 36; \ \sum_{t=1}^{8} t^2 = \frac{8\cdot 9\cdot 17}{6} = 204.$$

Далі:

$$\sum_{i=1}^{8} y_t = 213+171+...+361=2375;$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_t^2 = 213^2+171^2+...+361^2=739827;$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_t t = 213\cdot 1+171\cdot 2+...+361\cdot 8=11766.$$

Система нормальних рівнянь (5.8) має вигляд:

$$\begin{cases} 8b_0 + 36b_1 = 2375, \\ 36b_0 + 204b_1 = 11766, \end{cases}$$

звідки $b_0=181,32$; $b_1=25,679$ і рівняння тренда $\hat{y}_t=181,32+25,679t$ (рисунок 5.1), тобто попит щорічно збільшується в середньому на 25,7 од.

При вирішенні задачі можна було не виписувати систему нормальних рівнянь, а представити рівняння регресії у вигляді формули (3.13) (п. 3.2 даної частини посібника), тобто $\hat{y}_t - \bar{y} = b_1(t - \bar{t})$, де $\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t}{n} = \frac{1+n}{2}$; $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_t}{n}$, а коефіцієнт регресії b_1 знайти по формулі (3.14) (п. 3.2 даної частини посібника): $b_1 = \frac{\overline{y_t t} - \bar{y}_t \bar{t}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}$, де

$$\overline{y_t t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t t}{n}; \ \overline{y_t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_t}{n}; \ \bar{t} = (1 + n)/2; \ \overline{t^2} = (n + 1)(2n +1)/6.$$

Перевіримо значимість отриманого рівняння тренда по F-критерію на 5%-ом рівне значимості. Обчислимо за допомогою формули суми квадратів:

а) обумовлену регресією:

$$Q_R = \sum_{t=1}^{n}(\hat{y}_t - \bar{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} b_1^2 (t-\bar{t})^2 = b_1^2 \left(\sum_{t=1}^{n} t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}{n} \right) =$$

$$= 25{,}679^2(204\text{-}36^2/8) = 27695{,}3;$$

б) загальну:

$$Q = \sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} y_1^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)^2}{n} = 739827 - \frac{2375^2}{8} = 34748{,}9;$$

в) залишкову:

$$Q_e = Q - Q_R = 34748{,}9 - 27695{,}3 = 7053{,}6.$$

Знайдемо статистики:

$$F = \frac{Q_R(n-2)}{Q_e} = \frac{27695{,}3 \cdot 6}{7053{,}6} = 23{,}56.$$

Тому що $F > F_{0,05;1;6}$ (основи статистики), то рівняння тренда значиме.

При застосуванні методу найменших квадратів для оцінки параметрів експонентної, логістичної функцій або функції Гомперца виникають складності з вирішенням одержуваної системи нормальних рівнянь, тому попередньо, до одержання відповідної системи, прибігають до деяких перетворень цих функцій (наприклад, логарифмуванню і т.ін.).

Іншим методом вирівнювання (згладжування) часового ряду, тобто виділення невипадкової складової, є метод ковзних середніх (дивись п. 3.1. частини 2 посібника). Він заснований на переході від початкових значень членів ряду до їхніх середніх значень на інтервалі часу, довжина якого визначена заздалегідь. При цьому сам обраний інтервал часу «сковзає» уздовж ряду .

Одержуваний у такий спосіб ряд ковзних середніх поводиться більш гладко, ніж вихідний ряд, через усереднення відхилень ряду. Дійсно, якщо індивідуальний розкид значень члена часового ряду y_t біля свого середнього (згладженого) значення a характеризується дисперсією σ^2, то розкид середньої з m членів часового ряду $(y_1+y_2+\ldots+y_m)/m$ біля того ж значення a буде характеризуватися істотно меншою величиною дисперсії, рівної σ^2/m. Для усереднення можуть бути використані середня арифметична (проста і з деякими вагами), медіана і інше.

Задача 3. Провести згладжування часового ряду y_t за даними таблиці 5.1 методом ковзних середніх, використовуючи просту середню арифметичну з інтервалом згладжування $m=3$ роки.

Рішення: Ковзні середні знаходимо по формулі:

$$\tilde{y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i}{m} \tag{5.10}$$

коли $m=(2p-1)$ – непарне число; при $m=3$, $p = 1$. Наприклад, при $t=2$ за формулою (5.10): $\tilde{y}_2 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{3}(213 + 171 + 291) = 225$ од.; при $t=3$ $\tilde{y}_3 = \frac{1}{3}(y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{3}(171 + 291 + 309) = 241$ од. і т.д.

У результаті одержимо згладжений ряд:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{y}_{t\,t}$	—	225,0	241,0	305,7	329,3	336,3	358,0	—

На рисунку 5.1 цей ряд зображений графічно у вигляді пунктирної лінії.

5.4. Прогнозування на основі моделей часових рядів

Одна з найважливіших задач (етапів) аналізу часового (динамічного) ряду, як відзначено вище, полягає в прогнозуванні на його основі розвитку досліджуваного процесу. При цьому виходять із того, що тенденція розвитку, установлена в минулому, може бути поширена (екстрапольована) на майбутній період.

Задача ставиться так: є часовий (динамічний) ряд $y_t(t = 1,2,..., n)$ і потрібно дати прогноз рівня цього ряду на момент $n+\tau$.

Якщо розглядати часовий ряд як регресійну модель досліджуваної ознаки по змінній «час», то до нього можуть бути застосовані розглянуті вище методи аналізу. Треба, однак, згадати, що одна з основних передумов регресійного аналізу полягає в тому, що збурювання ε_t $(t=1,2,...,n)$ являють собою незалежні випадкові величини з математичним очікуванням (середнім значенням), рівним нулю. А при роботі з часовими рядами таке допущення виявляється в багатьох випадках невірним.

У даному пункті ми полагаємо, що збурювання ε_t *(t=1,..., n)* задовольняє передумовам регресійного аналізу, тобто умовам нормальної класичної регресійної моделі (п. 3.4 даної частини посібника).

Задача 4. За даними таблиці 5.1 дати точкову і з надійністю 0,95 інтервальну оцінку прогнозу середнього і індивідуального значень попиту на деякий товар на момент *t=9* (дев'ятий рік), вважаючи, що тренд лінійний, а збурювання задовольняють вимогам класичної моделі.

Рішення: Вище, у задачі 2, отримано рівняння регресії $\hat{y}_t=181{,}32+25{,}679t$, тобто щорічно попит на товар збільшувався в середньому на 25,7 од. Треба оцінити умовне математичне очікування $M_{t=9}(Y)=\bar{y}(9)$. Оцінкою $\bar{y}(9)$ є групова середня: $\hat{y}_{t=9} = 181{,}32 + 25{,}679\cdot 9 =$ 412,4 (од,). Знайдемо по формулі (3.28) п. 3.4. даної частини посібника оцінку s^2 дисперсії σ^2: $s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-2} = \frac{7059{,}2}{8-2} = 1176{,}5$. Обчислимо оцінку дисперсії групової середньої по формулі:

$$s_{\hat{y}}^2 = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right). \tag{5.11}$$

$$s_{\hat{y}_{t=9}}^2 = 1176{,}5\left(\frac{1}{8} + \frac{(9-4{,}5)^2}{42}\right) = 714{,}3;$$

$$s_{\hat{y}_{t=9}} = \sqrt{714{,}3} = 26{,}73 \text{ од.}$$

(тут ми використали дані, отримані в задачі 2:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t}{n} = \frac{36}{8} = 4{,}5;\ \sum_{t=1}^{n}(t-\bar{t})^2 = \sum_{t=1}^{n} t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{8} t\right)^2}{n} = 204 - \frac{36^2}{8} = 42).$$

По даним статисничних таблиць $t_{0,95;6}$=2,45. Тепер по формулі (відомої з статистики):

$$\hat{y} - t_{1-a;k}\cdot s_{\hat{y}} \le M_x(Y) \le \hat{y} + t_{1-a;k}\cdot s_{\hat{y}} \tag{5.12}$$

інтервальна оцінка прогнозу середнього значення попиту:

$$412{,}4 - 2{,}45\cdot 26{,}73 \le \bar{y}(9) \le 412{,}4+2{,}45\cdot 26{,}73, \text{ або}$$

$$346{,}9 \le \bar{y}(9) \le 477{,}9 \text{ од.}$$

Для знаходження інтервальної оцінки прогнозу індивідуального значення в *y'(9)* обчислимо дисперсію його оцінки по формулі:

$$s_{\hat{y}_0}^2 = s^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right) \tag{5.13}$$

$$s_{\hat{y}_{t_0=9}}^2 = 1176{,}5\left(1+\frac{1}{8}+\frac{(9-4{,}5)^2}{42}\right) = 1890{,}8,$$

$$s_{\hat{y}_{t_0=9}} = 43{,}48 \text{ од.}$$

а потім за формулою:

$$\hat{y}_0 - t_{1-a;n-2}\cdot s_{\hat{y}_0} \le y_0' \le \hat{y}_0 + t_{1-a;n-2}\cdot s_{\hat{y}_0} \tag{5.14}$$

саму інтервальную оцінку для *y'(9)*:

$$412{,}4-2{,}45\cdot 43{,}48 \le y'(9) \le 412{,}4+2{,}45\cdot 43{,}48, \quad \textit{або}$$

$$305{,}9 \le y'(9) \le 518{,}9 \text{ од.}$$

Отже, з надійністю 0,95 середнє значення попиту на товар на дев'ятий рік буде від 346,9 до 477,9 од., а його індивідуальне значення – від 305,9 до 518,9 од.

Прогноз розвитку досліджуваного процесу на основі екстраполяції часових рядів може виявитися ефективним, як правило, у рамках короткострокового, у крайньому випадку, середньострокового періоду прогнозування.

Задачі до розділу 5

1. Є наступні дані про врожайність озимої пшениці y_t (ц/га) за 10 років:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	20,2	17,1	7,7	15,3	16,3	19,9	14,4	18,7	20,7

   Знайти середнє значення, середнє квадратичне відхилення і коефіцієнти автокореляції (для лагів *τ= 1;2*) часового ряду.
2. За даними задачі 1 знайти рівняння тренда часового ряду y_t уважаючи, що він лінійний, і перевірити його значимість на рівні 0,05.

3. За даними задачі 1 провести згладжування часового ряду y_t методом ковзних середніх, використовуючи просту середню арифметичну з інтервалом згладжування: а) $m = 3$; б) $m = 5$.
4. У таблиці представлені дані, що відображають динаміку зростання доходів на душу населення y_t (ум. гр.од.) за восьмирічний період:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	1133	1222	1354	1389	1342	1377	1491	1684

Припускаючи, що тренд лінійний і умови класичної моделі виконані: а) знайти рівняння тренда і оцінити його значимість на рівні 0,05; б) дати точковий і з надійністю 0,95 інтервальні прогнози середнього і індивідуального значень доходів на дев'ятий рік.

ЧАСТЬ 4. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Розділ 1. Основи моделювання та прогнозування економіки

1.1. Особливості застосування моделювання в економіці

Проникнення математики в економічну науку пов'язане з подоланням значних труднощів. У цьому частково була «винна» математика, що розвивається протягом декількох сторіч переважно в напрямку потреб фізики і техніки. Але головні причини криються усе ж у природі економічних процесів, у специфіці економічної науки.

Більшість досліджуваних економічною наукою об'єктів можуть бути охарактеризовані кібернетичним поняттям «складна система».

Складність системи визначається кількістю елементів, що в неї входять, зв'язками між цими елементами, а також взаємовідносинами між системою і середовищем. Економіка країни має всі ознаки дуже складної системи. Вона об'єднує величезну кількість елементів, відрізняється різноманітністю внутрішніх зв'язків і зв'язків з іншими системами (природне середовище, економіка інших країн тощо).

Складність економіки іноді розглядалося як обгрунтування неможливості її моделювання, вивчення засобами математики. Але така точка зору в принципі хибна. Моделювати можна об'єкт будь-якої природи і будь-якої складності. І саме складні об'єкти представляють найбільший інтерес для моделювання; саме тут моделювання може дати результати, які не можна одержати іншими засобами досліджень.

Потенційна можливість математичного моделювання будь-яких економічних об'єктів і процесів визначає її успішне здійснення на даному рівні економічних і математичних знань, наявності конкретної інформації і обчислювальної техніки.

1. Методи економіко-математичного моделювання

Поширеною методикою опису тих чи інших економічних процесів і явищ є моделювання.

Моделювання – одна з основних категорій теорії пізнання, дослідження будь-яких явищ, процесів або систем об'єктів шляхом побудови і вивчення їхніх моделей.

Метод економічного моделювання, розробка якого стосовно до прогнозування зустрічає серйозні труднощі, вимагає до себе особливої уваги. Труднощі застосування методу моделювання в прогнозуванні викликаються складністю структури економічного розвитку і тому змушують користуватись не єдиною моделлю, а системою методів і моделей, що характеризується певною ієрархією і послідовністю.

Під системою економічних моделей прогнозування варто розуміти сукупність методик і моделей, що дозволяють дати погоджений і несуперечливий прогноз, який грунтується на вивченні техніко-економічних тенденцій і закономірностей, що склалися в поточному і майбутніх періодах, оснований на заданих цільових настановах, на наявних ресурсах, виявлених потребах економіки та їх динаміці.

Така система припускає певну послідовніс використання моделей для цілей складання комплексного прогнозу. Під економіко-математичною моделлю розуміють методику доведення до повного, вичерпного опису процесу одержання й обробки вхідної інформації та правил розв'язання задачі.

Використання математичного апарату для опису моделей пов'язане з перевагами математичного підходу до багатостадійних процесів обробки інформації, використанням ідентичних засобів формування задач, пошуку методів їх вирішення, фіксації цих методів і перетворення їх у програми, розраховані на застосування засобів обчислювальної техніки.

Застосування математичних методів є необхідною умовою для розробки і використання методів прогнозування, що забезпечує високі вимоги до обгрунтованості, дієвості і своєчасності прогнозів економічних процесів.

2. Класифікація економіко-математичних моделей

Засобом вивчення закономірностей розвитку економіки є економіко-математична модель. Вона являє собою систему формалізованих співвідношень, які описують основні взаємозв'язки елементів, що утворюють економічну систему.

Модель є одним з найважливіших інструментів економічного прогнозування досліджуваного процесу. Термін «*модель*» означає певний умовний образ об'єкта дослідження, економічного процесу. Змістом процесу моделювання є конструювання моделі на основі попереднього вивчення об'єкта або процесу, виділення його характеристик чи ознак, теоретичний і експериментальний аналіз моделі, співставлення результатів моделювання з фактичними даними про об'єкт чи процес, коректування й уточнення моделі.

Для класифікації математичних моделей економічних процесів і явищ використовуються різні підстави. За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяють на:

- теоретико-аналітичні, які використовуються в дослідженнях загальних властивостей і закономірностей економічних процесів;
- прикладні, які застосовують в розв'язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, керування).

Відповідно до загальної класифікації математичні моделі поділяють на функціональні і структурні, а також включають і проміжні форми (структурно-функціональні). У дослідженнях частіше застосовуються структурні моделі, оскільки для прогнозування і керування велике значення мають взаємозв'язки підсистем.

Існують дескриптивні і нормативні моделі. *Дескриптивні моделі* відповідають на запитання: “як це відбувається?” або “як це напевно може далі розвиватися?”, тобто вони тільки пояснюють, що спостерігаються факти або дають ймовірний прогноз. *Нормативні моделі* відповідають на запитання: “як це повинно бути?”, тобто припускають цілеспрямовану діяльність.

Багато економіко-математичних моделей поєднують ознаки дескриптивних і нормативних моделей. Типова ситуація, коли нормативна модель складної структури об'єднує окремі блоки, що є частковими дескриптивними моделями.

За характером відображення причинно-наслідкових зв'язків розрізняють моделі *жорстко детерміновані і моделі*, що *враховують випадковість і невизначеність*. Необхідно розрізняти невизначеність, що описується ймовірносними законами, і невизначеність, для опису якої закони теорії ймовірності не можна застосовувати. Другий тип невизначеності набагато складніший для моделювання.

Певні види економічних моделей можуть бути класифіковані в залежності від критерію оптимізації найкращого чи очікуваного результату.

З урахуванням фактора часу моделі можуть бути:

- *статичними* (тобто коли обмеження в моделі встановлені для одного певного відрізка часу протягом планового періоду і при цьому мінімізуються витрати чи максимізується кінцевий результат);
- *динамічними* (тобто обмеження встановлені для декількох відрізків часу за тієї ж мінімізації чи максимізації ефекту за весь плановий період).

За тривалістю часового відрізку, що розглядається, розрізняються моделі *короткострокового* (до року), *середньострокового* (до 5 років), *довгострокового* (10…15 і більш років) прогнозування.

За способом математичного описування досліджуваних процесів моделі можна поділити на два широких класи – *аналітичні та алгоритмічні*. В аналітичних моделях процеси функціонування економічної системи подаються у вигляді алгебраїчних виразів, систем рівнянь і систем обмежень на змінні. Ці моделі придатні для дослідження, вони наочні, їх математична структура і результати, моделювання легко аналізуються та інтерпретуються. Алгоритмічні моделі поєднують у своїй структурі традиційні математичні форми описування процесів з логічними і логікоеврістичними процедурами. Такі моделі є алгоритмічно заданими функціями, складна структура яких не підвладна прямому аналізові.

Змінні економетричної моделі поділяються на *екзогенні* (зовнішні) і *ендогенні* (внутрішні). Наприклад, екзогенний фактор у моделі може означати для валютного ринку – рівень індексу Dow Jones; ендогенний – рівень інфляції в країні.

Основним інструментом прогнозування економічних процесів виступають *імітаційні моделі*. Цей клас є сукупністю моделей системи управління і функціонування виконавчих елементів, де функції управління та координації цілеспрямованої діяльності елементів і підсистем виконують експерти.

Прийнято розрізняти наступні економетричні моделі: факторні; структурні; комбіновані.

Більше всього на практиці використовують *факторні моделі*. Факторні моделі описують залежність рівня і динаміки того чи іншого економічного показника від рівня і динаміки економічних показників-аргументів, що впливають на нього.

Загальна класифікація економіко-математичних моделей включає більше десяти основних ознак. З розвитком економіко-математичних досліджень проблема класифікації моделей, що застосовуються, ускладнюється. Поряд із появою нових типів моделей і нових ознак класифікації, здійснюється процес інтеграції моделей різних типів у більш складні модельні конструкції.

3. Макроекономічне моделювання і прогнозування

Економіко-математичні моделі широко застосовуються при складанні економічних прогнозів на макроекономічному рівні. До таких моделей, насамперед, відносяться однофакторні і багатофакторні моделі моделювання валютних курсів, економічного зростання, моделі розподілу національного доходу, структурні, міжгалузеві, галузеві, модель зростаючої економіки, сіткові моделі, розподілу заробітної плати і доходів та інші.

Специфіка макроекономічних процесів полягає в тому, що з одного боку вони мають статичний характер, значну сталість, що дозволяє виявити найважливіші тенденції розвитку, а з іншого – на макроекономічному рівні, відсутні конкретні технологічні взаємозв'язки, внаслідок чого помітно знижується цінність техніко-економічної інформації.

Прогнозування за економетричними моделями у порівнянні з іншими методами дає, принаймні, дві явні переваги.

1. Основною перевагою економетричних моделей є їх здатність кількісно виражати економічні зв'язки між багатьма змінними, що впливають на економіку.
2. Економетричні моделі випадкових взаємозв'язків дають однозначні оцінки змінним і тим самим забезпечують стабільність, якої бракує іншим методам, і гнучкість у пристосуванні до умов, що змінюються. Для підвищення точності параметрів моделі і, відповідно, поліпшення прогнозування можна використовувати дані про похибки.

Макроекономічні моделі складаються з великої кількості рівнянь, кожне з яких описує той чи інший бік розвитку економіки. Вони базуються на припущеннях про можливі зміни грошової, бюджетної та податкової політики, про рівень цін на енергоносії, зокрема нафту, які вводяться в модель як зовнішні змінні. При цьому не слід забувати, що цінність таких прогнозів цілковито залежить від правильності передбачень і динаміки зовнішніх змінних. Вибір моделей прогнозування макроекономічних показників залежить від критеріїв оптимізації й отримання найкращих бажаних результатів.

4. Етапи економіко-математичного моделювання

Ефективним засобом вивчення закономірностей розвитку економіки є економіко-математична модель. Це система формалізованих співвідношень, які описують основні взаємозв'язки елементів, що створюють економічну систему.

Проаналізуємо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

1. Постановка економічної проблеми і її якісний аналіз. Головне тут – чітко сформулювати сутність проблеми, припущення які маємо, і ті запитання, на які потрібно одержати відповіді.
2. Підготовка первинної інформації. Моделювання висуває жорсткі вимоги до інформації. У той же час реальні можливості одержання інформації обмежують вибір моделей, які призначені для практичного використання. При цьому береться до уваги не тільки принципова можливість підготовки інформації, але і витрати на підготовку відповідних інформаційних масивів. Ці витрати не повинні перевищувати ефект від використання додаткової інформації.
3. Побудова математичної моделі. Це етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо).
4. Математичний аналіз моделі. Метою цього етапу є з'ясовування загальних властивостей моделі. Тут застосовуються чисто математичні прийоми дослідження.
5. Чисельне вирішення. Цей етап включає розробку алгоритмів для чисельного розв'язання задачі, складання програм на ЕОМ і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу обумовлені, насамперед, великим обсягом економічних задач, необхідністю обробки значних масивів інформації.
6. Аналіз чисельних результатів і їхнє застосування. На цьому заключному етапі циклу ставиться питання про правильність і повноту результатів моделювання, про ступінь практичної придатності останніх.

Математичні методи перевірки можуть виявляти некоректні результати роботи моделі і тим самим звузити клас потенційно правильних моделей. Неформальний аналіз теоретичних висновків і чисельних результатів, одержаних за допомогою моделі, зіставлення їх із наявними знаннями і фактами дійсності також дозволяє виявляти недоліки постановки економічної задачі, сконструйованої математичної моделі, її інформаційного і математичного забезпечення.

5. Огляд світових макроекономіко-математичних моделей

Моделювання економіки в цілому тісно пов'язане з практикою прогнозування. Воно притаманне окремим країнам, особливо з регульованою економікою.

Лідером моделювання економіки є США. Найбільш відомою американською моделлю є ОВЕ, призначена для вибору заходів державної економічної політики для досягнення рівноваги попиту та пропозиції. Критеріями ефективності цієї моделі є досягнення мінімально можливого рівня безробіття при максимально можливому рівні зростання ВНП. Модель складається з 34 рівнянь.

Уортонськая модель. Призначена для довгострокового прогнозування економіки. Період попередження даної моделі складає 10 років. Містить галузеву таблицю з 265 рівнянь і 324 тотожностей, що описують 47 галузей економіки. Особливістю моделі Уортона є те, що в ній містяться нелінійні економетричні залежності на зразок кривої Філліпса, яка графічно відтворює зв'язок між рівнем заробітної плати та агрегованим рівнем безробіття. Параметри модельних рівнянь оцінюються за допомогою двокрокового методу найменших квадратів.

Бруклінськая модель. Є найбільш докладною і призначена для аналізу і довгострокового прогнозування економіки США. Складається з 30 галузевих блоків, 68 стохастичних рівнянь, оперує 200 ендогенними і 100 екзогенними змінними. Головна мета побудови моделі такого розміру полягала в узагальненні та ув'язці вже існуючих моделей із включенням секторів економіки, які не були описані раніше. На жаль, Бруклінгська модель була не досить точною в прогнозних оцінках і після значних похибок в розрахунках національного доходу у 1960 р. її більше не підтримували як прогностичну, а використовували для аналізу економічної ситуації. Проте значення цієї моделі в тому, що вона вперше продемонструвала можливість практичного втілення макроекономічних моделей великих розмірів.

Модель Санта-Льюіса є однією з найменьших макроеконометричних моделей – вона складається з 5 лінійних рівнянь, доповнених 4 тотожностями для дослідження впливу альтернативних варіантів грошово-кредитної та фіскальної політики. Ця модель має велике значення для оцінки грошових агрегатів у визначенні монетарних і фіскальних впливів на зміни рівня загальних сукупних витрат, реального ВВП, безробіття, цін і процентних ставок.

Найбільш використовувані в практиці є *макроекономічні моделі Франції*. Перша макроекономічна модель під назвою FIFI була розроблена у Франції у 60-ті роки. У ній було 2000 рівнянь, включаючи рівняння, що характеризували поведінку суб'єктів господарювання та елементи фінансового моделювання. Потім з'явилися більш універсальні моделі – STAR та ZOGOL, які були досить розгалуженими статичними моделями. Лише у 1978 році була зроблена спроба розробити динамічну багатосекторну модель DMS, до якої входило 1300 рівнянь, з яких 300 описували поведінку суб'єктів господарювання. Крім того, вона охоплювала 13 галузей економіки, що дещо ускладнювало імітаційні розрахунки та прогнозування. Головним недоліком французьких прикладних моделей є відсутність опису функціонування та впливу фінансового сектора на діяльність реального сектора економіки.

Характерним для всіх поданих моделей є відсутність моделювання фінансових ринків, яка пов'язана з необхідності врахування в моделях коливання відсоткової ставки та обмінного курсу.

1.2. Поняття економічного прогнозування

Суспільне життя неможливе без передбачення майбутнього, без прогнозування перспектив розвитку. Економічні прогнози необхідні для визначення шляхів розвитку суспільства й економічних ресурсів, що забезпечують його досягнення, для виявлення найбільш ймовірних і економічно ефективних варіантів довгострокових, середньострокових і поточних планів, обгрунтування основних напрямків економічної і технічної політики, передбачення наслідків прийнятих рішень і здійснюваних у даний момент заходів. В умовах науково-технічного прогресу й удосконалення економічної системи держави, прогнозування стає одним з вирішальних наукових факторів формування стратегії і тактики суспільного розвитку.

Таким чином, сучасні умови вимагають максимального розширення фронту прогнозування, подальшого удосконалення методології і методики розробки прогнозів. Чим вищий рівень прогнозування процесів суспільного розвитку, тим ефективнішим є планування і керування цими процесами в суспільстві.

Процес прогнозування складається з ряду етапів, кожний з яких вирішує певну задачу: 1) визначення задачі – уточнюється об'єкт прогнозу, формуються мета і задачі, визначається точність і час випередження прогнозу; 2) формування об'єкта прогнозу відповідно до поставленого завдання – визначається структура об'єкта, виділяються основні фактори, з'ясовується їх підпорядкованість, ієрархічність, взаємозв'язок; 3) збір ретроспективної інформації про об'єкт – визначаються джерела інформації, розробляється методика переробки і подання інформації, встановлюються її обсяги; 4) формалізація задачі – розробляється методика формалізованого подання інформації і здійснюється вибір класу моделей опису об'єкта прогнозу; 5) вибір методів і алгоритму – серед відомих вибирається найбільш придатний метод прогнозування, розробляється відповідний алгоритм і оцінюється точність прогнозу; 6) моделювання на основі ретроспективних даних оцінки якості моделі; 7) видача результатів прогнозу.

Існує кілька основних понять в галузі прогнозування. Переконливе тлумачення цих економічних понять дається в проекті Закону України «Про державне прогнозування, планування і розробку програм економічного і соціального розвитку України та її регіонів», автором якого є доктор економічних наук, професор Бесєдін В.Ф.

Прогнозування – це отримання інформації про майбутнє; це передбачення, яке поділяється на наукове і ненаукове (інтуїтивне, повсякденне та релігійне - псевдопередбачення).

Прогноз – це науково обгрунтоване, ймовірне судження про можливі стани об'єкта в майбутньому, про альтернативні шляхи і терміни його здійснення. Процес розробки прогнозів називається прогнозуванням.

Прогнозування – специфічний вид пізнавальної діяльності, що припускає дослідження ще не існуючого об'єкта. Прогнозування – процес формування прогнозу про розвиток об'єкта на основі вивчення тенденцій його розвитку. Прогнозування має дати відповідь на такі запитання: а) чого найбільш ймовірно слід очікувати в майбутньому?; б) яким чином необхідно змінити умови, щоб досягти бажаного стану об'єкта в майбутньому?

Одним з важливих напрямків прогнозування суспільного розвитку є економічне прогнозування.

Економічне прогнозування – це процес розробки економічних прогнозів, заснований на наукових методах пізнання економічних явищ і використанні всієї сукупності методів, засобів і способів економічної прогностики. Предметом економічного прогнозування є передбачення економічного стану функціонуючих об'єктів у майбутньому.

З типологією прогнозів тісно пов'язане питання про джерела інформації про майбутнє і способи прогнозування. Розрізняють три основні джерела прогнозної інформації: накопичений досвід, екстраполяція існуючих тенденцій, побудова моделей прогнозованих об'єктів стосовно очікуваних чи намічених умов.

1. Методологія, принципи та функції прогнозування

Економічний прогноз має дати об'єктивне достовірне уявлення про те, що може бути за тих чи інших умов. Він може стати надійною основою для прийняття рішень. Прогноз як економічне дослідження має базуватися на певних методологічних принципах.

Методологія прогнозування – це сукупність методів, прийомів і принципів, які дозволяють сформувати шляхи й методи забезпечення збалансованого розвитку народного господарства на основі пізнання об'єктивних економічних законів, закономірностей розвитку суспільного виробництва, тенденцій і перспектив технічного прогресу.

У процесі розробки прогнозу багато потрібної інформації не вистачає, що компенсується шляхом використання методів, у результаті застосування яких одержуємо знання про ймовірність реалізації кожного конкретного варіанта події. Для цього використовуються логічний аналіз ситуації, висновки експертів, різні теоретико-ймовірнісні та теоретико-групові методи тощо, враховуючи мінімізацію помилок прогнозу. Зокрема при експертній оцінці для прогнозування використовується не лише інформація, що передається каналами зв'язку, а й інформація, яка міститься в досвіді та інтуїції вченого, тобто інтегрована з конкретною особою. У зв'язку з цим можна сказати, що прогнозування є свого роду мистецтвом.

Розроблений прогноз фіксується в термінах певної мовної системи, яка відповідає таким вимогам: 1) у момент висловлювання прогнозу неможливо однозначно визначити його вірогідність; 2) має бути посилання на інтервал часу і місце здійснення прогнозованої події; 3) цей інтервал повинен бути чітко окресленим; 4) має існувати спосіб апріорної оцінки ймовірності появи прогнозованих подій; 5) має існувати спосіб перевірки здійснення прогнозованої події.

З урахуванням вимог, що висуваються до прогнозування виділяють такі *основні принципи*:

- принцип цілі є одним з провідних принципів для складних динамічних систем;
- науковість, тобто обгрунтування прогнозів з урахуванням об'єктивних закономірностей ринкових змін в державі;
- принцип системності – визначає, що економіка розглядається як єдиний об'єкт і водночас, як сукупність відносно самостійних блоків;
- принцип оцінки сучасного стану ринку України;
- принцип збалансованості – погодженість показників;
- принцип адекватності – якості прогнозу;
- принцип альтернативності можливих змін в економіки.

Основними *функціями економічного прогнозування* є:

- науковий аналіз економічних, соціальних, науково-технічних процесів і тенденцій;
- дослідження об'єктивного розвитку економічних процесів у конкретних умовах у певний період;
- оцінка об'єкта прогнозування;
- виявлення альтернатив розвитку економічних процесів і соціального розвитку;
- нагромадження наукового матеріалу для обгрунтованого вибору певних рішень.

Різні методи прогнозування дозволяють одержувати прогнозну інформацію у вигляді якісного вербального опису, тимчасових рядів, спільного якісно-кількісного опису об'єкта прогнозування. Якщо внаслідок неоднорідності інформації, одержаної при дослідженні різними методами, не може бути забезпечений взаємозв'язок прогнозів, то така ситуація вимагає адаптації методів до конкретного об'єкта і мети прогнозного дослідження, що є закономірністю.

2. Методи економічного прогнозування

В наш час, за оцінками вчених, нараховується понад 200 різних методів прогнозування. Однак на практиці використовується в ролі основних 15…20 методів.

Метод прогнозування – сукупність способів і прийомів мислення, що дозволяють на основі аналізу ретроспективних, і ендогенних даних, а також їх змін у розглянутому періоді часу вивести судження певної вірогідності відносно майбутнього розвитку об'єкта.

В існуючих джерелах представлені різні класифікаційні принципи методів прогнозування. Однією з найбільш важливих класифікаційних ознак методів прогнозування є ступінь формалізації, що досить повно охоплює прогностичні методи. Другою класифікаційною ознакою можна назвати загальний принцип дії методів прогнозування, третьою – спосіб одержання прогнозної інформації.

У більшості класифікаційних схем методи прогнозування розділяються на три основні класи: екстраполяції; експертних оцінок; моделювання. Область застосовності основних класів методів прогнозування показана в таблиці 1.1.

На першому рівні всі методи за ознакою поділяються на три класи, які наведено на рисунку 1.1.

Таблиця 1.1

Основні методи прогнозування

Вид прогнозу	Клас методів прогнозування		
	екстраполяційні	моделювання	експертні
Короткостроковий	+	+	+
Середньостроковий	-	+	+
Довгостроковий	-	-	+

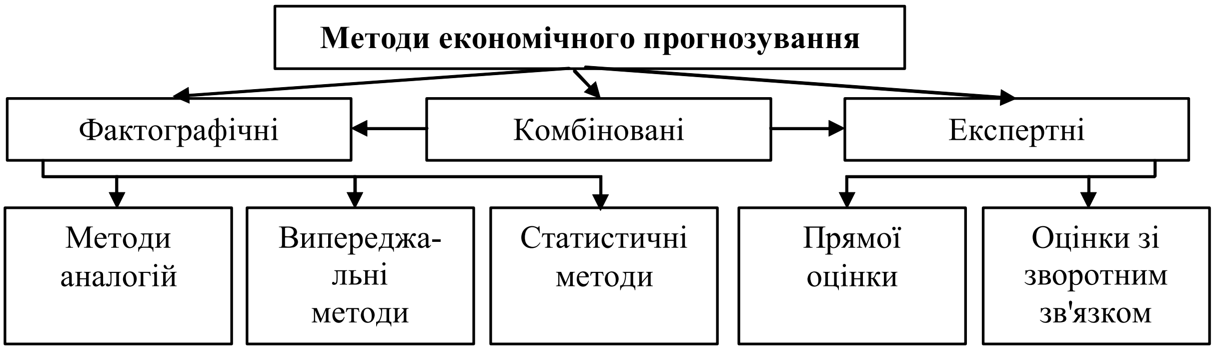


Рисунок 1.1 – Методи економічного прогнозування

Фактографічні – базуються на фактичній інформації про об'єкт прогнозування і його минулий розвиток. *Комбіновані* – методи зі змішаною інформаційною основою. У свою чергу, класи експертних і фактографічних методів підрозділяються на підкласи за методами обробки інформації. *Експертні* – методи, засновані на думках експертів у даній галузі знань з наступною обробкою отриманих результатів з метою виявлення основних критеріїв і тенденцій, властивих об'єкту.

Для моделювання та прогнозування макроекономічних показників, пропонується використовувати комбінований метод прогнозування, який об'єднує в собі фактографічний та експертний метод, по наступних причинах:

1. Експертні методи в прогнозуванні застосовуються в таких випадках: при відсутності доволі представницької і достовірної статистичної характеристики об'єкта; великої невизначеності середовища функціонування об'єкта; дефіциті часу чи в екстремальних ситуаціях, що є певними ознаками прогнозування на макрорівні.

2. Фактографічний метод аналогій спрямований на виявлення подібності в закономірностях розвитку різних економічних процесів. До них відносяться методи математичних і історичних аналогій.

Методи історичних аналогій як аналог використовують процеси однакової природи, що передують у часі розвитку об'єкта прогнозування.

3. Класифікація методів прогнозування

Комплекс методів прогнозування постійно вдосконалюється і поповнюється новими методами. Однією з центральних проблем є розробка обгрунтованої класифікації і вибір методів прогнозування.

На рисунку 1.2 представлена класифікаційна схема методів прогнозування, яка запропонована Глівенко С.В., та яка доповнена автором – методом використання нечіткої логіки в економічному прогнозуванні і моделюванні.

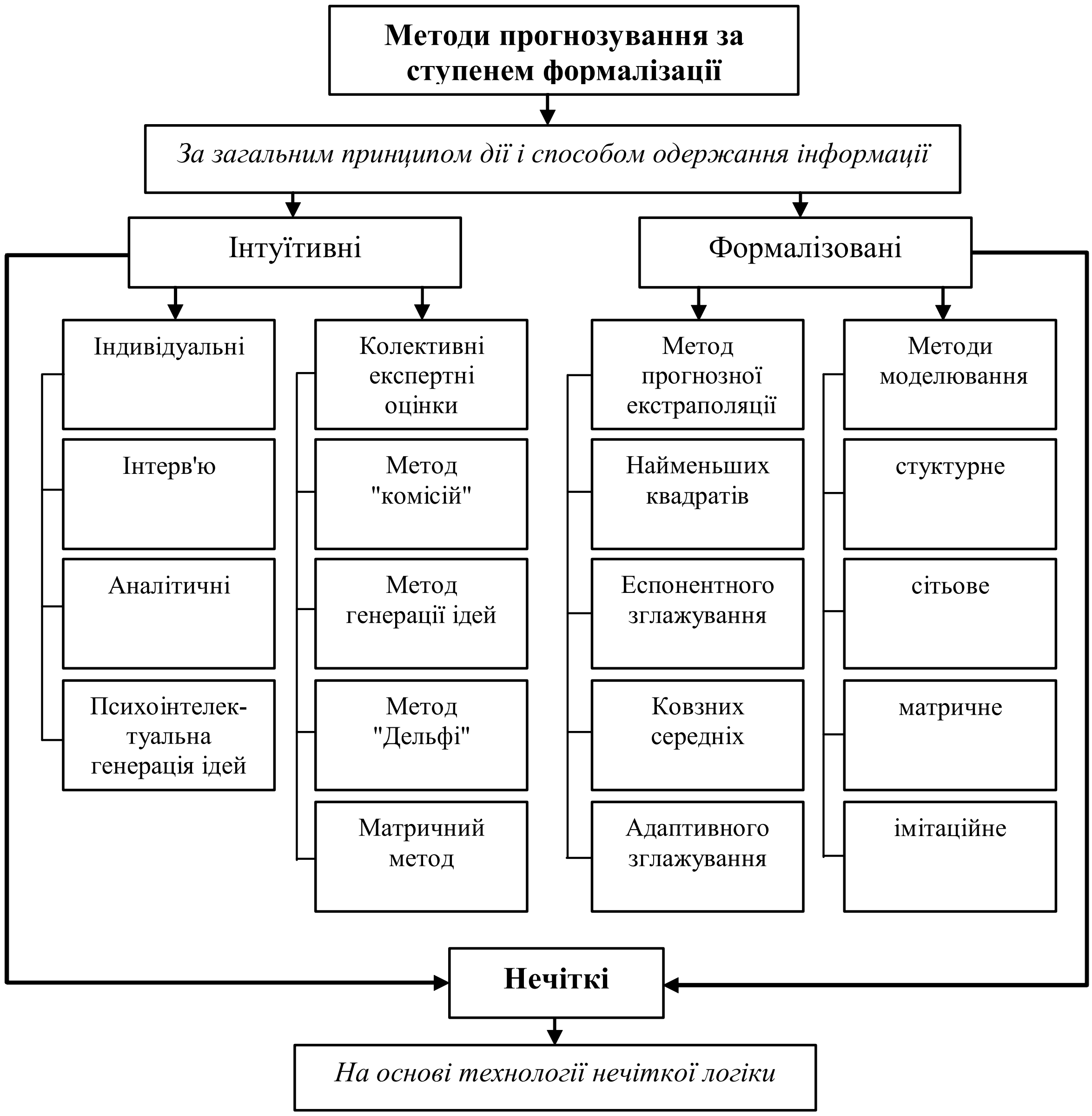


Рисунок 1.2 – Класифікація методів прогнозування

За ступенем формалізації класичні методи економічного прогнозування можна розділити на: інтуїтивні і формалізовані.

Інтуїтивні методи прогнозування використовуються в тих випадках, коли неможливо врахувати вплив багатьох факторів через значну складність об'єкта прогнозування. У цьому випадку використовуються оцінки експертів. При цьому розрізняють індивідуальні і колективні експертні оцінки. У групу формалізованих методів входять дві підгрупи: екстраполяції і моделювання. Формалізовані методи прогнозування базуються на аналітичних сітках, що містять рівняння, які репрезентують попит і пропозицію.

Розглянуті класи інтуїтивних і формалізованих методів подібні за своїм складом до експертних і фактографічних методів.

4. Особливості прогнозування макропоказників

Основною особливістю прогнозування макропоказників є те, що будь-яка макрозмінна визначається безліччю компонентів і має тенденцію до меншого відхилення від середньої, ніж кожна з її складових. Прогнозування макропоказників насамперед пов'язане з розв'язанням широкого кола задач при прогнозуванні економічного зростання економіки держав. Моделі економічного зростання є різновидом багатомірних моделей економічного розвитку. Метою побудови таких моделей є прогноз основних показників, що характеризують розвиток економіки та її структуру.

Моделювання економіки в цілому тісно пов'язане з практикою і властиве не лише країнам з державно-регульованою економікою, але і високорозвиненим державам з так званою «вільною ринковою економікою».

Процес макроекономічного прогнозування передбачає, як правило, постановку мети; вона визначає напрями наступних дій – отримання необхідної інформації, її обробка, оцінка та аналіз, визначення перспектив і ймовірність реалізації прогнозу. Всі етапи процесу розробки прогнозу мають бути узгоджені з визначеними цілями і завданнями.

Макроекономічне прогнозування в умовах нестабільності ринкової економіки є складною проблемою. Моделей, які дозволяли б здійснювати прогноз макроекономічного розвитку економіки, в нашій практиці поки в завершеному вигляді, поки що немає.

Загальновідомо, що на фінансових ринках основна увага приділяється взаємодії між теперішньою та майбутньою вартістю активів. Співвідношення між короткостроковими та довгостроковими відсотковими ставками, поточний та майбутній обмінні курси, грошова та фіскальна політика впливають на фінансовий ринок. Тому в макроекономічних прогнозах намагаються передбачити розміри названих величин і таким чином вплинути на процес прийняття рішень.

5. Верифікація, якість і оцінка результатів моделювання та прогнозування

У сучасній прогностиці поняття *верифікації* трактується як оцінка вірогідності і точності чи обгрунтованості прогнозу. Відомі методи верифікації спрямовані більшою мірою на оцінку методу прогнозування, з використанням якого був отриманий той чи інший прогнозний результат, ніж на оцінку якості самого прогнозного результату. Однак і ця проблема в методах верифікації не зважується повною мірою, тому що якість роботи методу можна оцінити тільки відносно якості використаної інформації, оскільки той самий метод може видати рівноймовірнісний достовірний і недостовірний результат у залежності від якості використаної для одержання прогнозу інформації. Що ж стосується оцінки вірогідності і надійності самого прогнозу, то збіг прогнозних результатів, отриманих різними методами, з різних джерел і т.п., ще не свідчить про надійність і якість прогнозу, бо останнє залежить від того, яке рішення було прийняте на основі розробленого прогнозу.

Узагальнюючи накопичений досвід з проблеми верифікації, можна припустити, що з урахуванням сучасних уявлень і перспективних досліджень розвиток теорії даного питання буде грунтуватись на таких поняттях, як верифікація і якість прогнозу.

Верифікація – це сукупність критеріїв, способів і процедур, що дозволяють на основі багатобічного аналізу оцінювати якість одержуваного прогнозу.

Верифікація має специфічний зміст у дослідженні майбутнього, який полягає в тому, що немає загальноприйнятого комплексного, загального критерію і відповідного йому методу, що описує якість прогнозу. На основі вищесказаного можна зробити висновок про те, що верифікація прогнозів означає синтез якості на основі його багатобічного аналізу.

Якість прогнозу – це сукупність таких характеристик прогнозу, що у комплексі дозволяють зробити його ефективним, корисним у керуванні, забезпечують одержання достовірного опису об'єкта на визначену перспективу і можливість достовірного використання прогнозних результатів для процедури керування.

Існують способи оцінки виконаного прогнозу, що призначені для його поліпшення. Порівняння даних прогнозу з реальними цифрами і з даними інших прогнозів може стати вкрай корисною практикою. Для захисту своїх інтересів, так само, як і для більш розумного використання результатів своїх досліджень, економісти-прогнозисти повинні наполягати на об'єктивних і систематичних процедурах для огляду й оцінки своєї роботи.

Необхідно розуміти, що прогноз не може бути абсолютно точним, чого і не потрібно, якщо оцінка і використання прогнозу здійснюються належним чином. Оцінка результатів моделювання та прогнозування на ринку може бути зроблена наступним чином – це порівняння його даних з фактичними результатами і визначення відхилень, виражених або в грошових одиницях, або у відсотках.

Особливістю моделювання ринку є те, що не достовірність є критерієм якості, а його корисність в прийнятті рішень. Корисність же прогнозу для цілей прийняття рішень залежить від логічної структури, що прийнята в пронозі і якості використаної інформації.

6. Використання результатів макроекономічного прогнозування для планування діяльності

Прогноз – це пошук реалістичного і економічно виправданого рішення. Прогнозування виявляє процеси, які слід враховувати в майбутньому періоді, і дозволяє обгрунтувати заходи активного впливу на них.

Необхідність прогнозування спричиняється тим, що майбутнє невизначене і ефект багатьох рішень, які приймаються зараз, протягом певного часу не відчувається. Тому точне передбачення майбутнього підвищує ефективність процесу прийняття рішень.

Макроекономічні прогнози потрібні уряду, суб'єктам промислової та фінансової діяльності. Очевидно, що для планування серед інших даних необхідно мати оцінки майбутніх обсягів національного доходу, рівня безробіття, відсоткової ставки та цін. Також важливі дані про імпорт і експорт, що безпосередньо впливають на національний доход і разом з грошовою та фінансовою політикою визначають рівень курсу національної валюти.

Головне призначення прогнозування як однієї зі специфічних форм планової діяльності полягає в аналізі та виявленні основних закономірностей і тенденцій розвитку економіки, передбаченні змін умов і факторів цього розвитку, створенні наукової бази для розробки довгострокової економічної політики та прийняття рішень щодо її реалізації.

Суттєва різниця між планом і прогнозом полягає в тому, що план – це відображення та втілення уже прийнятого рішення.

Планування – це проектування бажаного майбутнього та розробка ефективних шляхів його досягнення з урахуванням сьогоденних умов і можливостей.

Економічне прогнозування слід розглядати як необхідний і важливий науково-аналітичний етап загального процесу планування. Разом з тим, воно спрямоване не на розробку конкретних планових заходів, а на обґрунтування тенденцій розвитку соціально-економічних процесів, визначення проблем, які необхідно вирішити в майбутньому.

В усіх економічних системах прогноз є необхідною складовою частиною процесу планування та розробки економічної політики. Він дає змогу окреслити контури й намітити результати економічного розвитку в плановому періоді на основі аналізу вхідних умов і очікуваних тенденцій розвитку.

Розділ 2. Теоретичні основи моделювання на основі нечіткої логіки

2.1. Переваги теорії нечіткої логіки

Дослідження в галузі проектування систем прогнозування економічних показників і процесів показали, що невизначеність при прийнятті управлінських рішень, яка властива більшості економічних ситуацій, має загальну природу, і подолання цієї невизначеності є край необхідним. На думку фахівців це можна зробити двома основними шляхами.

Перший шлях – врахування всіх можливих чинників, що впливають на поведінку об'єкта прогнозування. На жаль, через специфіку складних об'єктів це є спроба "осягнути неосяжне". Якщо і можна побудувати таку модель, використовуючи традиційні методи, то вона буде громіздкою і непридатною для практичного використання, що пов'язано як з функціональними, так і з економічними аспектами.

Другий шлях – спрощення моделі в рамках традиційних методів, що неминуче призведе до неадекватності прийнятих рішень внаслідок недостатньо повного врахування невизначеності.

Таким чином можна зробити висновок, що побудова економіко-математичних моделей, придатних для прогнозування складних економічних процесів на основі використання традиційних методів формалізації вхідних даних, практично неможлива.

Альтернативним способом моделювання роботи складних економічних систем може виступити запровадження *нечіткості* при описі вхідних та вихідних даних (параметрів), що входять до моделі прогнозування. Цей висновок грунтується на *принципі несумісності*. Суть цього принципу полягає в тому, що зі зростанням складності економічних процесів наша здатність робити точні і змістовні твердження про їх поведінку падає до такої межі, за якою такі характеристики як „точність" і „змістовність" стають взаємовиключними. Тому абсолютно точний кількісний опис та аналіз складних об'єктів прогнозування не є ефективним для розв'язування більшості економічних задач, особливо на макрорівні.

При розробці моделей прогнозування економічних показників і процесів потрібно усвідомити, що ключовими елементами для аналізу й моделювання повинні стати не конкретні числа (чинники, параметри), а *певні нечіткі множини*. Справді, логіка міркувань людини зазвичай не є двозначною чи багатозначною числовою логікою. Це – *логіка з нечіт-*

кими істинами, нечіткими відносинами і правилами. Саме нечітка логіка є найважливішою особливістю людського мислення, саме нечітка логіка характеризує здатність людини узагальнювати інформацію та виділяти головні її особливості, необхідні для прийняття відповідних управлінських рішень.

Здатність людського мислення до нечітких висловлювань дозволяє швидко приймати конкретні та ефективні рішення в найрізноманітніших ситуаціях. Не врахування цього фактора при створенні економіко-математичних моделей прогнозування економічних показників в минулому багато в чому й обумовило недоліки сучасних технологій і систем прийняття економічних рішень та їх підтримки.

На наш погляд, необхідною умовою побудови ефективних моделей прогнозування економічних процесів є всебічне врахування невизначеностей при формалізації й обробці як вхідної, так і вихідної інформації. Врахування невизначеностей безпосередньо залежить від вибору математичного апарату, який буде використовуватись при побудові відповідних економіко-математичних моделей.

На сьогоднішній день для формалізації вхідної та вихідної інформації можуть бути використані: багатозначна логіка, теорія ймовірностей, теорія помилок, теорія інтервальних середніх, теорія суб'єктивних ймовірностей, теорія нечітких множин (теорія нечіткої логіки) та інші.

Порівняння зазначених математичних теорій з погляду можливості їх застосування для формалізації вхідної інформації в економіко-математичних моделях прогнозування економічних показників, наведено в таблиці 2.1.

Аналіз даних таблиці 2.1 показує, що однією з ефективних математичних теорій формалізації й обробки невизначеної інформації є *теорія нечіткої логіки*.

Ця теорія дозволяє з єдиних позицій розглянути різні види невизначеностей, об’єднати кращі досягнення й позитивні властивості інших теорій та одержати новий, більш високий результат.

Теорія нечіткої логіки (або нечітка технологія, або теорія нечітких множин) – це сукупність теоретичних основ, методів, алгоритмів, процедур і програмних засобів, які базуються на використанні нечітких висновків (знань, висловлювань, думок) і оцінок експертів з тих чи інших питань.

Таблиця 2.1 – Порівняльний аналіз математичного апарату, який використовується для формалізації інформації в економіко-математичних моделях

Характеристика, що враховується	Підходи до врахування факторів невизначеності					
	багатозначна логіка	теорія ймовірностей	теорія помилок	теорія інтервальних середніх	теорія суб'єктивних ймовірностей	теорія нечіткої логіки
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1. Врахування фізичної числової невизначеності	-	+	+	+	+	+
2. Врахування фізичної нечислової невизначеності	+	+	-	+	+	+
3. Врахування нечислової лінгвістичної невизначеності	+	-	-	-	+	+
4. Залежність помилки кінцевого результату від точності вхідних даних	не припустима	дуже сильно зростає		зростає		не перевершує
5. Можливість врахування семантичної модальності інформації	+	+	-	-	+	+
6. Можливість врахування рівня (кількісної оцінки) невизначеності	-	+	-	-	+	+
7. Врахування кваліфікації експертів (більш ніж, значно, дуже і т.ін.)	+	-	-	-	-	+
8. Можливість врахування протиріччя між точністю і невизначеністю	+	-	-	+	+	+
9. Ефективність формалізації повного незнання	+	-	+	+	+	+
10. Відсутність вимоги твердого завдання повного переліку подій	+	-	+	+	-	+
11. Можливість ефективного врахування взаємного впливу невизначеностей при обробці інформації	+	-	-	-	-	+
12. Можливість одночасного одержання песимістичних та оптимістичних оцінок і рівень довіри до них	-	+	-	+	+	+
13. Єдиний підхід до представлення точних, невизначених, неповних, нечітких значень параметрів	-	-	-	-	-	+
14. Можливість реалізації алгоритмів обробки інформації	+	+	+	+	+	+

Продовження таблиці 2.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
15. Можливість роботи професійною мовою користувача	+	-	-	-	-	+
16. Простота отримання експертних висновків (висловлювань)	+	-	+	+	-	+
17. Можливість роботи з невизначеною інформацією, яка базується на малих статистичних вибірках	+	-	+	+	-	+
18. Наочність одержаних результатів для розрахунку й оцінювання ризиків	-	-	-	-	-	+

Використання нечіткої логіки ефективне там, де немає можливості чітко формалізувати вхідні змінні (параметри), де переважають висновки (висловлювання) експертів, зроблені в лінгвістичній (вербальній) формі. Наприклад, числові значення курсів валют можуть бути представлені неточно, описово. Так, курс гривні України до долара США може бути визначений так: "*близько 5*", "*від 5 до 6*", „*може бути і 8*"; обсяг грошової маси в обігу „*зросте в червні місяці до 70-80 млрд. гривень, потім стійко протримається до осені, після чого повільно падатиме до 60-65 млрд. гривень*" тощо. Для можливості подання такого роду інформації у вигляді вхідних змінних (параметрів) моделі *визначається частка впевненості в істинності того чи іншого висловлювання*. Нечіткий висновок у цьому випадку може бути визначений словесно (наприклад, словами „*більше*", „*значно більше*", „*менше*" тощо) або графічно у вигляді певної функції у двовимірній системі.

В результаті, висновок, який має для експерта конкретний зміст, в теорії нечітких множин вже не має єдиного значення (чого вимагає традиційна математика), а може відображатися набором значень, кожне з яких має свою частку впевненості. При цьому частка впевненості віддзеркалює вплив і силу дії того чи іншого фактора. Трактування нечітких висновків (висловлювань) здійснюється в кожному конкретному випадку окремо і залежить від сутності цих висновків (висловлювань), а також від чинників, які впливають на суть цих висновків (висловлювань).

Нечіткі висновки (або нечіткі числа), одержані в результаті "не цілком точних вимірювань", багато в чому аналогічні відповідним розподілам теорії ймовірностей, але вільні від недоліків, характерних для цієї теорії. Так, якщо для теорії ймовірностей характерними є мала кількість придатних для аналізу функцій розподілу; необхідність примусової нормалізації цих функцій; дотримання вимог *адитивності* (тобто незалежності факторів впливу); важкість обгрунтування адекватності математичних рівнянь, які пропонуються для опису поведінки економічних процесів, тощо, то для теорії нечітких множин ці положення не є визначальними. Нечіткі методи подання лінгвістичних висловлювань (висновків) дозволяють значно скоротити обсяг обчислень, що, у свою чергу, приводить до збільшення швидкості дії нечітких логічних систем. Окрім того, при зростанні точності нечітких чисел нечітка логіка наближається до стандартної, булевої.

Тому при побудові моделі прогнозування нами пропонується використовувати теорію нечіткої логіки. Основними перевагами використання нечіткої логіки при прогнозуванні економічних показників і процесів є:

- можливість оперувати вхідними даними (параметрами), заданими нечітко, тобто значеннями, що безперервно змінюються в часі (динамічні задачі), та значеннями, які неможливо задати однозначно (наприклад, результати соціологічних опитувань і т.п.);
- можливість нечіткої формалізації критеріїв оцінки результатів за допомогою слів “більшість”, “можливо”, “переважно” і т.п.;
- можливість проведення якісного оцінювання як вхідних чинників (параметрів), так і вихідних результатів (параметрів);
- можливість моделювання складних економічних процесів із заданим ступенем точності та за короткі проміжки часу. Оперуючи моделями, описаними нечіткими рівняннями, по-перше, не потрібно багато часу на з'ясовування точних значень змінних, що входять до цих рівнянь, а по-друге, виникає можливість аналізувати та оцінювати різні варіанти вихідних результатів (параметрів).

Оскільки основні економічні показники, за допомогою яких здійснюється аналіз ринку, можна поділити на дві групи, а саме: на показники, що визначають *кількісні* параметри ринку, та показники, за допомогою яких відображаються *якісні* характеристики цього ринку, то при моделюванні економічних процесів дуже важливим є поєднання показників цих обох груп. В іншому разі розроблені моделі не будуть адекватно віддзеркалювати економічні процеси.

Тому при побудові макроекономічної моделі прогнозування економічних процесів пропонується об’єднати як статистичні, так і експертні методи прогнозування, що є можливим при використанні теорії нечіткої логіки. В результаті створюється новий метод прогнозування макроекономічних показників, наведений на рисунку 2.1. Цей метод дозволяє оперувати як кількісними економічними чинниками (параметрами), так і якісними параметрами (наприклад, лінгвістичними висловлюваннями експертів), що можна вважати новою розробкою в даній галузі знань.

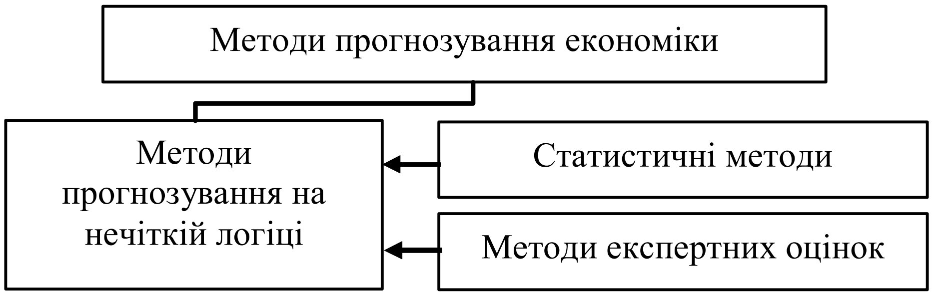


Рисунок 2.1 – Методи прогнозування економіки

В даний час розробками в сфері прогнозування економічних процесів на основі нечіткої логіки займаються, в основному, найбільш впливові фінансові групи. Однією з провідних фірм на теренах СНД у цій сфері є “Тора-Центр” в Росії. У Японії цей напрямок переживає справжній бум. Тут функціонує спеціально створена лабораторія Laboratory for International Fuzzy Engineering Research (LIFE), яка об'єднує 48 компаній, у тому числі Hitachi, Mitsubishi, NEC, Sharp, Sony, Honda, Mazda, Toyota. З закордонних (не японських) учасників LIFE можна виділити компанії IBM, Fuji, Xerox. Інтерес до діяльності LIFE виявляє також NASA.

Завдяки своїм перевагам нечітка логіка та програмні системи на її основі з успіхом обслуговують великий бізнес. Одна із перших моделей прогнозування на основі нечіткої логіки була розроблена в Fuji Bank для вирішення складної фінансової задачі – забезпечення підвищення ефективності біржових операцій банку на ринку цінних паперів у режимі “on-line”. В результаті, протягом першого року використання цієї моделі банк зміг отримувати додатковий дохід в середньому 770000 доларів США на місяць. Нечітка експертна система, що керує грою “електронного трейдера” Fuji Bank, складається з 200 правил, 50 із яких узяті безпосередньо з класичного підручника Murphy з фінансового аналізу.

Разом з тим, описів моделей прогнозування економічних процесів, побудованих на основі теорії нечіткої логіки, в періодичних і наукових виданнях немає, оскільки всі вони є комерційною таємницею.

В результаті можна зробити висновок, що для розв’язання задачі прогнозування економічних процесів за допомогою економіко-математичних моделей при відсутності надійних аналітичних залежностей між вхідними та вихідними змінними (параметрами), використання математичного апарату теорії нечіткої логіки є доцільним та ефективним. Цей апарат дозволяє формалізувати причинно-наслідкові зв'язки між вихідними змінними (параметрами), які необхідно спрогнозувати, та вхідними змінними (параметрами), що впливають на них. Застосування теорії нечіткої логіки (нечітких множин) дозволяє описати ці зв'язки зрозумілою людською мовою, звільняючи дослідження від трудомістких процедур збирання та обробки великих масивів економічної інформації.

Причинно-наслідкові зв'язки між вхідними та вихідними змінними (параметрами) при побудові моделей на основі теорії нечіткої логіки визначаються за допомогою спеціалістів (експертів) у даній галузі знань і складають базу знань моделі прогнозування.

2.2. Загальна характеристика нечіткої логіки

При розробці макроекономічних моделей, побудованих на базі теорії нечіткої логіки (нечітких множин), використовуються такі поняття та визначення:

1. *Універсальна множина*. Універсальна множина U – це повна множина, яка охоплює всю галузь знань, яка досліджується.

2. *Нечітка множина*. Нечіткою множиною F на універсальній множині U називається сукупність пар $\{\mu_F(u), u\}$, де $\mu_F(u)$ – функція належності елемента $u \in U$ до нечіткої множини F.

3. *Функція належності*. Функція належності $\mu_F(u)$ відображає ступінь належності кожного елементу універсальної множини до нечіткої множини F. Функція належності набуває значень від 0 до 1. Чим вище ступінь належності, тим більшою мірою елемент універсальної множини відповідає властивостям нечіткої множини.

Якщо універсальна множина складається з кінцевого числа елементів $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, тоді нечітка множина F записується у вигляді:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(u_i) / u_i . \qquad (2.1)$$

Якщо універсальна множина складається з нескінченого числа елементів U, тоді нечітка множина F записується у вигляді:

$$F = \int_U \mu_A(u)/u\,. \tag{2.2}$$

4. *Лінгвістична змінна*. Лінгвістичною змінною називається така змінна, значеннями якої є слова та словосполучення, записані людською або штучною мовою.

5. *Терм-множина*. Терм-множиною називається множина усіх можливих значень лінгвістичної змінної.

6. *Терм*. Термом називається елемент терм-множини. В теорії нечітких множин терм задається функцією належності.

Основні операції (правила) теорії нечітких множин, які використовуються для моделювання, визначаються так:

а). Операція доповнення множин:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} (1 - \mu_F(u_i))/u_i\,; \tag{2.3}$$

$$\mu_{\bar{F}}(u) = 1 - \mu_F(u)\,. \tag{2.4}$$

б). Операція об'єднання множин:

$$F \bigcup G = \sum_{i=1}^{n} \{\mu_F(u_i) \cup \mu_G(u_i)\}\,, \tag{2.5}$$

$$\mu_{F \cup G}(u) = \mu_F(u) \cup \mu_G(u)\,, \tag{2.6}$$

де $\cup$ – знак оператора “взяття максимуму”.

в). Операція перерізу множин:

$$F \cap G = \sum_{i=1}^{n} \{\mu_F(u_i) \cap \mu_G(u_i)\}\,, \tag{2.7}$$

$$\mu_{F \cap G}(u) = \mu_F(u) \cap \mu_G(u)\,, \tag{2.8}$$

де $\cap$ – знак оператора “взяття мінімуму”.

За допомогою цих операцій (правил) записуються нечіткі логічні рівняння. Операції “взяття мінімуму” і “взяття максимуму” відповідають операціям логічного “і” і логічного “або” в чіткій логіці.

Маючи інформацію про причинно-наслідковий зв'язок між двома параметрами (наприклад, “якщо *R*, то *G*”), що використовують нечіткі множини $R \subset U$, $G \subset V$, можна зробити нечіткий логічний висновок “$R \rightarrow G, R' \rightarrow G'$”. Це означає, якщо з факту *R* виходить факт *G*, то з факту *R′* буде виходити факт *G′*, де *R, G, R′*, *G′* – нечіткі множини. Дана операція є *операцією складання бази знань*.

За допомогою нечіткої бази знань можна здійснити апроксимацію залежності $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$, яка називається “*нечіткий логічний висновок”*. Для того, щоб виконати операцію нечіткого логічного висновку, необхідно знати нечітке співвідношення між множинами.

Нечітке співвідношення між множинами $R \subset G$ *і* $G \subset V$, які задані на універсальних множинах $W=\{w_1,w_2, \dots w_l\}$ *і* $V=\{v_1,v_2, \dots v_m\}$, визначається матрицею, яка має вигляд:

$$Y = R \times G = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\{\mu_R(w_i) \cap \mu_G(v_j)\}. \qquad (2.9)$$

В матриці, яку ми отримали, елемент, що стоїть на перетині *і*-го рядку та *j*-ої колонки, визначається як:

$$\mu_y(w_i, v_j) = \mu_R(w_i) \cap \mu_G(v_j). \qquad (2.10)$$

Для розрахунку нечіткого логічного висновку *G′* використовуємо формулу:

$$G' = R' \circ Y = R' \circ (R \times G), \qquad (2.11)$$

де o – операція “min-max композиції”.

Підставивши в формулу (2.11) вираз (2.9), отримаємо формулу для формулювання (розрахунку) нечіткого логічного висловлювання (висновку):

$$G' = \sum_{j=1}^{m} \cup\, w_i \subset W\{\mu_{R'}(w_i) \cap \mu_Y(w_i, v_i)\}. \qquad (2.12)$$

Виходячи з досвіду застосування математичного апарату нечіткої логіки для вирішення задач медичної діагностики, біоконверсії та для вирішення інших задач, побудову моделі прогнозування економічних процесів на основі нечіткої логіки доцільно здійснювати на основі таких принципів:

1. *Принцип лінгвістичності змінних моделі*. У відповідності до цього принципу певні вхідні та вихідні змінні (параметри) моделі, що розробляється, розглядаються як лінгвістичні, якісні змінні (параметри). Прикладом таких лінгвістичних, якісних змінних (параметрів) може бути, наприклад, стан сільського господарства України (негативний, нормальний, позитивний), політика Національного Банку України (жорстка, змішана, вільна) тощо.

При цьому змінні (параметри), що розглядаються, можуть мати і конкретні числові значення. Але для прогнозування економічних процесів особливе значення мають саме лінгвістичні змінні (параметри). Це пов'язано з тим, що такі змінні (параметри) більш зрозумілі для спеціалістів – експертів в даній галузі, на висловлюваннях (висновках, знаннях, думках) яких і буде будуватися модель прогнозування економічних процесів.

2. *Принцип лінгвістичності висловлювань (висновків)* при прийнятті конкретних рішень. Згідно з цим принципом причинно-наслідкові зв'язки між вхідними та вихідними змінними (параметрами) моделі описуються людською мовою, а потім формалізуються у вигляді сукупності нечітких логічних висловлювань (висновків) типу: "ЯКЩО-ТО", "ІНАКШЕ" тощо.

Сукупність таких висловлювань можна розглядати як набір точок у просторі "вхідні змінні (параметри) – вихідний параметр". За цими точками з використанням нечіткого логічного висловлювання (висновку) будується „поверхня", яка дає можливість оцінювати значення вихідного параметра (змінної) навіть при відсутності в базі знань інформації про певні вхідні змінні (параметри).

3. *Принцип ієрархічності лінгвістичних висловлювань (висновків)*. Застосування цього принципу передбачає класифікацію вхідних змінних (параметрів) моделі та побудову так званого "дерева виведення", яке являє собою систему вкладених одне в одне висловлювань (висновків, знань) експертів „меншої розмірності". Це дозволяє уникнути труднощів, пов'язаних з аналізом та формалізацією великої кількості вхідних змінних (параметрів). Дотримання цього принципу дозволяє враховувати практично необмежену кількість вхідних змінних.

Таким чином, побудова моделі прогнозування економічних процесів на основі використання теорії нечіткої логіки зводиться до таких етапів:

1. Визначення чітких та нечітких вхідних змінних (параметрів) моделі або отримання лінгвістичних висловлювань (висновків) експертів.
2. Побудова дерева виведення.
3. Визначення межі зміни вхідних змінних (параметрів).
4. Оцінювання лінгвістичних висловлювань експертів, які приймаються за вхідні змінні (параметри) моделі.
5. Створення бази знань.
6. Формалізація бази знань у вигляді нечітких логічних висловлювань (висновків).
7. Побудова системи нечітких логічних рівнянь.
8. Вибір методу побудови функцій належності, які забезпечать подання кількісних і якісних змінних (параметрів) у вигляді нечітких множин для лінгвістичних термів, що входять до бази знань.

2.3. Налагодження моделей побудованих на нечіткій логіці

Суттєвим моментом при побудові макроекономічних моделей прогнозування економічних показників та їх подальшого використання є здійснення *налагодження* моделей. Для налагодження моделей можуть використовуватись:

- *класичні методи*, наприклад, знаходження мінімуму за методом найменших квадратів;
- *генетичні алгоритми* ГА оптимізації;
- *інші методи*, характеристики яких наведені в таблиці 2.2.

Аналіз даних таблиці 2.2 дозволяє стверджувати, що для оптимізації моделей, побудованих на основі теорії нечіткої логіки, найбільше підходить метод генетичного алгоритму.

Генетичні алгоритми були розроблені на основі спостереження процесів, які постійно відбуваються в природі. Основними з них є генетичні алгоритми Голанда (Holland), теорія випадкового пошуку Растригіна Л.А., еволюційне моделювання Букатової І.Л. та інші.

Генетичні алгоритми – це аналітичні технології, створені й вивірені самою природою за мільйони років її існування. Вони дозволяють вирішувати задачі прогнозування, створення класифікацій, пошуку оптимальних варіантів рішення задач. Генетичні алгоритми незамінні в тих випадках, коли рішення задач базується на інтуїції або досвіді експертів, що в значній мірі властиво економічним явищам та процесам.

Таблиця 2.2 – Методи налагодження економіко-математичних моделей

Методи налагодження	Особливості застосування
Метод “оберненого розповсюдження похибки” (нейронечітке налагодження)	Складність обчислень не залежить від кількості вхідних змінних. Необхідність великої кількості ітерацій, що різко зростає із збільшенням навчальної вибірки, вхідних змінних та термів. Може використовуватись при кількості змінних більше п’яти
Генетичні алгоритми оптимізації	Не мають значних математичних вимог до вигляду цільових функцій і обмежень. Дозволяють швидко знаходити глобальний оптимум на відміну від класичних крокових методик, які дозволяють знаходити глобальний оптимум тільки в тому випадку, коли функція має „властивість опуклості”. Труднощі використання полягають у тому, що для великої кількості вхідних змінних різко зростає складність обчислення функцій відповідності

Генетичні алгоритми представляють собою узагальнені методи пошуку оптимального рішення у випадку, коли цей пошук одночасно ведеться в декількох напрямках. Застосування генетичних алгоритмів приводить до суттєвого зменшення часу пошуку оптимального рішення. Можливим застосуванням генетичних алгоритмів є налагодження моделей, які вирішують задачі складання різних розкладів, прогнозування економічних процесів, проектування складних систем, складання маршрутів руху транспорту, забезпечення оптимального розташування обладнання тощо.

Генетичний алгоритм являє собою одну із методик, яка нагадує природний відбір та розмноження. На відміну від існуючих методик генетичний алгоритм починає роботу з певного випадкового набору початкових рішень, який носить назву *популяції*. Кожен елемент популяції називається *хромосомою* і є певним рішенням поставленої задачі в першому наближенні. Хромосома зображується у вигляді ряду символів певної природи, наприклад, у вигляді бінарних символів.

Генетичний алгоритм за своєю суттю є *ітераційним.* Кожна ітерація носить назву *покоління* або *генерації*. Шляхом здійснення певної кількості ітерацій відбувається еволюція хромосом. В ході кожної наступної ітерації хромосоми оцінюються за допомогою певної міри відповідності або так званої *функції відповідності* (англ. fitness function).

Створення кожного наступного генетичного алгоритму або наступної популяції передбачає постійну появу нових хромосом або так званих *нащадків*, які утворюються або шляхом схрещування (англ. crossover) двох "хромосом-батьків", взятих з поточної популяції, або шляхом випадкової зміни (мутації) інших хромосом (або так званих *генів*).

Для формування нової популяції застосовується відбір відповідних "батьків" та "нащадків" згідно з функцією відповідності й вилучення решти хромосом з метою збереження стабільним розміру популяції. Хромосоми з більшим значенням функції відповідності мають більше шансів бути вибраними. Після виконання певної кількості ітерацій генетичний алгоритм наближується до хромосоми, котра являє собою або оптимальне, або близьке до оптимального (субоптимальне) рішення.

Позначимо через *P(t)* набір "батьківських" хромосом, а через *C(t)* – набір "хромосом-нащадків" з поточної генерації *t*. Тоді загальну структуру генетичного алгоритма можна описати так, як це показано на рисунку 2.2:

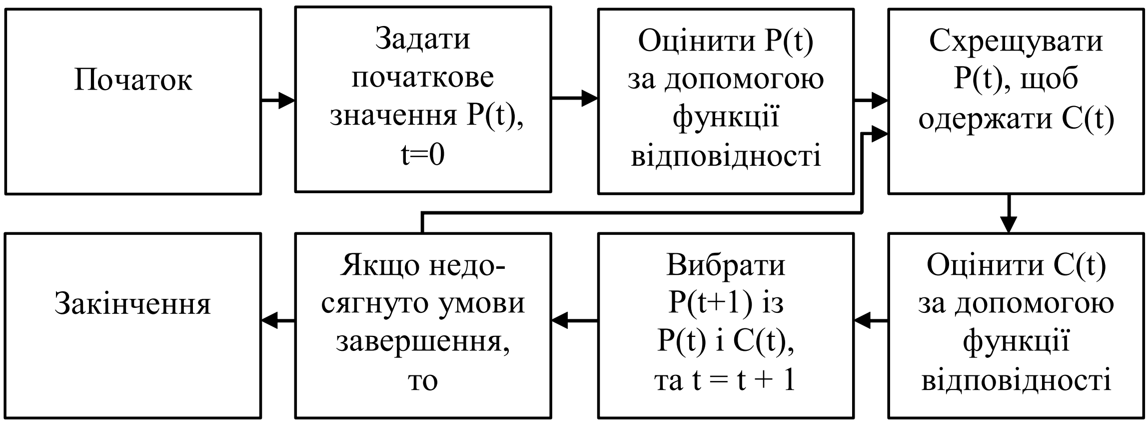


Рисунок 2.2 – Структура генетичного алгоритму

Таким чином, при побудові генетичного алгоритму (ГА) використовуються два основні види операцій:

1) генетичні операції „схрещування" і „мутація";

2) еволюційна операція „відбір".

Суттєвим моментом при побудові економіко-математичної моделі прогнозування економічних процесів та показників є необхідність забезпечення високої вірогідності зроблених прогнозів. Оцінка вірогідності й точності зробленого прогнозу означається таким терміном як *верифікація*.

Слід зазначити, що відомі на сьогоднішній день методи верифікації більшою мірою спрямовані на оцінювання методу прогнозування, з використанням якого був отриманий той чи інший прогноз, ніж на оцінку якості отриманого прогнозного результату. *Загальноприйнятим є твердження, що збіг прогнозних результатів з фактичними свідчить про високу якість зробленого прогнозу*.

На думку автора, справа тут дещо складніша. Збіг прогнозних результатів з фактичними тільки при певних умовах говорить про високу якість зробленого прогнозу. Прогнозування тих чи інших економічних процесів та показників – це не гадання, якими будуть ці показники в майбутньому. *Особливістю прогнозування економічних показників є те, що критерієм якості прогнозу часто є не його достовірність, а корисність для прийняття відповідних управлінських рішень. Інформація прогнозу має цінність тільки в тому випадку, коли, базуючись на результатах прогнозу, які є для нас неприйнятними за певних існуючих умов, приймаються такі рішення, які унеможливлюють (нівелюють) ці негативні наслідки.*

Особливо це важливо при прогнозуванні економічних показників. Якщо результати прогнозу свідчать, що за існуючих економічних обставин економічний показник в майбутньому може змінитись в несприятливий для нас бік, то держава, може заздалегідь здійснити такі превентивні заходи, які б випередили ці зміни або повністю їх знівелювали. Тобто результати прогнозу можуть спричинити здійснення певних заходів активного впливу на цей процес з метою корегування прогнозних результатів в сприятливий для нас бік.

Таким чином, головне призначення прогнозування як однієї із специфічних форм діяльності людини полягає в аналізі та виявленні основних закономірностей і тенденцій зміни економічних показників, розробці довгострокової економічної політики в сфері регулювання та прийнятті управлінських рішень, спрямованих на реалізацію визначеної політики.

Результати прогнозування економічних показників вкрай потрібні уряду країни, суб'єктам підприємницької діяльності, населенню тощо. Ці прогнози необхідні для планування обсягів валового національного продукту, визначення величини процентних ставок, цін, розрахунку інших макроекономічних показників тощо. Ці прогнози є важливими для планування обсягів імпорту і експорту продукції, розробки митної політики тощо.

Побудова економіко-математичних моделей прогнозування економічних показників на основі теорії нечіткої логіки, на погляд автора, значно підвищить якість зроблених прогнозів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная матеатика и логика. Методы исследования операций. - Спб.: Союз, 1999. - 320 с.
2. Алгебра и начала анализа. Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1993. – 320 с.
3. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. М.: ИНФРА-М, 1998.–160 с.
4. Бесєдін В.Ф. Проект Закону України «Про державне прогнозування, планування і розробку програм економічного і соціального розвитку України та її регіонів»: Уточнений за зауваженнями Мінекономіки України та інших організацій. - К.: НДЕІ Мінекономіки України, 1996. – 11 с.
5. Бромвич М. Анализ экономической эффективности капиталовложений. Пер. с англ. М.: Инфра-М, 1996.
6. Ващенко Т.В. Математика финансового менеджмента. – М.: Перспектива, 1996. – 82 с.
7. Власов М.П. Моделирование экономических процесов / М.П. Власов, П.Д. Шимко. – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 409 с.
8. Вэриан Х. Р., Микроэкономика –М.: ЮНИТИ, 1998.
9. Глівенко С.В., Соколов М.О., Теліженко О.М. Економічне прогнозування: Навчальний посібник. - 2-ге вид., перероб. та доп. - Суми: Видавництво «Університетська книга», 2001. - 207 с.
10. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Вороновский Г.К., Махотило К.В., Петрашев С.Н., Сергеев С.А. – Харьков: Основа. – 1997. – 212 с.
11. Доллан Э.Дж. и др. Деньги, банковское дело и денежно-кредитная политика. Пер. с англ. под общей редакцией В. Лукашевича, М. Ярцева. – С-Пб., 1994. – 496 с.
12. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 167 с.
13. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения.–М.: Приор, 2000.–144с.
14. Козловський С.В. Фінансова математика: Навч. посібник. – К.: Знання України, 2006. – 308 с.
15. Козловский С.В. Нечеткая логика – новый инструмент для моделирования экономических ситуаций в бизнесе //Материалы научно-практического семинара «Современный бизнес: проблемы, тенден-

ции, перспективы», 3 марта 2001 г. – Донецк: Бизнес-альянс Донбасса, 2001.-109 с., С. 36-38.
16. Козловский С.В. Разработка структуры модели прогнозирования валютного курса //Материалы IV Международной научной конференции молодых ученых-экономистов «Проблемы обеспечения экономического роста». – Донецк: РИА ДонГТУ, 2001. – 182 с., с. 24-26.
17. Козловський С.В. Застосування новітніх методів моделювання стану валютного ринку України // «Вісник Тернопільскої академії народного господарства», № 12 – 2001, м. Тернопіль: «Економічна думка», с. 80-91.
18. Козловський С.В. Нечітка логіка в економічному моделюванні // Збірник наукових праць по матеріалах міжнародної науково-практичної конференції «Україна на порозі XXI століття: Економіка, Державність». - Вінниця: Арбат, 2000. Том 1. - 280 с., С. 186-190.
19. Козловський С.В. Прогнозування валютного курсу в Україні на основі нечіткої логіки // В журналі "Вісник ВПІ" № 3 - 2002 - м. Вінниця, ВДТУ. С. 39-49.
20. Козловський С.В. Предметна область побудови формальних моделей економічних систем: структура, зміст, принципи // В журналі "Вісник ХНУ" № 2, (91) – 2007, Хмельницький національний університет, С 137-145.
21. Козловський С.В. Концепція і формалізація подання економічних систем на основі моделі семантичної мережі // В журналі „Держава та регіони" №3 – 2007, Гуманітарний університет „Запорізький інститут державного та муніципального управління", С.104-108.
22. Козловський С.В. Моделювання організаційних процесів та структур імітаційно-статистичними методами при управлінні економічними системами // В журналі "Вісник ХНУ" № 3, Т.3 (111) – 2008, Хмельницький національний університет, С 34-37.
23. Козловський С.В. Методологія і математичні інструменти представлення економічних структур // Збірник наукових праць Вінницького державного аграрного університету: Вінниця, 2008. – Випуск 36. – 414 с., С.53-56.
24. Козловський С.В., Козловський В.О. Макроекономічне моделювання та прогнозування валютного курсу в Україні: Монографія.– Вінниця: „Книга-Вега" ВАТ „Вінницька обласна друкарня", 2005.– 240 с.

25. Козловський В.О., Козловський С.В. Сучасна класифікація методів прогнозування економіки //«Економіка: проблеми теорії та практики». Випуск 141. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2002. -220 с., С. 168-172.
26. Козловський С.В., Козловський А.В. Структура моделі системи підтримки прийняття рішень оцінки регіонального інвестиційного клімату сільського господарства України // Особливості інноваційної політики підприємств у ринкових умовах: Матеріали наукової конференції (3-4 жовтня 2006 р.). – Вінниця: ВСЕІ Університету „Україна”, 2006. – 125 с., С.48-60.
27. Козловський С.В., Козловський А.В. Логіко-імовірнісна модель підтримки прийняття економічних рішень в умовах ризику // В журналі “Вісник ХНУ” № 1, (88) – 2007, Хмельницький національний університет, С 143-146.
28. Козловскький С.В. Герасименко Ю.В. Моделювання інвестиційних процесів в агропромисловому комплексі України. Монографія. – Вінниця: „Глобус-Прес”, 2007. – 136 с.
29. Козловський С.В., Мороз О.В. Система підтримки прийняття рішень на валютному ринку України // Збірник наукових праць «Економіка: проблеми теорії та практики». Випуск 129. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2002. -200 с., С. 120-130.
30. Кобелев Н.Б.Практика применения экономико-математических методов и моделей / Учеб.-прак. пособие. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 246 с.
31. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов. Пер. с сербского. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 268 с.
32. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1968.
33. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов / Под. ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 311 с.
34. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики.–М.: Дело, 1998.
35. Липсиц И.В. Экономика без тайн. – М.: Дело ЛТД, 1994. – 352 с.
36. Малыхин В.И. Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 247 с.
37. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учеб. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2004. – 576 с.
38. Мазур А.Г., Козловський С.В., Герасименко Ю.В. Управління регіональними інвестиційними процесами в агропромисловому ком-

плексі // Монографія. – Вінниця: „Глобус-Прес”, 2008. – 208 с.
39. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям.–М.: Инфра-М, 1996.
40. О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. Пер. с англ. М.: Дело ЛТД, 1995.
41. Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск.–М.: Инфра-М, 1994.
42. Р. Беллман, Л. Заде «Вопросы принятия решений в расплывчатых условиях», М.: Мир, 1976.
43. Райбман Н.С., Капитоненко В.В. и др. Дисперсионная идентификация. – М.: Наука, 1981.
44. Ротштейн А.П. Медицинская диагностика на нечеткой логике. – Винница: Континент-Прим. – 1996. – 132 с.
45. Ротштейн А.П., Кательников Д.И. Идентификация нелинейных объектов нечёткими базами знаний // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – №5. – С. 53-61.
46. Ротштейн О.П. Інтелектуальні технології ідентифікації: нечіткі множини, генетичні алгоритми, нейронні мережі. – Вінниця: “Універсум-Вінниця”, 1999. – 320 с.
47. Ротштейн О.П., Жупанова М.О., Шеверда В.М. Диференційна діагностика ішемічної хвороби серця на основі нечіткої логіки // Вісник ВПІ. – №3. – 1994. – С. 32-38.
48. Ротштейн О.П., Ларюшкін Є.П., Катєльніков Д.І. Багатофакторний аналіз технологічного процесу бюконверсії на основі на лінгвістичної інформації // Вісник ВПІ. – 1997. – №3. – С. 38-45.
49. Ротштейн О.П., Мітюшкін Ю.І. Нейро-лінгвістична ідентифікація нелінійних залежностей // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технолопгічних процесах. – 1998. – №4. – С. 5-12.
50. Ротштейн О.П., Пєтух А.М., Петренко М.І., Войтко В.В. Варіантний аналіз на базі нечітких парних порівнянь: методика та застосування на прикладі порівняння семіотичних систем // Вимірювальна обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 1998. – №2. – С. 17-24.
51. Ротштейн О.П., Єгоров С.О., Черноволик Г.О. Оцінка якості дипломного проектування на основі нечіткої логіки // Вісник ВПІ. – 1995. – №4(9). – С. 52-58.
52. Саати Т.Л. Взаимодействие в технических системах //Техническая кибернетика. – 1979. – №. – С. 68-84.
53. Сакс Дж. Д., Ларрен Ф.Б. Макроэкономика. Глобальный подход.

Пер. с англ. М.: Дело ЛТД, 1996.
54. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. Учебное пособие. - М.: Русская Деловая Литература, 1999. - 240 с.
55. Уотшем Т. Дж., Паррамоу Л. Количественные методы в финансах: Пер. с англ.–М.: ЮНИТИ, 1998.
56. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
57. Холт Р., Барнес С. Планирование инвестиций. Пер. с англ. – М.: Дело ЛТД, 1994. – 120 с.
58. Харрис Л. Денежная теория. Пер. с англ. М.: Прогресс, 1990.
59. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций.–М.: Наука, 1968.
60. Четыркин ЕМ. Методы финансовых и коммерческих расчетов.–М.: Дело, 1995.
61. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1,2. –М.: Фазис, 1998.
62. Mc Cutheon J.J., Scott W.F. An introduction to the mathematics of finance. —Oxford: Heineman, 1986. — 464 p.
63. Barrov M.M. Statistics for economics accounting and business studies, 2nd ed. — London and New York: Longman, 1996. — 321 p.
64. S.V. Kozlovskiy Forecasting of exchange rate in Ukraine based on fuzzy logic // В зборнике трудов «V международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM'2002», ISBN 5-286-01457-7, г. Санкт-Петербург (Россия) 25-27 июня 2002. Том 1, с. 210-213.

Додаток А
Таблиці мультиплікувальних множників

Таблиця А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	1,0500000	1,0550000	1,0600000	1,0650000	1,0700000	1,0750000	1,0800000
2	1,1025000	1,1130250	1,1236000	1,1342250	1,1449000	1,1556250	1,1664000
3	1,1576250	1,1742414	1,1910160	1,2079496	1,2250430	1,2422969	1,2597120
4	1,2155063	1,2388247	1,2624770	1,2864664	1,3107960	1,3354691	1,3604890
5	1,2762816	1,3069600	1,3382256	1,3700867	1,4025517	1,4356293	1,4693281
6	1,3400956	1,3788426	1,4185191	1,4591423	1,5007304	1,5433015	1,5668743
7	1,4071004	1,4546792	1,5036303	1,5539865	1,6057815	1,6590491	1,7138243
8	1,4774554	1,5346865	1,5938481	1,6549957	1,7181862	1,7834778	1,8509302
9	1,5513282	1,6190943	1,6894790	1,7625704	1,8384592	1,9172387	1,9990046
10	1,6288946	1,7081445	1,7908477	1,8771375	1,9671514	2,0610316	2,1589250
11	1,7103334	1,8020924	1,8982986	1,9991514	2,1048520	2,2156089	2,3316390
12	1,7958563	1,9012075	2,0121965	2,1290962	2,2521916	2,3817796	2,5181701
13	1,8856491	2,0057739	2,1329283	2,2674875	2,4098450	2,5604131	2,7196237
14	1,9799316	2,1160915	2,2609040	2,4148742	2,5785342	2,7524440	2,9371936
15	2,0789282	2,2324765	2,3965582	2,5718410	2,7590315	2,9588774	3,1721691
16	2,1828746	2,3552627	2,5403517	2,7390107	2,9521637	3,1807932	3,4259426
17	2,2920183	2,4848021	2,6927728	2,9170464	3,1588152	3,4193526	3,7000181
18	2,4066192	2,6214663	2,6543392	3,1066544	3,3799323	3,6758041	3,9960195
19	2,5269502	2,7656469	3,0255995	3,3085869	3,6165275	3,9514894	4,3157011
20	2,6532977	2,9177575	3,2071355	3,5236451	3,8696845	4,2478511	4,6609571
21	2,7859626	3,0782342	3,3995636	3,7526820	4,1405624	4,5664399	5,0338337
22	2,9252607	3,2475370	3,6035374	3,9966063	4,4304017	4,9089229	5,4365404
23	3,0715238	3,4261516	3,8197497	4,2563857	4,7405299	5,2770921	5,8714636
24	3,2250999	3,6145899	4,0489346	4,5330508	5,0723670	5,6728741	6,3411807
25	3,3863549	3,8133923	4,2918707	4,8276991	5,4274326	6,0983396	6,8484752
26	3,5558727	4,0231289	4,5493830	5,1414996	5,8073529	6,5557151	7,3963532
27	3,7334563	4,2444010	4,8223459	5,4756970	6,2138676	7,0473937	7,5880615
28	3,9201291	4,4778431	5,1116867	5,8316173	6,6488384	7,5759482	8,6271064
29	4,1161356	4,7241244	5,4183879	6,2106725	7,1142570	8,1441444	9,3172749
30	4,3219424	4,9839513	5,7434912	6,6143662	7,6122550	8,7549553	10,062657
31	4,3380395	5,2580686	6,0881006	7,0443000	8,1451129	9,4115768	10,867669
32	4,7649415	5,5472624	6,4533867	7,5021795	8,7152708	10,117445	11,737083
33	5,0031885	5,8523618	6,8405899	7,5898211	9,3253398	10,876253	12,676050
34	5,2533480	6,1742417	7,2510253	8,5091595	9,9781135	11,691972	13,690134
35	5,5160154	6,5138250	7,6860868	9,0622549	10,676581	12,568870	14,785344
36	5,7918161	6,8720854	8,1472520	9,6513014	11,423942	13,511536	15,968172
37	6,0814069	7,2500501	8,6360871	10,278636	12,223618	14,524901	17,245626
38	6,3854773	7,6488028	9,1542523	10,946747	13,079271	15,614268	18,625276
39	8,7047512	8,0694870	9,7035075	11,658286	13,994820	16,785339	20,115298
40	7,0399887	8,5133088	10,285718	12,416075	14,974458	18,044239	21,724521
41	7,3913881	8,9815408	10,902861	13,223119	18,022670	19,397557	23,462483
42	7,7615876	9,4755255	11,557033	14,082622	17,144257	20,852374	25,339482
43	8,1496669	9,9966794	12,250455	14,997993	18,344355	22,416302	27,366640
44	8,5571503	10,546497	12,985482	15,972862	19,628460	24,097524	29,555972
45	8,9850078	11,126554	13,764611	17,011098	21,002452	25,904839	31,920449
46	9,4342582	11,738515	14,590487	18,116820	22,472623	27,847702	34,474085
47	9,9059711	12,384133	15,465917	19,294413	24,045707	29,936279	37,232012
48	10,401270	13,065260	16,393872	20,548550	25,728907	32,181500	40,210573
49	10,921333	13,783849	17,377504	21,884205	27,529930	34,595113	43,427419
50	11,467400	14,541961	18,420154	23,306679	29,457025	37,189746	48,901613

Продовження таблиці А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	1,0850000	1,0900000	1,0950000	1,1000000	1,1050000	1,1100000	1,1150000
2	1,1772250	1,1881000	1,1990250	1,2100000	1,2210250	1,2321000	1,2432250
3	1,2772891	1,2950290	1,3129324	1,3310000	1,3492326	1,3676310	1,3861959
4	1,3858587	1,4115816	1,4376610	1,4641000	1,4909021	1,5180704	1,5456084
5	1,5036567	1,5386240	1,5742387	1,6105100	1,6474468	1,6850582	1,7233534
6	1,6314675	1,6771001	1,7237914	1,7715610	1,8204287	1,8704146	1,9215390
7	1,7701422	1,8280391	1,8875516	1,9487171	2,0115737	2,0761602	2,1425160
8	1,9206043	1,9925626	2,0668690	2,1435888	2,2227889	2,3045378	2,3889053
9	2,0838557	2,1718933	2,2632216	2,3579477	2,4561818	2,5580369	2,6636294
10	2,2609834	2,3673637	2,4782276	2,5937425	2,7140808	2,8394210	2,9699468
11	2,4531670	2,5804264	2,7136592	2,8531167	2,9990593	3,1517573	3,3114907
12	2,6616862	2,8126648	2,9714569	3,1384284	3,3139606	3,4984506	3,6923121
13	2,8879296	3,0658046	3,2537453	3,4522712	3,6619264	3,8832802	4,1169280
14	3,1334036	3,3417270	3,5628511	3,7974983	4,0464287	4,3104410	4,5903748
15	3,3997429	3,6424825	3,9013219	4,1772482	4,4713037	4,7845895	5,1182679
16	3,6887210	3,9703059	4,2719475	4,5949730	4,9407906	5,3108943	5,7068687
17	4,0022623	4,3276334	4,6777825	5,0544703	5,4595736	5,8950927	6,3631586
18	4,3424546	4,7171204	5,1221719	5,5599173	6,0328288	6,5435529	7,0949218
19	4,7115632	5,1416613	5,6087782	6,1159090	6,6662759	7,2633437	7,9108378
20	5,1120461	5,6044108	6,1416121	6,7274999	7,3662348	8,0623115	8,8205842
21	5,5465700	6,1088077	6,7250653	7,4002499	8,1396895	8,9491658	9,8349513
22	6,0180285	6,6586004	7,3639465	8,1402749	8,9943569	9,9335740	10,965971
23	6,5295609	7,2578745	8,0635214	8,9543024	9,9387644	11,026267	12,227057
24	7,0845736	7,9110832	8,8295559	9,8497327	10,982335	12239157	13,633169
25	7,6867624	8,6230807	8,6683637	10,834706	12,135480	13,585464	15,200983
26	8,3401372	9,3991579	10,586858	11,918177	13,409705	15,079865	18,949096
27	9,0490488	10,245082	11,592610	13,109994	14,817724	16,738650	18,898243
28	9,8182180	11,167140	12,693908	14,420994	16,373585	18579901	21,071540
29	10,652766	12,172182	13,899829	15,863093	18,092812	20,623691	23,494768
30	11,558252	13,267678	15,220313	17,449402	19,992557	22,892297	26,196666
31	12,540703	14,461770	16,666242	19,194342	22,091775	25,410449	29,209282
32	13,606663	15,763329	18,249535	21,113777	24,411412	28,205599	32,568350
33	14,763229	17,182028	19,983241	23,225154	26,974610	31,308214	36,313710
34	16,018104	18,728411	21,881649	25,547670	29,806944	34,752118	40,489787
35	17,379642	20,413968	23,960406	28,102437	32,936673	38,574851	45,146112
36	18,856912	22,251225	26,236644	30,912681	36,395024	42,818085	50,337915
37	20,459750	24,253835	28,729126	34,003949	40,216501	47,528074	56,126776
38	22,198828	26,436680	31,458393	37,404343	44,439234	52,756162	62,581355
39	24,085729	28,815982	34,446940	41,144778	49,105354	58,559340	69,778211
40	26,133016	31,409420	37,719399	45,259256	54261416	65,000867	77,802705
41	28,354322	34,236268	41,302742	49,785181	59,958864	72,150963	86,750016
42	30,764439	37,317532	45,226503	54,763699	66,254545	80,087569	96,726268
43	33,379417	40,676110	49,523020	60,240069	73,211272	88,897201	107,34979
44	36,216667	44,336960	54,227707	66,264076	80,898456	98,675893	120,25251
45	39,295084	48,327286	59,379340	72,890484	89,392794	10,953024	134,08155
46	42,635166	52,676742	65,020377	80,179532	98,779037	12,157857	149,50093
47	46,259155	57,417649	71,197313	88,197485	109,15084	134,85221	166,69354
48	50,191183	62,585237	77,961057	97,017234	120,61167	149,79695	185,86330
49	54,457434	68,217908	85,367358	106,71896	133,27590	166,27462	207,23758
50	59,086316	74,357520	93,477257	117,39085	147,26987	184,56483	231,06990

Продовження таблиці А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00
1	1,1200000	1,1250000	1,1300000	1,1350000	1,1400000	1,1450000	1,1500000
2	1,2544000	1,2656250	1,2769000	1,2882250	1,2996000	1,3110250	1,3225000
3	1,4049280	1,4238281	1,4428970	1,4621354	1,4815440	1,5011236	1,5208750
4	1,5735194	1,6018066	1,6304736	1,6595237	1,6889602	1,7187866	1,7490063
5	1,7623417	1,8020325	1,8424352	1,8835593	1,9254146	1,9680106	2,0113572
6	1,9738227	2,0272865	2,0819518	2,1378399	2,1949726	2,2533721	2,3130608
7	2,2106814	2,2806973	2,3526055	2,4264482	2,5022688	2,5801111	2,6600199
8	2,4759632	2,5657845	2,6584442	2,7540187	2,8525864	2,9542272	3,0590229
9	2,7730788	2,8865076	3,0040419	3,1258113	3,2519485	3,3825902	3,5178763
10	3,1058482	3,2473210	3,3945674	3,5477958	3,7072213	3,8730657	4,0455577
11	3,4785500	3,6532362	3,8358612	4,0267482	4,2262323	4,4346603	4,6523914
12	3,8959760	4,1098907	4,3345231	4,5703592	4,8179048	5,0776860	5,3502501
13	4,3634931	4,6236270	4,8980111	5,1673577	5,4924115	5,8139505	6,1527876
14	4,8871123	5,2015804	5,5347525	5,8876510	6,2613491	6,6569733	7,0757058
15	5,4735658	5,8517779	6,2542704	6,6824839	7,1379380	7,6222344	8,1370616
16	6,1303937	6,5832502	7,0673255	7,5846193	8,1372493	8,7274584	9,3576209
17	6,8660409	7,4061564	7,9860778	8,6085429	9,2764642	9,9929399	10,761264
18	7,6899658	8,3319260	9,0242680	9,7706961	10,575169	11,441916	12,375454
19	8,6127617	9,3734167	10,197423	11,089740	12,055693	13,100994	14,231772
20	9,6462931	10,545094	11,523088	12586855	13,743490	15,000638	16,366537
21	10,803848	11,863231	13,021089	14,286080	15,667578	17,175731	18,821518
22	12,100310	13,346134	14,713831	16,214701	17,861039	19,666212	21,644746
23	13552347	15,014401	16,626629	18,403686	20,361585	22,517812	24,891458
24	15,178629	16,891201	18,788091	20,888184	23,212207	25,782895	28,625176
25	17,000064	19,002602	21230542	23,708088	26,461916	29,521415	32,918953
26	19,040072	21,377927	23,990513	26,908680	30,166584	33,802020	37,856796
27	21,324881	24,050168	27,109279	30,541352	34,389906	38,703313	43,535315
28	23,883866	27,056438	30,633486	34,664435	39,204493	44,315293	50,065612
29	26,749930	30,438493	34,615839	39,344133	44,693122	50,741011	57,575454
30	29,959922	34,243305	39,115898	44,655591	50,950159	58,098457	66,211772
31	33,555113	38,523716	44,200965	50,684096	58,083181	66,522734	76,143538
32	37,581726	43,339183	49,347090	57,526449	66,214826	76,168530	87,565068
33	42,091533	48,756581	56,440212	65,292520	75,484902	87,212967	100,69983
34	47,142517	54,851153	63,777439	74,107010	86,052788	99,858847	115,80480
35	52,799620	61,707547	72,068506	84,111457	98,100178	114,33838	133,17552
36	59,135574	69,420991	81,437412	95,466503	111,83420	130,91744	153,15185
37	66,231843	78,098615	92,024276	108,35448	127,49099	149,90047	176,12463
38	74,179664	87,860942	103,98743	122,98234	145,33973	171,63604	202,54332
39	83,081224	98,843559	117,50580	139,58495	165,68729	196,52327	232,92482
40	93,050970	111,19900	132,78155	158,42892	188,88351	225,01914	267,86355
41	104,21709	125,09888	150,04315	179,81682	215,32721	257,64692	308,04308
42	116,72314	140,73624	169,54876	204,09210	245,47301	295,00572	354,24954
43	130,72991	158,32827	191,59010	231,64453	279,83924	337,78155	407,38697
44	146,41750	178,11930	216,49682	262,91654	319,01673	386,75988	468,49502
45	163,98760	200,38422	244,64140	298,41027	363,67907	442,84006	538,76927
46	183,66612	225,43224	276,44478	338,69566	414,59414	507,05187	619,58466
47	205,70605	253,61127	312,38261	384,41957	472,63732	580,57439	712,52236
48	230,39078	285,31268	352,99234	436,31622	538,80655	664,75768	819,40071
49	258,03767	320,97677	398,88135	495,21890	614,23946	761,14754	942,31082
50	289,00219	361,09886	450,73593	562,07346	700,23299	871,51393	1083,6574

Продовження таблиці А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	18,50
1	1,1550000	1,1600000	1,1650000	1,1700000	1,1750000	1,1800000	1,1850000
2	1,3340250	1,3456000	1,3572250	1,3689000	1,3806250	1,3924000	1,4042250
3	1,5407989	1,5608960	1,5811671	1,6016130	1,6222344	1,6430320	1,6640066
4	1,7796227	1,8106394	1,8420597	1,8738872	1,9061254	1,9387778	1,9718479
5	2,0554642	2,1003417	2,1459996	2,1924480	2,2396973	2,2877578	2,3366397
6	2,3740612	2,4363963	2,5000895	2,5651642	2,6316444	2,6995542	2,7689180
7	2,7420407	2,8262197	2,9126042	3,0012421	3,0921821	3,1854738	3,2811679
8	3,1670570	3,2784149	3,3931839	3,5114533	3,6333140	3,7588592	3,8881839
9	3,6579508	3,8029613	3,9530593	4,1084003	4,2691440	4,4354539	4,6074980
10	4,2249332	4,4114351	4,6053141	4,8068284	5,0162441	5,2338356	5,4598851
11	4,8797978	5,1172647	5,3651909	5,6239892	5,8940869	6,1759260	6,4699638
12	5,6361665	5,9360270	6,2504474	6,5800674	6,9255521	7,2875926	7,6669072
13	6,5097723	6,8857914	7,2817712	7,6986788	8,1375237	85,993593	9,0852850
14	7,5187870	7,9875180	8,4832635	9,0074542	9,5615903	10,147244	10,766063
15	8,6841989	9,2655209	9,8830019	10,538721	11,234869	11,973748	12,757784
16	10,030250	10,748004	11,513697	12,330304	13,200971	14,129023	15,117974
17	11,584938	12,467685	13,413457	14,426456	15,511141	16,672247	17,914800
18	13,380604	14,462514	15,626678	16,878953	18,225590	19,673251	21,229038
19	15,454598	16,776517	18,205080	19,748375	21,415068	23,214436	25,156410
20	17,850060	19,460759	21,208918	23,105599	25,162705	27,393035	29,810345
21	20,616820	22,574481	24,708389	27,033551	29,566179	32,323781	35,325259
22	23,812427	26,186398	28,785273	31,629255	34,740260	38,142061	41,860432
23	27,503353	30,376222	33,534843	37,006228	40,819806	45,007632	49,604612
24	31,766372	35,236417	39,068093	43,297287	47,963272	53,109006	58,781465
25	36,690160	40,874244	45,514328	50,657326	56,356844	62,668627	69,556036
26	42,377135	47,414123	53,024192	59,269656	66,219292	73,948980	82,542403
27	48,945591	55,000382	61,773184	69,345497	77,807668	87,259797	97,812748
28	56,532157	63,800444	71,965759	81,134232	91,424010	102,96656	115,90811
29	65,294642	74,008515	83,840109	94,927051	107,42321	121,50054	137,35111
30	75,415311	85,849877	97,673727	111,06465	126,22227	143,37064	162,76106
31	87,104684	99,585357	113,78989	129,94564	148,31117	169,17735	182,87186
32	100,60591	115,51959	132,56522	152,03640	174,26563	199,62928	228,55315
33	116,19983	134,00273	154,43849	177,88259	204,76211	235,56255	270,83548
34	134,21080	155,44317	179,92084	208,12263	240,59548	277,96381	320,94005
35	155,01347	180,31407	209,60777	243,50347	282,69969	327,99729	380,31396
36	179,04056	209,16432	244,19306	284,89906	332,17213	387,03680	450,67204
37	206,79185	242,63062	284,48491	333,33191	390,30226	456,70343	534,04636
38	238,84459	281,45151	331,42492	389,99833	458,60515	538,91004	632,34494
39	275,86550	326,48376	386,11004	456,29805	538,86106	635,91385	749,92126
40	318,62465	378,72116	449,81819	533,86871	633,16174	750,37834	888,65669
41	368,01147	439,31654	524,03819	624,62639	743,96505	885,44645	1053,0582
42	425,05325	509,60719	610,50449	730,81288	874,15893	1044,8268	1247,8739
43	490,93650	591,14434	711,23774	855,05107	1027,1367	1232,8956	1478,7306
44	567,03166	685,72744	828,59196	1000,40975	1206,8856	1454,8168	1752,2958
45	654,92156	795,44383	965,30964	1170,47941	1418,0906	1716,6839	2076,4705
46	756,43441	922,71484	1124,5857	1369,46091	1666,2565	2025,6870	2460,6175
47	873,68174	1070,3492	1310,1424	1602,26927	1957,8514	2390,3106	2915,8318
48	1009,1024	1241,6051	1526,3159	1874,65504	2300,4754	2820,5665	3455,2607
49	1165,5133	1440,2619	1778,1580	2193,34640	2703,0586	3328,2685	4094,4839
50	1346,1678	1670,7038	2071,5540	2566,21528	3176,0938	3927,3569	4851,9634

Продовження таблиці А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	19,00	19,50	20,00	20,50	21,00	21,50	22,00
1	1,1900000	1,1950000	1,2000000	1,2050000	1,2100000	1,2150000	1,2200000
2	1,4161000	1,4280250	1,4400000	1,4520250	1,4641000	1,4762250	1,4884000
3	1,6851590	1,7064899	1,7280000	1,7496901	1,7715610	1,7936134	1,8158480
4	2,0053392	2,0392554	2,0736000	2,1083766	2,1435888	2,1792403	2,2153346
5	2,3863537	2,4369102	2,4883200	2,5405938	2,5937425	2,6477769	2,7027082
6	2,8397609	2,9121077	2,9859840	3,0614155	3,1384284	3,9170489	3,2973040
7	3,3783154	3,4799687	3,3831808	3,6890057	3,7974983	3,9087145	4,0227108
8	4,0213853	4,1585626	4,2998170	4,4452519	4,5949730	4,7490881	4,9077072
9	4,7854486	4,9694823	5,1597804	5,3565285	5,5599173	5,7701420	5,9874028
10	5,6946838	5,9385313	6,1917364	6,4546169	6,7274998	7,0107225	7,3046314
11	6,7766737	7,0965450	7,4300837	7,7778133	8,1402749	8,5180279	8,9116503
12	8,0642417	8,4803712	8,9161004	9,3722651	9,8497327	10,349404	10,872213
13	9,5964476	10,134044	10,699321	11,293579	11,918177	12,574526	13,264100
14	11,419773	12,110182	12,839185	13,608763	14,420994	15,278049	16,182202
15	11,589530	14,471668	15,407022	16,398560	17,449402	18,362829	19,742287
16	16,171540	17,293643	18,488426	19,760264	21,113777	22,353837	24,085590
17	19,244133	20,665903	22,186111	23,811119	25,547670	27,402913	29,384420
18	22,900518	24,695754	26,623333	28,692398	30,912681	33,294539	35,848992
19	27,251616	29,511426	31,948000	34574339	37,404343	40,452865	43,735771
20	32,429423	35,266154	38,337600	41,662079	45,259256	49,150230	53,357640
21	38,391014	42,143055	46,005120	50,202805	54,763699	59,717530	65,096321
22	45,923307	50,360950	55,206144	60,494380	66,264076	72,356799	79,417512
23	54,648735	60,181336	66,247373	72,895728	80,179532	88,156511	96,889364
24	65,031994	71,916696	79,496847	87,839363	97,017234	107,11016	118,20502
25	77,388073	85,940452	95,396217	105,84642	117,39085	130,13885	144,21013
26	92,091807	102,69884	114,47546	127,54494	142,04293	158,11870	175,93636
27	10958925	122,72511	137,37055	153,69165	171,87195	192,11422	214,64236
28	130,41121	146,65651	164,84466	185,19844	207,96506	233,41877	261,86368
29	155,18934	175,25453	197,81359	223,16411	251,63772	283,60381	319,47368
30	184,67531	209,42916	237,37631	268,91276	304,48164	344,57863	389,75789
31	219,76362	250,26785	284,85158	324,03987	368,42278	418,66303	47530463
32	26151871	299,07008	341,82189	390,46805	445,79157	508,67559	580,11565
33	311,20726	357,38875	410,18627	470,51400	539,40780	618,04034	707,74109
34	370,33664	427,07955	492,22352	566,96937	652,68344	750,91962	863,44413
35	440,70061	510,36007	590,66823	683,19809	789,74696	912,36733	1053,4018
36	524,43372	609,88028	708,80187	823,25370	955,59382	1108,5263	1285,1502
37	624,07613	728,80693	850,56225	992,02070	1156,2685	1346,8595	1567,8833
38	742,65059	870,92429	1020,6747	1195,3849	1399,0849	1636,4343	1912,8176
39	883,75421	1040,7545	1224,8096	1440,4389	1692,8927	1988,2676	2333,6375
40	1051,6675	1243,7017	1469,7716	1735,7288	2048,4002	2415,7452	2847,0378
41	1251,4843	1486,2235	1763,7259	2091,5532	2478,5643	2935,1304	3473,3861
42	1489,2664	1776,0371	2116,4711	2520,3217	2999,0628	3566,1834	4237,5310
43	1772,2270	2122,3643	2539,7653	3036,9876	3628,8659	4332,9128	5169,7878
44	2108,9501	2536,2253	3047,7183	3659,5700	4390,9278	5264,4891	6307,1411
45	2509,6506	3030,7892	3657,2620	4409,7819	5313,0226	6396,3542	7694,7122
46	2986,4842	3621,7932	4388,7144	5313,7872	6428,7574	7771,5704	9387,5489
47	3553,9162	4328,0428	5266,4573	6403,1136	7778,7964	9442,4580	11452,810
46	4229,1603	5172,0112	6319,7487	7715,7519	9412,3437	11472,587	13972,428
49	5032,7008	6180,5533	7583,6385	9297,4810	11388,936	13939,193	17046,362
50	5988,9139	7385,7612	9100,4382	11203,465	13780,612	16936,119	20796,561

Продовження таблиці А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	1,2250000	1,2300000	1,2350000	1,2400000	1,2450000	1,2500000	1,2550000
2	1,5006250	1,5129000	1,5252250	1,5376000	1,5500250	1,5625000	1,5750250
3	1,8382656	1,8608670	1,8836529	1,9066240	1,9297811	1,9531250	1,9766564
4	2,2518754	2,2888664	2,3263113	2,3642138	2,4025775	2,4414063	2,4807038
5	2,7585474	2,8153057	2,8729945	2,9316251	2,8912090	3,0517578	3,1132832
6	3,3792205	3,4628260	3,5481482	3,6352151	3,7240552	3,8146973	3,9071704
7	4,1395451	4,2592760	4,3819630	4,5076667	4,6364487	4,7683716	4,9034989
8	5,0709428	5,2389094	5,4117243	5,5895067	5,7723786	5,9604645	6,1538911
9	6,2119049	6,4438586	6,6834795	6,9309883	7,1866114	7,4505806	7,7231333
10	7,6095835	7,9259461	8,2540971	8,5944255	8,9473312	9,3132257	9,6925323
11	9,3217398	9,7489137	10,193810	10,657088	11,139427	11,641532	12,164128
12	14,419131	11,991164	12,589355	13,214789	13,868587	14,551915	15,265981
13	13,988436	14,749132	15,547854	16,386338	17,266391	18,189894	19,158806
14	17,135834	18,141432	13,201599	20,319059	21,496657	22,737368	24,044301
15	20,991396	22,313961	23,713975	25,195633	26,763338	28,421709	30,175598
16	25,714461	27,446172	29,286760	31,242585	33,320355	35,527137	37,870376
17	31,500214	33,758792	36,169148	38,740806	41,483842	44,408921	47,527321
18	38,587762	41,523314	44,668898	48,038599	51,647384	55,511151	59,646788
19	47,270009	51,073676	55,166089	59,567863	64,300993	69,388939	74,856719
20	57,905761	62,820622	68,130120	73,864150	80,054736	86,736174	93,945183
21	70,934557	77,269364	84,140698	91,591546	99,668146	108,42022	117,90120
22	86,894833	85,041318	103,91376	113,57352	124,08684	135,52527	147,96601
23	106,44617	116,90082	128,33350	140,83116	154,48812	169,40659	185,69734
24	130,39656	143,78801	158,49187	174,63064	192,33771	211,75824	233,05017
25	159,73578	176,85925	195,73746	216,54199	239,46045	264,69780	292,47796
26	195,67634	217,53688	241,73576	268,51207	298,12825	330,87225	367,05984
27	239,70351	267,57036	298,54366	332,95497	371,16968	413,59031	460,66010
28	293,63680	329,11155	368,70142	412,86416	462,10625	516,98788	578,12842
29	359,70508	404,80720	455,34626	511,95156	575,32228	646,23485	725,55117
30	440,63872	497,91286	562,35263	634,81993	716,27624	807,79357	91036672
31	539,78244	612,43282	694,50549	787,17672	891,76391	1009,7420	1142,7612
32	661,23349	753,29237	857,71428	976,09913	1110,2461	1262,1774	1434,1654
33	810,01102	926,54961	1059,2771	1210,3629	1382,2564	1577,7218	1799,8775
34	992,26350	1139,6560	1308,2073	1500,8500	1720,9092	1972,1523	2258,8463
35	1215,5228	1401,7769	1615,6360	1861,0540	2142,5319	2465,1903	2834,8521
36	1489,0154	1724,1856	1995,3104	2307,7070	2667,4522	3081,4879	3557,7394
37	1824,0439	2120,7483	2464,2084	2861,5567	3320,9780	3851,8599	4464,9629
38	2234,4538	2608,5204	3043,2974	3548,3303	4134,6177	4814,8249	5603,5284
39	2737,2058	3208,4801	3758,4722	4399,9295	5147,5990	6018,5311	7032,4282
40	3353,0772	3946,4305	4641,7132	5455,9126	6408,7607	7523,1638	8825,6974
41	4107,5195	4854,1095	5732,5158	6765,3317	7978,9071	9403,9548	11076,250
42	5031,7114	5970,5547	7079,6570	8389,0113	9933,7393	11754,944	13900,694
43	6163,8465	7343,7823	8743,3764	10402,374	12367,505	14693,679	17445,371
44	7550,7120	9032,8522	10798,070	12898,944	15397,544	18367,099	21893,941
45	9249,6221	11110,408	13335,616	15994,690	19169,943	22958,874	27476,895
46	11330,787	13665,802	16469,486	19833,416	23866,579	28698,593	34483,504
47	13880,214	16808,937	20339,815	24593,436	29713,890	35873,241	43276,797
48	17003,262	20674,992	25119,672	30495,860	36993,794	44841,551	54312,381
49	20828,996	25430,240	31022,795	37814,867	46057,273	56051,939	68162,038
50	25515,521	31279,195	38313,152	46890,435	57341,305	70064,923	85543,357

Продовження таблиці А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,50	29,00
1	1,2600000	1,2650000	1,2700000	1,2750000	1,2800000	12850000	12900000
2	1,5876000	1,6002250	1,6129000	1,6256250	1,6384000	1,6512250	1,6641000
3	2,0003760	2,0242846	2,0483830	2,0726719	2,0971520	2,1218241	2,1466890
4	2,5204738	2,5607201	2,6014464	2,6426566	2,6843546	2,7265440	2,7692288
5	3,1757969	3,2393109	3,3038369	3,3693872	3,4359738	3,5036090	3,5723052
6	4,0015041	4,0977282	4,1958729	4,2959687	4,3980465	4,5021376	4,6082737
7	5,0418952	5,1836262	5,3287586	5,4773601	5,6294995	5,7852468	5,9446730
8	6,3527880	6,5572872	6,7675234	6,9836341	7,2057594	7,4340422	7,6686282
9	8,0045128	8,2949683	8,5947547	8,9041335	9,2233720	9,5527442	9,8925304
10	10,085686	10,493135	10,915339	11,352770	11,805916	12,275276	12,761364
11	12,707965	13,273816	13,862480	14,474782	15,111573	15,773730	16,462160
12	16,012035	16,791377	17,605350	18,455347	19,342813	20,269243	21236186
13	20,175165	21,241092	22,358794	23,530568	24,758801	26,045977	27,394680
14	25,420707	26,869981	28,395668	30,001474	31,691265	33,469081	35,339137
15	32,030091	33,990526	36,062499	38,251879	40,564819	43,007769	45587487
16	40,357915	42,998015	45,799373	48,771146	51,922969	55,264983	58,807859
17	50,850973	54,392489	58,165204	62,183211	66,461400	71,015503	75,862137
18	64,072226	68,806499	73,869809	79,283593	85,070592	91,254922	97,862157
19	80,731005	87,040221	93,814658	101,08658	108,89036	117,26257	126,24218
20	101,72107	110,10588	119,14462	128,88539	139,37966	150,68241	162,85242
21	128,16854	139,28334	151,31366	164,32887	178,40596	193,62689	210,07962
22	161,49236	176,19418	192,16835	209,51931	228,35963	248,81056	271,00271
23	203,48038	222,88564	244,05380	267,13713	232,30033	319,72157	349,59349
24	256,38528	281,95033	309,94833	340,59984	374,14442	410,84222	450,97560
25	323,04545	356,66717	393,63438	434,26479	478,90486	527,93225	581,75853
26	407,03727	451,18397	499,91566	553,68761	612,99822	678,39294	750,46850
27	512,86696	570,74772	634,89289	705,95170	784,63772	871,73493	968,10436
28	646,21236	721,99587	806,31397	900,08842	1004,3363	1120,1794	1248,8546
29	814,22758	913,32478	1024,0187	1147,6127	1285,5504	1439,4305	1611,0225
30	1025,9267	1155,3558	1300,5038	1463,2062	1645,5046	1849,6682	2078,2190
31	1292,6677	1461,5251	1651,6398	1865,5879	2106,2458	2376,8236	2680,9025
32	1628,7613	1848,8293	20975826	2378,6246	2695,9947	3054,2184	3458,3642
33	2052,2392	2338,7691	2663,9299	3032,7464	3450,8732	3924,6706	4461,2898
34	2585,8215	2958,5429	3383,1910	3866,7517	4417,1177	5043,2017	5755,0639
35	3258,1350	3742,5567	4296,6525	4930,1084	5653,9106	6480,5142	7424,0324
36	4105,2501	4734,3343	5456,7487	6285,8882	7237,0056	8327,4608	9577,0018
37	5172,6152	5988,9329	6930,0709	8014,5074	9263,3671	10700,787	12354,332
38	6517,4951	7576,0001	8801,1900	10218,497	11857,110	13750,511	15937,089
39	8212,0438	9583,6401	11177,5113	13028,584	151 77,101	17669,407	20558,844
40	10347,1752	12123,3047	14195,4393	16611,444	19426,689	22705,188	26520,909
41	13037,4408	15335,9804	18028,2080	21179,591	24866,162	29176,167	34211,973
42	16427,1754	19400,0153	22895,8241	27003,979	31828,687	37491,374	44133,445
43	20698,2410	24541,0193	29077,6966	34430,073	40740,720	48176,416	56932,144
44	26079,7837	31044,3894	36928,6747	43898,343	52148,121	61906,695	73442,466
45	32860,5275	39271,1526	46899,4169	55970,388	66749,595	79550,103	94740,782
46	41404,2646	49678,0081	59562,2594	71362,244	85439,481	102221,88	122215,61
47	52169,3734	62842,6802	75644,0695	90986,861	109362,54	131355,12	157658,13
48	65733,4105	79495,9904	96067,9683	116008,25	139984,05	168791,33	203378,99
49	82824,0972	100562,428	122006,320	147910,52	179179,58	216896,86	262358,90
50	104358,362	127211,471	154948,026	188585,91	229349,86	278712,46	338442,98

Продовження таблиці А.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	29,50	30,00	30,50	31,00	31,50	32,00	32,50
1	1,2950000	1,3000000	1,3050000	1,3100000	1,3150000	1,3200000	1,3250000
2	1,6770250	1,6900000	1,7030250	1,7161000	1,7292250	1,7424000	1,7556250
3	2,1717474	2,1970000	2,2224476	2,2480910	2,2739309	2,2999680	2,3262031
4	2,8124129	2,8561000	2,9002942	2,9449992	2,9902191	3,0359578	3,0822191
5	3,6420746	3,7129300	3,7848839	3,8579490	3,9321381	4,0074642	4,0839404
6	4,7164867	4,8268090	4,9392734	5,0539131	5,1707616	5,2898528	5,4112210
7	6,1078502	6,2748517	6,4457518	6,6206262	6,7995515	6,9826057	7,1698678
8	7,9096660	8,1573072	8,4117062	8,6730203	8,9414103	9,2170395	9,3000748
9	10,243018	10,604499	10,977277	11,361657	11,757955	12,166492	12,587599
10	13,264708	13,785849	14,325346	14,883770	15,461710	16,059770	16,678569
11	17,177796	17,921604	18,694576	19,497739	20,332149	21,198896	22,099104
12	22,245246	23,298085	24,396422	25,542038	26,736776	27,982543	29,281312
13	28,807594	30,287511	31,837331	33,460070	35,158860	36,936956	38,797739
14	37,305834	39,373764	41,547717	43,832692	46,233901	48,756782	51,407004
15	48,311056	51,185893	54,219771	57,420826	60,797580	64,358953	68,114281
16	62,562817	66,541661	70,756801	75,221282	79,948818	84,953818	90,251422
17	81,018848	86,504159	92,337625	98,539879	105,132695	112,139039	119,583134
18	104,91941	112,45541	120,50060	129,08724	138,24949	148,02353	158,44765
19	135,87063	146,19203	157,25328	169,10429	181,79808	195,39106	209,94314
20	175,95247	190,04964	205,21553	221,52662	239,06448	257,91620	278,17466
21	227,85845	247,06453	267,80627	290,19987	314,36979	340,44939	368,58142
22	295,07669	321,18389	349,48719	380,16183	413,39628	449,39319	488,37039
23	382,12432	417,53905	456,08078	498,01199	543,61611	593,19901	647,09076
24	494,85099	542,80077	595,18541	652,39571	714,85518	783,02269	857,39526
25	640,83203	705,64100	776,71697	854,63838	940,03456	1033,5900	1136,0487
26	829,87748	917,33330	1013,6156	1119,5763	1236,1454	1364,3387	1505,2646
27	1074,6913	1192,5333	1322,7684	1466,6449	1625,5313	1800,9271	1994,4755
26	1391,7253	1550,2933	1726,2128	1921,3048	2137,5736	2377,2238	2642,6801
29	1802,2842	2015,3813	2252,7077	2516,9093	2810,9093	3137,9354	3501,5511
30	2333,9581	2619,9956	2939,7835	3297,1512	3696,3457	4142,0748	4639,5552
31	3022,4757	3405,9943	3836,4175	4319,2681	4860,6946	5467,5387	6147,4107
32	3914,1061	4427,7926	5006,5248	5658,2413	6391,8134	7217,1511	8145,3191
33	5068,7673	5756,1304	6533,5149	7412,2960	8405,2347	9526,6395	10792,5479
34	6564,0537	7482,9696	8526,2369	9710,1078	11052,884	12575,164	14300,126
35	8500,4496	9727,8604	11126,739	12720,241	14534,542	16599,217	18947,667
36	11008,082	12646,219	14520,395	16663,516	19112,923	21910,966	25105,659
37	14255,466	16440,084	18949,115	21829,206	25133,493	28922,475	33264,998
38	18460,829	21372,109	24728,595	28596,260	33050,544	38177,667	44076,122
39	23906,774	27783,742	32270,817	37461,100	43461,465	50394,520	58400,861
40	30959,272	36118,865	42113,416	49074,042	57151,826	66520,767	77381,141
41	40092,257	46954,524	54958,007	64286,994	75154,652	87807,412	102530,012
42	51919,473	61040,882	71720,200	84215,963	98828,367	115905,78	135852,27
43	67235,717	79353,146	93594,861	110322,91	129959,30	152995,64	180004,25
44	87070,254	103159,09	122141,29	144523,01	170898,48	201954,24	238505,63
45	112755,98	134106,82	159394,39	189325,15	224728,87	266579,60	316019,97
46	146018,99	174338,86	208009,68	248015,94	295518,47	351885,07	418726,46
47	189094,60	226640,52	271452,63	324900,89	388606,79	464488,29	554812,55
48	244877,50	294632,68	354245,68	425620,16	511017,93	613124,54	735126,63
49	317116,36	383022,48	462290,61	557562,41	671988,57	809324,39	974042,79
50	410665,69	497929,22	603289,25	730406,76	883664,97	1068308,2	1290606,7

Додаток Б
Таблиці дисконтувальних множників

Таблиця Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	0,9523810	0,9478673	0,9433962	0,9389671	0,9345794	0,9302326	0,9259259
2	0,9070295	0,8984524	0,8899964	0,8816593	0,8734387	0,8653326	0,8573388
3	0,8638376	0,8516137	0,8396193	0,8278491	0,8162979	0,8049606	0,7938322
4	0,8227025	0,8072167	0,7920937	0,7773231	0,7628952	0,7488005	0,7350299
5	0,7835262	0,7651344	0,7472582	0,7298808	0,7129862	0,6965586	0,6805832
6	0,7462154	0,7252458	0,7049605	0,6853341	0,6663422	0,6479615	0,6301696
7	0,7106813	0,6874368	0,6650571	0,6435062	0,6227497	0,6027549	0,5834904
8	0,6768394	0,6515989	0,6274124	0,6042312	0,5820091	0,5607022	0,5402689
9	0,6446089	0,6176293	0,5918985	0,5673532	0,5439337	0,5215835	0,5002490
10	0,6139133	0,5854306	0,5583948	0,5327260	0,5083493	0,4851939	0,4631935
11	0,5846793	0,5549105	0,5267875	0,5002122	0,4750928	0,4513432	0,4288829
12	0,5568374	0,5259815	0,4969694	0,4696829	0,4440120	0,4198541	0,3971138
13	0,5303214	0,4985607	0,4688390	0,4410168	0,4149644	0,3905620	0,3676979
14	0,5050680	0,4725694	0,4423010	0,4141002	0,3878172	0,3633135	0,3404610
15	0,4810171	0,4479330	0,4172651	0,3888265	0,3624460	0,3379660	0,3152417
16	0,4581115	0,4245811	0,3936463	0,3650953	0,3387346	0,3143870	0,2918905
17	0,4362967	0,4024465	0,3713644	0,3428125	0,3165744	0,2924530	0,2702690
18	0,4155207	0,3814659	0,3503438	0,3218897	0,2958639	0,2720493	0,2502490
19	0,3957340	0,3615791	0,3305130	0,3022438	0,2765083	0,2530691	0,2317121
20	0,3768895	0,3427290	0,3118047	0,2837970	0,2584190	0,2354131	0,2145482
21	0,3589424	0,3248616	0,2941554	0,2664761	0,2415131	0,2189890	0,1986557
22	0,3418499	0,3079257	0,2775051	0,2502123	0,2257132	0,2037107	0,1839405
23	0,3255713	0,2918727	0,2617973	0,2349411	0,2109469	0,1894983	0,1703153
24	0,3100679	0,2766566	0,2469785	0,2206020	0,1971466	0,1762775	0,1576993
25	0,2953028	0,2622337	0,2329986	0,2071380	0,1842492	0,1639791	0,1460179
26	0,2812407	0,2485628	0,2198100	0,1944958	0,1721955	0,1525387	0,1352018
27	0,2678483	0,2356045	0,2073680	0,1826252	0,1609304	0,1418964	0,1251868
28	0,2550936	0,2233216	0,1956301	0,1714790	0,1504022	0,1319967	0,1159137
29	0,2429463	0,2116794	0,1845567	0,1610132	0,1405628	0,1227876	0,1073275
30	0,2313774	0,2006440	0,1741101	0,1511861	0,1313671	0,1142210	0,0993773
31	0,2203595	0,1901839	0,1642548	0,1419587	0,1227730	0,1062521	0,0920160
32	0,2098662	0,1802691	0,1549574	0,1332946	0,1147411	0,0988392	0,0852000
33	0,1998725	0,1708712	0,1461862	0,1251592	0,1072347	0,0919434	0,0788889
34	0,1903548	0,1619632	0,1379115	0,1175204	0,1002193	0,0855288	0,0730453
35	0,1812903	0,1535196	0,1301052	0,1103478	0,0936629	0,0795616	0,0676345
36	0,1726574	0,1455162	0,1227408	0,1036130	0,0875355	0,0740108	0,0626246
37	0,1644356	0,1379301	0,1157932	0,0972892	0,0818088	0,0688473	0,0579857
38	0,1566054	0,1307394	0,1092389	0,0913513	0,0764569	0,0640440	0,0536905
39	0,1491480	0,1239236	0,1030555	0,0857759	0,0714550	0,0595758	0,0497134
40	0,1420457	0,1174631	0,0972222	0,0805408	0,0667804	0,0554194	0,0460309
41	0,1352816	0,1113395	0,0917190	0,0756251	0,0624116	0,0515529	0,0426212
42	0,1288396	0,1055350	0,0865274	0,0710095	0,0583286	0,0479562	0,0394641
43	0,1227044	0,1000332	0,0816296	0,0666756	0,0545127	0,0446104	0,0365408
44	0,1168613	0,0948182	0,0770091	0,0626062	0,0509464	0,0414980	0,0338341
45	0,1112965	0,0898751	0,0726501	0,0587852	0,0476135	0,0386028	0,0313279
46	0,1059967	0,0851897	0,0685378	0,0551973	0,0444986	0,0359096	0,0290073
47	0,1009492	0,0807485	0,0646583	0,0518285	0,0415875	0,0334043	0,0268586
48	0,0961421	0,0765389	0,0609984	0,0486652	0,0388668	0,0310738	0,0248691
49	0,0915639	0,0725487	0,0575457	0,0456951	0,0363241	0,0289058	0,0230269
50	0,0872037	0,0687665	0,0542884	0,0429062	0,0339478	0,0268891	0,0213212

Продовження таблиці Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	0,9216590	0,9174312	0,9132420	0,9090909	0,9049774	0,9009009	0,8968610
2	0,8494553	0,8416800	0,8340110	0,8264463	0,8189841	0,8116224	0,8043596
3	0,7829081	0,7721835	0,7616539	0,7513148	0,7411620	0,7311914	0,7213988
4	0,7215743	0,7084252	0,6955743	0,6830135	0,6707349	0,6587310	0,6469944
5	0,6650454	0,6499314	0,6352277	0,6209213	0,6069999	0,5934513	0,5802640
6	0,6129451	0,5962673	0,5801166	0,5644739	0,5493212	0,5346408	05204162
7	0,5649264	0,5470342	0,5297868	0,5131581	0,4971232	0,4816584	0,4667410
8	0,5206634	0,5018663	0,4838236	0,4665074	0,4498853	0,4339265	0,4186018
9	0,4798797	0,4604278	0,4418480	0,4240976	0,4071360	0,3909248	0,3754276
10	0,4422854	0,4224108	0,4035142	0,3855433	0,3684489	0,3521845	0,3367064
11	0,4076363	0,3875329	0,3685061	0,3504939	0,3334379	0,3172833	0,3019788
12	0,3757017	0,3555347	0,3365353	0,3186308	0,3017537	0,2858408	0,2708330
13	0,3462688	0,3261786	0,3073381	0,2896644	0,2730803	0,2575143	0,2428996
14	0,3191418	0,2992465	0,2606741	0,2633313	0,2471315	0,2319948	0,2178471
15	0,2941399	0,2745380	0,2563234	0,2393920	0,2236484	0,2090043	0,1953786
16	0,2710967	0,2518698	0,2340853	0,2176291	0,2023968	0,1882922	0,1752274
17	0,2498587	0,2310732	0,2137765	0,1978447	0,1831645	0,1696326	0,1571547
18	0,2302845	0,2119937	0,1952297	0,1798588	0,1657597	0,1528222	0,1409459
19	0,2122438	0,1944897	0,1782920	0,1635080	0,1500088	0,1376776	0,1264089
20	0,1956164	0,1784309	0,1628237	0,1486436	0,1357546	0,1240339	0,1133712
21	0,1802916	0,1636981	0,1486974	0,1351306	0,1228548	0,1117423	0,1016782
22	0,1661674	0,1501817	0,1357968	0,1228460	0,1111808	0,1006687	0,0911912
23	0,1531497	0,1377814	0,1240153	0,1116782	0,1006161	0,0906925	0,0817858
24	0,1411518	0,1264049	0,1132560	0,1015256	0,0910553	0,0817050	0,0733505
25	0,1300938	0,1159678	0,1034301	0,0922960	0,0824030	0,0736081	0,0657852
26	0,1199021	0,1063925	0,0944567	0,0839055	0,0745729	0,0663136	0,0590002
27	0,1105089	0,0976078	0,0862619	0,0762777	0,0674867	0,0597420	0,0529150
28	0,1018515	0,0895484	0,0787779	0,0693433	0,0610740	0,0538216	0,0474574
29	0,0938723	0,0821545	0,0719433	0,0630394	0,0552706	0,0484879	0,0425627
30	0,0865183	0,0753711	0,0657017	0,0573086	0,0500186	0,0436828	0,0381728
31	0,0797403	0,0691478	0,0600015	0,0520987	0,0452657	0,0393539	0,0342357
32	0,0734934	0,0634384	0,0547959	0,0473624	0,0409644	0,0354540	0,0307047
33	0,0677359	0,0582003	0,0500419	0,0430568	0,0370719	0,0319405	0,0275378
34	0,0624294	0,0533948	0,0457004	0,0391425	0,0335492	0,0287752	0,0246976
35	0,0575386	0,0489861	0,0417355	0,0355841	0,0303613	0,0259236	0,0221503
36	0,0530310	0,0449413	0,0381146	0,0323492	0,0274763	0,0233546	0,0198657
37	0,0488765	0,0412306	0,0348079	0,0294083	0,0248654	0,0210402	0,0178168
38	0,0450474	0,0378262	0,0317880	0,0267349	0,0225026	0,0189551	0,0159792
39	0,0415184	0,0347030	0,0290302	0,0243044	0,0203644	0,0170767	0,0143311
40	0,0382658	0,0318376	0,0265116	0,0220949	0,0184293	0,0153844	0,0128530
41	0,0352680	0,0292088	0,0242115	0,0200863	0,0166781	0,0138598	0,0115274
42	0,0325051	0,0267971	0,0221109	0,0182603	0,0150933	0,0124863	0,0103385
43	0,0299586	0,0245845	0,0201926	0,0166002	0,0136591	0,0112489	0,0092722
44	0,0276116	0,0225545	0,0184408	0,0150911	0,0123612	0,0101342	0,0083158
45	0,0254485	0,0206922	0,0168409	0,0137192	0,0111666	0,0091299	0,0074581
46	0,0234548	0,0189837	0,0153798	0,0124720	0,0101236	0,0082251	0,0066889
47	0,0216173	0,0174162	0,0140455	0,0113382	0,0091616	0,0074100	0,0059990
48	0,0199238	0,0159782	0,0126269	0,0103074	0,0082911	0,0066757	0,0053803
49	0,0183630	0,0146589	0,0117141	0,0093704	0,0075032	0,0060141	0,0048254
50	0,0169244	0,0134485	0,0106978	0,0085186	0,0067903	0,0054182	0,0043277

Продовження таблиці Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,30	15,00
1	0,8928571	0,8888889	0,8849558	0,8810573	0,8771930	0,8733624	0,8695652
2	0,7971939	0,7901235	0,7831467	0,7762619	0,7694675	0,7627620	0,7561437
3	0,7117802	0,7023320	0,6930502	0,6839312	0,6749715	0,6661677	0,6575162
4	0,6355181	0,6242951	0,6133187	0,6025826	0,5920803	0,5818058	0,5717532
5	0,5674269	0,5549290	0,5427599	0,5309097	0,5193687	0,5081273	0,4971767
6	0,5066311	0,4932702	0,4803185	0,4677619	0,4555865	0,4437793	0,4323276
7	0,4523492	0,4384624	0,4250606	0,4121250	0,3996373	0,3875802	0,3759370
8	0,4038832	0,3897443	0,3761599	0,3631057	0,3505591	0,3384980	0,3269018
9	0,3606100	0,3464394	0,3328848	0,3199169	0,3075079	0,2956314	0,2842624
10	0,3219732	0,3079461	0,2945883	0,2818652	0,2697438	0,2581934	0,2471847
11	0,2874761	0,2737299	0,2606977	0,2483393	0,2366174	0,2254964	0,2149432
12	0,2566751	0,2433155	0,2307059	0,2188012	0,2075591	0,1969401	0,1869072
13	0,2291742	0,2162804	0,2041645	0,1927764	0,1820694	0,1720001	0,1625280
14	0,2046198	0,1922493	0,1806766	0,1698470	0,1537100	0,1502184	0,1413287
15	0,1826963	0,1708882	0,1598908	0,1496450	0,1400965	0,1311951	0,1228945
16	0,1631217	0,1519007	0,1414962	0,1318458	0,1228917	0,1145809	0,1068648
17	0,1456443	0,1350228	0,1252179	0,1161637	0,1077997	0,1000707	0,0929259
18	0,1300396	0,1200203	0,1108123	0,1023469	0,0945611	0,0873979	0,0808051
19	0,1161068	0,1066847	0,0980640	0,0901734	0,0829484	0,0763301	0,0702653
20	0,1036668	0,0948308	0,0867823	0,0794480	0,0727617	0,0666638	0,0611003
21	0,0925596	0,0842941	0,0767985	0,0699982	0,0638261	0,0582217	0,0531307
22	0,0826425	0,0749281	0,0679633	0,0616724	0,0559878	0,0508486	0,0462006
23	0,0737880	0,0666027	0,0601445	0,0543369	0,0491121	0,0444093	0,0401744
24	0,0658821	0,0592024	0,0532252	0,0478740	0,0430808	0,0387854	0,0349343
25	0,0588233	0,0526244	0,0471020	0,0421797	0,0377902	0,0338737	0,0303776
26	0,0525208	0,0467772	0,0416831	0,0371627	0,0331493	0,0295840	0,0264153
27	0,0468936	0,0415798	0,0368877	0,0327425	0,0290783	0,0258376	0,0229699
28	0,0418693	0,0369598	0,0326440	0,0288480	0,0255073	0,0225656	0,0199738
29	0,0373833	0,0328531	0,0288885	0,0254167	0,0223748	0,0197079	0,0173685
30	0,0333779	0,0292028	0,0255651	0,0223936	0,0196270	0,0172122	0,0151031
31	0,0298017	0,0259580	0,0226239	0,0197301	0,0172167	0,0150325	0,0131331
32	0,0266087	0,0230738	0,0200212	0,0173833	0,0151024	0,0131288	0,0114201
33	0,0237577	0,0205101	0,0177179	0,0153157	0,0132477	0,0114662	0,0099305
34	0,0212123	0,0182312	0,0156795	0,0134940	0,0116208	0,0100141	0,0086352
35	0,0189395	0,0162055	0,0138757	0,0118890	0,0101937	0,0087460	0,0075089
36	0,0169103	0,0144049	0,0122794	0,0104749	0,0089418	0,0076384	0,0065295
37	0,0150985	0,0128043	0,0108667	0,0092290	0,0078437	0,0066711	0,0056778
38	0,0134808	0,0113816	0,0096165	0,0081312	0,0068804	0,0058263	0,0049372
39	0,0120364	0,0101170	0,0085102	0,0071641	0,0060355	0,0050885	0,0042932
40	0,0107468	0,0089929	0,0075312	0,0063120	0,0052943	0,0044441	0,0037332
41	0,0095954	0,0079937	0,0066647	0,0055612	0,0046441	0,0033813	0,0032463
42	0,0085673	0,0071055	0,0058980	0,0048997	0,0040738	0,0033898	0,0028229
43	0,0076494	0,0063160	0,0052195	0,0043170	0,0035735	0,0029605	0,0024547
44	0,0068298	0,0056142	0,0046190	0,0038035	0,0031346	0,0025856	0,0021345
45	0,0060980	0,0049904	0,0040876	0,0031511	0,0027497	0,0022582	0,0018561
46	0,0054447	0,0044359	0,0036174	0,0029525	0,0024120	0,0019722	0,0016140
47	0,0048613	0,0039430	0,0032012	0,0026013	0,0021158	0,0017224	0,0014035
43	0,0043405	0,0035049	0,0028329	0,0022919	0,0018560	0,0015043	0,0012204
49	0,0038754	0,0031155	0,0025070	0,0020193	0,0016280	0,0013138	0,0010612
50	0,0034602	0,0027693	0,0022186	0,0017791	0,0014281	0,0011474	0,0009228

Продовження таблиці Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	18,50
1	0,8658009	0,8620690	0,8583691	0,8547009	0,8510638	0,8474576	0,8438819
2	0,7496111	0,7431629	0,7367975	0,7305136	0,7243096	0,7181844	0,7121366
3	0,6490140	0,6406577	0,6324442	0,6243706	0,6164337	0,6086309	0,6009591
4	0,5619169	0,5522911	0,5428706	0,5336500	0,5246245	0,5157889	0,5071385
5	0,4865081	0,4761130	0,4659333	0,456412	0,4464889	0,4371092	0,4279650
6	0,4212191	0,4104423	0,3999857	0,3898386	0,3799906	0,3704315	0,3611519
8	0,3646519	0,3538295	0,3433354	0,3331954	0,3233362	0,3139250	0,3047695
8	0,3157506	0,3050255	0,2947085	0,2847824	0,2752308	0,2660382	0,2571895
9	0,2733771	0,2629530	0,2529686	0,2434037	0,2342390	0,2254561	0,2170375
10	0,2366901	0,2266636	0,2171405	0,2080374	0,1993523	0,1910645	0,1831540
11	0,2049265	0,1954169	0,1863867	0,1778097	0,1696616	0,1619190	0,1545604
12	0,1774256	0,1684628	0,1599885	0,1519741	0,1443928	0,1372195	0,1304307
13	0,1536152	0,1452266	0,1373292	0,1298924	0,1228875	0,1162877	0,1100681
14	0,1330002	0,1251953	0,1178792	0,1110192	0,1045851	0,0985489	0,0928845
15	0,1151517	0,1079270	0,1011838	0,0948882	0,0890086	0,0835160	0,0783835
16	0,0996564	0,0930405	0,0868531	0,0811010	0,0757520	0,0707763	0,0661464
17	0,0863190	0,0802074	0,0745520	0,0693171	0,0644698	0,0599799	0,0558198
18	0,0747350	0,0691443	0,0639931	0,0592454	0,0548679	0,0508304	0,0471053
19	0,0647057	0,0596071	0,0549297	0,0506371	0,0466961	0,0430766	0,0397513
20	0,0560222	0,0513855	0,0471500	0,0432796	0,0397414	0,0365056	0,0335454
21	0,0485041	0,0442978	0,0404721	0,0369911	0,0338224	0,0309370	0,0283084
22	0,0419949	0,0381878	0,0347400	0,0316163	0,0287850	0,0262178	0,0238889
23	0,0363592	0,0329205	0,0298197	0,0270225	0,0244979	0,0222185	0,0201594
24	0,0314798	0,0283797	0,0255963	0,0230961	0,0208493	0,0188292	0,0170122
25	0,0272553	0,0244653	0,0219711	0,0197403	0,0177441	0,0159569	0,0143663
26	0,0235376	0,0210906	0,0188593	0,0168720	0,0151013	0,0135228	0,0121150
27	0,0204308	0,0181817	0,0161883	0,0144205	0,0128522	0,0114600	0,0102236
28	0,0176890	0,0156739	0,0138955	0,0123253	0,0109380	0,0097119	0,0086275
29	0,0153152	0,0135120	0,0119275	0,0105344	0,0093090	0,0082304	0,0072806
30	0,0132599	0,0116482	0,0102382	0,0090038	0,0079225	0,0069749	0,0061440
31	0,0114804	0,0100416	0,0087881	0,0076955	0,0067426	0,0059110	0,0051848
32	0,0099398	0,0086565	0,0075435	0,0065774	0,0057384	0,0050093	0,0043753
33	0,0086059	0,0074625	0,0064751	0,0056217	0,0048837	0,0042452	0,0036923
34	0,0074510	0,0064332	0,0055580	0,0048049	0,0041564	0,0035976	0,0031158
35	0,0064511	0,0055459	0,0047708	0,0041067	0,0035373	0,0030468	0,0026294
36	0,0055853	0,0047809	0,0040951	0,0035100	0 0030105	0,0025837	0,0022189
37	0,0048358	0,0041215	0,0035151	0,0030000	0,0025621	0,0021896	0,0018725
за	0,0041868	0,0035530	0,0030173	0,0025641	0,0021805	0,0018556	0,0015802
39	0,0036250	0,0030629	0,0025899	0,0021916	0,0016558	0,0015725	0,0013335
40	0,0031385	0,0026405	0,0022231	0,0018731	0,0015794	0,0013327	0,0011253
41	0,0027173	0,0022763	0,0019083	0,0016010	0,0013441	0,0011294	0,0009496
42	0,0023526	0,0019623	0,0016380	0,0013683	0,0011440	0,0009571	0,0008014
43	0,0020369	0,0016916	0,0014060	0,0011695	0,0009736	0,0008111	0,0006763
44	0,0017636	0,0014583	0,0012069	0,0009996	0,0008286	0,0006874	0,0005707
45	0,0015269	0,0012572	0,0010359	0,0008544	0,0007052	0,0005825	0,0004816
46	0,0013220	0,0010838	0,0008892	0,0007302	0,0006001	0,0004937	0,0004064
47	0,0011446	0,0009343	0,0007633	0,0006241	0,0005108	0,0004184	0,0003430
48	0,0009910	0,0008054	0,0006552	0,0005334	0,0004347	0,0003545	0,0002894
49	0,0008580	0,0006943	0,0005624	0,0004559	0,0003700	0,0003005	0,0002442
50	0,0007428	0,0005986	0 0004827	0,0003897	0,0003149	0,0002546	0,0002061

Продовження таблиці Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	19,00	19,50	20,00	20,50	21,00	21,50	22,00
1	0,8403361	0,8368201	0,8333333	0,8298755	0,8264463	0,8230453	0,8196721
2	0,7061648	0,7002679	0,6944444	0,6886934	0,6830135	0,6774035	0,6718624
3	0,5934158	0,5859982	0,5787037	0,5715298	0,5644739	0,5575338	0,5507069
4	0,4986683	0,4903751	0,4322531	0,4742986	0,4665074	0,4588755	0,4513991
5	0,4190494	0,4103557	0,4018776	0,3936088	0,3855433	0,3776753	0,3699993
6	0,3521423	0,3433939	0,3348980	0,3266463	0,3186308	0,3108439	0,3032781
7	0,2959179	0,2873589	0,2790816	0,2710758	0,2633313	0,2558386	0,7435386
8	0,2486705	0,2404677	0,2325680	0,2249591	0,2176291	0,2105667	0,2037611
9	0,2089668	0,2012282	0,1938067	0,1866881	0,1798588	0,1733060	0,1670173
10	0,1756024	0,1683918	0,1615056	0,1549279	0,1486436	0,1426387	0,1368994
11	0,1475650	0,1409136	0,1345880	0,1285708	0,1228460	0,1173981	0,1122127
12	0,1240042	0,1179194	0,1121567	0,1066978	0,1015255	0,0966239	0,0919776
13	0,1042052	0,0986773	0,0934639	0,0885459	0,0839055	0,0795259	0,0753915
14	0,0875674	0,0825751	0,0778866	0,0734821	0,0693433	0,0654534	0,0617963
15	0,0735861	0,0691005	0,0649055	0,0609810	0,0573086	0,0538711	0,0506527
16	0,0618370	0,0578247	0,0540879	0,0506066	0,0473674	0,0443384	0,0415186
17	0,0519639	0,0483889	0,0450732	0,0419972	0,0391425	0,0364925	0,0340316
18	0,0436671	0,0404928	0,0375610	0,0348524	0,0323492	0,0300350	0,0278946
19	0,0366951	0,0338852	0,0313009	0,0289232	0,0267349	0,0247201	0,0228646
20	0,0308362	0,0283558	0,0260841	0,0240026	0,0220949	0,0203458	0,0187415
21	0,0259128	0,0237287	0,0217367	0,0199192	0,0182603	0,0167455	0,0153619
22	0,0217754	0,0198567	0,0181139	0,0165305	0,0150911	0,0137823	0,0125917
23	0,0182987	0,0166164	0,0150949	0,0137182	0,0124720	0,0113435	0,0103211
24	0,0153770	0,0139050	0,0125791	0,0113844	0,0103074	0,0093362	0,0084599
25	0,0129219	0,0116360	0,0104826	0,0094477	0,0085186	0,0076841	0,0069343
26	0,0108587	0,0097372	0,0087355	0,0078404	0,0070401	0,0063244	0,0056839
27	0,0091250	0,0081483	0,0072796	0,0065065	0,0058163	0,0052052	0,0046589
28	0,0076681	0,0068187	0,0060663	0,0053996	0,0048085	0,0042841	0,0038188
29	0,0064437	0,0057060	0,0050553	0,0044810	0,0039740	0,0035260	0,0031301
30	0,0054149	0,0047749	0,0042127	0,0037187	0,0032843	0,0029021	0,0025657
31	0,0045503	0,0039957	0,0035106	0,0030860	0,0027143	0,0023886	0,0021030
32	0,0038238	0,0033437	0,0029255	0,0025610	0,0022432	0,0019659	0,0017238
33	0,0032133	0,0027981	0,0024379	0,0021253	0,0018539	0,0016180	0,0014129
34	0,0027002	0,0023415	0,0020316	0,0017638	0,0015321	0,0013317	0,0011582
35	0,0022691	0,0019594	0,0016930	0,0014637	0,0012662	0,0010960	0,0009493
36	0,0019068	0,0016337	0,0014108	0,0012147	0,0010465	0,0009021	0,0007781
37	0,0016024	0,0013721	0,0011757	0,0010080	0,0008649	0,0007425	0,0006378
33	0,0013465	0,0011482	0,0009797	0,0008366	0,0007148	0,0006111	0,0005228
39	0,0011315	0,0009608	0,0008165	0,0006942	0,0005907	0,0005030	0,0004285
40	0,0009509	0,0008041	0,0006804	0,0005761	0,0004882	0,0004140	0,0003512
41	0,0007991	0,0006728	0,0005670	0,0004781	0,0004035	0,0003407	0,0002879
42	0,0006715	0,0005631	0,0004725	0,0003968	0,0003334	0,0002804	0,0002360
43	0,0005643	0,0004712	0,0003937	0,0003293	0,0002756	0,0002308	0,0001934
44	0,0004742	0,0003943	0,0003281	0,0002733	0,0002277	0,0001900	0,0001586
45	0,0003985	0,0003299	0,0002734	0,0002268	0,0001882	0,0001563	0,0001300
46	0,0003348	0,0002761	0,0002279	0,0001882	0,0001556	0,0001287	0,0001065
47	0,0002814	0,0002311	0,0001899	0,0001562	0,0001286	0,0001059	0,0000873
48	0,0002365	0,0001933	0,0001582	0,0001296	0,0001062	0,0000872	0,0000716
49	0,0001987	0,0001618	0,0001319	0,0001076	0,0000878	0,0000717	0,0000587
50	0,0001670	0,0001354	0,0001099	0,0000893	0,0000726	0,0000590	0,0000481

Продовження таблиці Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	0,8163265	0,8130081	0,8097166	0,8064516	0,8032129	0,8000000	0,7968127
2	0,6663890	0,6609822	0,6556410	0,6503642	0,6451509	0,6400000	0,6349106
3	0,5439910	0,5373839	0,5308834	0,5244873	0,5181935	0,5120000	0,5059048
4	0,4440743	0,4368975	0,4298651	0,4229736	0,4162197	0,4096000	0,4031114
5	0,3625096	0,3552012	0,3480689	0,3411077	0,3343130	0,3276800	0,3212043
6	0,2959262	0,2887815	0,2818372	0,2750669	0,2685245	0,2621440	0,2559397
7	0,2415724	0,2347817	0,2282082	0,2218443	0,2156823	0,2097152	0,2039360
8	0,1972020	0,1908794	0,1847840	0,1789067	0,1732388	0,1677722	0,1624988
9	0,1609812	0,1551865	0,1496227	0,1442796	0,1391476	0,1342177	0,1294811
10	0,1314132	0,1261679	0,1211520	0,1163545	0,1117652	0,1073742	0,1031722
11	0,1072761	0,1025755	0,0980987	0,0938343	0,0897712	0,0858993	0,0822089
12	0,0875723	0,0833947	0,0794322	0,0756728	0,0721054	0,0687195	0,0655051
13	0,0714876	0,0678006	0,0643176	0,0610264	0,0579160	0,0549756	0,0521953
14	0,0583572	0,0551224	0,0520790	0,0492149	0,0465189	0,0439805	0,0415899
15	0,0476386	0,0448150	0,0421692	0,0396894	0,0373645	0,0351844	0,0331394
16	0,0388886	0,0364350	0,0341451	0,0320076	0,0300117	0,0281475	0,0264059
17	0,0317458	0,0296219	0,0276479	0,0258126	0,0241058	0,0225180	0,0210405
18	0,0259150	0,0240829	0,0223869	0,0208166	0,0193621	0,0180144	0,0167654
19	0,0211551	0,0195796	0,0181271	0,0167876	0,0155519	0,0144115	0,0133589
20	0,0172694	0,0159183	0,0146778	0,0135384	0,0124915	0,0115292	0,0106445
21	0,0140975	0,0129417	0,0118849	0,0109180	0,0100333	0,0092234	0,0084817
22	0,0115082	0,0105217	0,0096234	0,0088049	0,0080589	0,0073787	0,0067583
23	0,0093944	0,0085543	0,0077922	0,0071007	0,0064730	0,0059030	0,0053851
24	0,0076689	0,0069547	0,0063095	0,0057264	0,0051992	0,0047224	0,0042909
25	0,0062603	0,0056542	0,0051089	0,0046180	0,0041761	0,0037779	0,0034191
26	0,0051105	0,0045969	0,0041367	0,0037242	0,0033543	0,0030223	0,0027244
27	0,0041718	0,0037373	0,0033496	0,0030034	0,0026942	0,0024179	0,0021708
28	0,0034056	0,0030385	0,0027122	0,0024221	0,0021640	0,0019343	0,0017297
29	0,0027801	0,0024703	0,0021961	0,0019533	0,0017382	0,0015474	0,0013783
30	0,0022694	0,0020084	0,0017782	0,0015752	0,0013961	0,0012379	0,0010982
31	0,0018526	0,0016328	0,0014399	0,0012704	0,0011214	0,0009904	0,0008751
32	0,0015123	0,0013275	0,0011659	0,0010245	0,0009007	0,0007923	0,0006973
33	0,0012346	0,0010793	0,0009440	0,0008262	0,0007235	0,0006338	0,0005556
34	0,0010078	0,0008775	0,0007644	0,0006663	0,0005811	0,0005071	0,0004427
35	0,0008227	0,0007134	0,0006190	0,0005373	0,0004667	0,0004056	0,0003528
36	0,0006716	0,0005800	0,0005012	0,0004333	0,0003749	0,0003245	0,0002811
37	0,0005482	0,0004715	0,0004058	0,0003495	0,0003011	0,0002596	0,0002240
за	0,0004475	0,0003834	0,0003286	0,0002818	0,0002419	0,0002077	0,0001785
39	0,0003653	0,0003117	0,0002661	0,0002273	0,0001943	0,0001662	0,0001422
40	0,0002982	0,0002534	0,0002154	0,0001833	0,0001560	0,0001329	0,0001133
41	0,0002435	0,0002060	0,0001744	0,0001478	0,0001253	0,0001063	0,0000903
42	0,0001987	0,0001675	0,0001412	0,0001192	0,0001007	0,0000851	0,0000719
43	0,0001622	0,0001362	0,0001144	0,0000961	0,0000809	0,0000681	0,0000573
44	0,0001324	0,0001107	0,0000926	0,0000775	0,0000649	0,0000544	0,0000457
45	0,0001081	0,0000900	0,0000750	0,0000625	0,0000522	0,0000436	0,0000364
46	0,0000883	0,0000732	0,0000607	0,0000504	0,0000419	0,0000348	0,0000290
47	0,0000720	0,0000595	0,0000492	0,0000407	0,0000337	0,0000279	0,0000231
48	0,0000588	0,0000484	0,0000398	0,0000328	0,0000270	0,0000223	0,0000184
49	0,0000480	0,0000393	0,0000322	0,0000264	0,0000217	0,0000178	0,0000147
50	0,0000392	0,0000320	0,0000261	0,0000213	0,0000174	0,0000143	0,0000117

Продовження таблиці Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,50	29,00
1	0,7936508	0,7905138	0,7874016	0,7843137	0,7812500	0,7782101	0,7751938
2	0,6298816	0,6249121	0,6200012	0,6151480	0,6103516	0,6056110	0,6009254
3	0,4999060	0,4940017	0,4881900	0,4824690	0,4768372	0,4712926	0,4658337
4	0,3967508	0,3905152	0,3844015	0,3784071	0,3725290	0,3667647	0,3611114
5	0,3148816	0,3087076	0,3026784	0,2967899	0,2910383	0,2854200	0,2799313
6	0,2499060	0,2440377	0,2383294	0,2327764	0,2273737	0,2221167	0,2170010
7	0,1983381	0,1929151	0,1876610	0,1825697	0,1776357	0,1728535	0,1682176
8	0,1574112	0,1525021	0,1477645	0,1431919	0,1387779	0,1345163	0,1304014
9	0,1249295	0,1205550	0,1163500	0,1123074	0,1084202	0,1046820	0,1010864
10	0,0991504	0,0953004	0,0916142	0,0880842	0,0847033	0,0814646	0,0783615
11	0,0786908	0,0753363	0,0721372	0,0690857	0,0661744	0,0633965	0,0607454
12	0,0624530	0,0595544	0,0568009	0,0541848	0,0516988	0,0493358	0,0470894
13	0,0495659	0,0470786	0,0447251	0,0424979	0,0403897	0,0383936	0,0365034
14	0,0393380	0,0372163	0,0352166	0,0333317	0,0315544	0,0298783	0,0282972
15	0,0312206	0,0294200	0,0277296	0,0261425	0,0246519	0,0232516	0,0219358
16	0,0247783	0,0232569	0,0218344	0,0205039	0,0192593	0,0180946	0,0170045
17	0,0196653	0,0183849	0,0171924	0,0160815	0,0150463	0,0140814	0,0131818
18	0,0156074	0,0145335	0,0135373	0,0126130	0,0117549	0,0109583	0,0102185
19	0,0123868	0,0114889	0,0106593	0,0098925	0,0091835	0,0085279	0,0079213
20	0,0098308	0,0090822	0,0083932	0,0077588	0,0071746	0,0066365	0,0061405
21	0,0078022	0,0071796	0,0066088	0,0060854	0,0056052	0,0051646	0,0047601
22	0,0061922	0,0056756	0,0052038	0,0047728	0,0043791	0,0040191	0,0036900
23	0,0049145	0,0044866	0,0040975	0,0037434	0,0034211	0,0031277	0,0028605
24	0,0039004	0,0035467	0,0032263	0,0029360	0,0026728	0,0024340	0,0022174
25	0,0030955	0,0028037	0,0025404	0,0023027	0,0020881	0,0018942	0,0017189
26	0,0024568	0,0022164	0,0020003	0,0018061	0,0016313	0,0014741	0,0013325
27	0,0019498	0,0017521	0,0015751	0,0014165	0,0012745	0,0011471	0,0010329
28	0,0015475	0,0013850	0,0012402	0,0011110	0,0009957	0,0008927	0,0008007
29	0,0012282	0,0010949	0,0009765	0,0008714	0,0007779	0,0006947	0,0006207
30	0,0009747	0,0008655	0,0007689	0,0006834	0,0006077	0,0005406	0,0004812
31	0,0007736	0,0006842	0,0006055	0,0005360	0,0004748	0,0004207	0,0003730
32	0,0006140	0,0005409	0,0004767	0,0004204	0,0003709	0,0003274	0,0002892
33	0,0004873	0,0004276	0,0003754	0,0003297	0,0002898	0,0002548	0,0002242
34	0,0003867	0,0003380	0,0002956	0,0002586	0,0002264	0,0001983	0 0001738
35	0,0003069	0,0002672	0,0002327	0,0002028	0,0001769	0,0001543	0,0001347
36	0,0002436	0,0002112	0,0001833	0,0001591	0,0001382	0,0001201	0,0001044
37	0,0001933	0,0001670	0,0001443	0,0001248	0,0001080	0,0000935	0,0000809
38	0,0001534	0,0001320	0,0001136	0,0000979	0,0000843	0,0000727	0,0000627
39	0,0001218	0,0001043	0,0000895	0,0000768	0,0000659	0,0000566	0,0000486
40	0,0000966	0,0000825	0,0000704	0,0000602	0,0000515	0,0000440	0,0000377
41	0,0000767	0,0000652	0,0000555	0,0000472	0,0000402	0,0000343	0,0000292
42	0,0000609	0,0000515	0,0000437	0,0000370	0,0000314	0,0000267	0,0000227
43	0,0000483	0,0000407	0,0000344	0,0000290	0,0000245	0,0000208	0,0000176
44	0,0000383	0,0000322	0,0000271	0,0000228	0,0000192	0,0000162	0,0000136
45	0,0000304	0,0000255	0,0000213	0,0000179	0,0000150	0,0000126	0,0000106
46	0,0000242	0,0000201	0,0000168	0,0000140	0,0000117	0,0000098	0,0000082
47	0,0000192	0,0000159	0,0000132	0,0000110	0,0000091	0,0000076	0,0000063
48	0,0000152	0,0000126	0,0000104	0,0000086	0,0000071	0,0000059	0,0000049
49	0,0000121	0,0000099	0,0000082	0,0000068	0,0000056	0,0000046	0,0000038
50	0,0000096	0,0000079	0,0000065	0,0000053	0,0000044	0,0000036	0,0000030

Продовження таблиці Б.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	29,50	30,00	30,50	31,00	31,50	32,00	32,50
1	0,7722008	0,7692308	0,7662835	0,7633588	0,7604563	0,7575758	0,7547170
2	0,5962940	0,5917160	0,5871904	0,5827166	0,5782937	0,5739210	0,5695977
3	0,4604587	0,4551661	0,4499544	0,4448219	0,4397671	0,4347887	0,4298851
4	0,3555666	0,3501278	0,3447526	0,3395507	0,3344237	0,3233853	0,3244416
5	0,2745688	0,2693291	0,2642083	0,2532051	0,2543146	0,2495344	0,2448616
6	0,2120222	0,2071762	0,2024589	0,1978665	0,1933951	0,1890412	0,1848012
7	0,1637237	0,1533663	0,1551409	0,1510431	0,1470685	0,1432130	0,1394726
8	0,1264276	0,1225895	0,1186819	0,1153001	0,1118392	0,1084947	0,1052623
9	0,0976275	0,0942996	0,0910973	0,0880153	0,0650488	0,0821930	0,0794433
10	0,0753880	0,0725382	0,0698063	0,0671873	0,0646759	0,0622674	0,0599572
11	0,0582147	0,0557986	0,0534915	0,0512800	0,0491832	0,0471723	0,0452507
12	0,0449534	0,0420220	0,0409896	0,0391511	0,0374017	0,0357366	0,0341515
13	0,0347131	0,0330169	0,0314097	0,0298864	0,0284423	0,0270732	0,0257747
14	0,0268055	0,0253976	0,0240687	0,0228140	0,0216292	0,0205100	0,0194526
15	0,0206992	0,0195366	0,0184435	0,0174153	0,0164480	0,0155379	0,0146812
16	0,0159839	0,0150282	0,01413?9	0,0132941	0,0125080	0,0117711	0,0110802
17	0,0123428	0,0115601	0,0108298	0,0101482	0,0095118	0,0089175	0,0083624
18	0,0095311	0,0088924	0,0082987	0,0077467	0,0072333	0,0067557	0,0063112
19	0,0073599	0,0068403	0,0063532	0,0059135	0,0055006	0,0051179	0 0047632
20	0,0056834	0,0052618	0,0048729	0,0045141	0,0041830	0,0038772	0,0035949
21	0,0043887	0,0040475	0,0037340	0,0034459	0,0031810	0,0029373	0,0027131
22	0,0033889	0,0031135	0,0028613	0,0026305	0,0024190	0 0022252	0,0020476
23	0,0026169	0,0023950	0,0021926	0,0020080	0,0018395	0 0016358	0,0015454
24	0,0020208	0,0018423	0,0016801	0,0015328	0,0013989	0,0012771	0,0011663
25	0,0015605	0,0014172	0,0012875	0,0011701	0,0010638	0,0009675	0,0008802
26	0,0012050	0,0010901	0,0003866	0,0008932	0,0008090	0,0007330	0,0006643
27	0,0009305	0,0008386	0,0007560	0,0006818	0,0006152	0,0005553	0,0005014
28	0,0007185	0,0006450	0,0005793	0,0005205	0,0004678	0,0004207	0,0003784
29	0,0005549	0,0004962	0,0004439	0,0003973	0,0003558	0,0003187	0,0002856
30	0,0004285	0,0003817	0,0003402	0,0003033	0,0002705	0,0002414	00002155
31	0,0003309	0,0002936	0,0002607	0,0002315	0,0002057	0,0001823	0,0001627
32	0,0002555	0,0002258	0,0001997	0,0001767	0,0001565	0,0001386	0,0001228
33	0,0001973	0,0001737	0,0001531	0,0001349	0,0001190	0,0001050	0,0000927
34	0,0001523	0,0001336	0,0001173	0,0001030	0,0000905	0,0000795	0,0000699
35	0,0001176	0,0001028	0,0000899	0,0000786	0,0000688	0,0000602	0,0000528
36	0,0000908	0,0000791	0,0000689	0,0000600	0,0000523	0,0000456	0,0000398
37	0,0000701	0,0000608	0,0000528	0,0000458	0,0000398	0,0000346	0,0000301
38	0,0000542	0,0000468	0,0000404	0,0000350	0,0000303	0,0000262	0,0000227
39	0,0000418	0,0000360	0,0000310	0,0000267	0,0000230	0,0000198	0,0000171
40	0,0000323	0,0000277	0,0000237	0,0000204	0,0000175	0,0000150	0,0000129
41	0,0000249	0,0000213	0,0000182	0,0000156	0,0000133	0,0000114	0,0000098
42	0,0000193	0,0000164	0,0000139	0,0000119	0,0000101	0,0000086	0,0000074
43	0,0000149	0,0000126	0,0000107	0,0000091	0,0000077	0,0000065	0,0000056
44	0,0000115	0,0000097	0,0000082	0,0000069	0,0000059	0,0000050	0,0000042
45	0,0000089	0,0000075	0,0000063	0,0000053	0,0000044	0,0000033	0,0000032
46	0,0000068	0,0000057	0,0000048	0,0000040	0,0000034	0,0000028	0,0000024
47	0,0000053	0,0000044	0,0000037	0,0000031	0,0000026	0,0000022	0,0000018
48	0,0000041	0,0000034	0,0000028	0,0000023	0,0000020	0,0000016	0,0000014
49	0,0000032	0,0000026	0,0000022	0,0000018	0,0000015	0,0000012	0,0000010
50	0,0000024	0,0000020	0,0000017	0,0000014	0,0000011	0,0000009	0,0000008

Додаток В
Таблиці коефіцієнтів нарощення ренти

Таблиця В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0500000	2,0550000	2,0600000	2,0650000	2,0700000	2,0750000	2,0800000
3	3,1525000	3,1680250	3,1836000	3,1992250	3,2149000	3,2306250	3,2464000
4	4,3101250	4,3422664	4,3746160	4,4071746	4,4399430	4,4729219	4,5061120
5	5,5256313	5,5810910	5,6370930	5,6936410	5,7507390	5,8083910	5,8666010
6	6,8019128	6,8880510	6,9753185	7,0637276	7,1532907	7,2440203	7,3359290
7	8,1420085	8,2668933	8,3938376	8,5228699	8,6540211	8,7873219	8,9228034
8	9,5491089	9,7215730	9,8974679	10,076856	10,259803	10,446371	10,636628
9	11,026564	11,256260	11,491316	11,731852	11,977989	12,229849	12,487558
10	12,577893	12,875354	13,180795	13,494423	13,816448	14,147087	14,486562
11	14,206787	14,583498	14,971643	15,371560	15,783599	16,208119	16,645487
12	15,917127	16,385591	16,869941	17,370711	17,888451	18,423728	18,977126
13	17,712983	18,286798	18,882138	19,499808	20,140643	20,805508	21,495297
14	19,593632	20,292572	21,015066	21,767295	22,550488	23,365921	24,214920
15	21,578564	22,408663	23,275970	24,182169	25,129022	26,118365	27,152114
16	23,657492	24,641140	25,672528	26,754010	27,888054	29,077242	30,324283
17	25,840366	26,996403	28,212880	29,493021	30,840217	32,258035	33,750226
18	28,132385	29,481205	30,905653	32,410067	33,999033	35,677388	37,450244
19	30,539004	32,102671	33,759992	35,516722	37,378965	39,353192	41,446263
20	33,065954	34,868318	36,785591	38,825309	40,995492	43,304681	45,761964
21	35,719252	37,786076	39,992727	42,348954	44,865177	47,552532	50,422921
22	38,505214	40,864310	43,392290	46,101636	49,005739	52,118972	55,456755
23	41,430475	44,111847	46,995828	50,098242	53,436141	57,027895	60,893296
24	44,501999	47,537998	50,815577	54,354628	58,176671	62,304987	66,764759
25	47,727099	51,152588	54,864512	58,887679	63,249038	67,977862	73,105940
26	51,113454	54,965981	59,156383	63,715378	68,676470	74,076201	79,954415
27	54,669126	58,989109	63,705766	68,856877	74,483823	80,631916	87,350768
28	58,402583	63,233510	68,528112	74,332574	80,697691	87,679310	95,338830
29	62,322712	67,711354	73,639798	80,164192	87,346529	95,255258	103,96594
30	66,438848	72,435478	79,058186	66,374864	94,460786	103,39940	113,28321
31	70,760790	77,419429	84,801677	92,999230	102,07304	112,15436	123,34587
32	75,298829	82,677498	90,889778	100,03353	110,21815	121,56593	134,21354
33	80,063771	88,224760	97,343165	107,53571	118,93343	131,68338	145,95062
34	85,066959	94,077122	104,18375	115,52553	128,25876	142,55963	158,62667
35	90,320307	100,25136	111,43478	124,03469	138,23688	154,25161	172,31680
36	95,836323	106,76519	119,12087	133,09695	148,91346	166,82048	187,10215
37	101,62814	113,63727	127,26812	142,74825	160,33740	180,33201	203,07032
38	107,70955	120,88732	135,90421	153,02688	17256102	194,85691	220,31595
39	114,09502	128,53613	145,05846	163,97363	185,64029	210,47118	238,94122
40	120,79977	136,60561	154,76197	175,63192	199,63511	227,25652	259,05652
41	127,83976	145,11892	165,04768	188,04799	214,60957	245,30076	280,78104
42	135,23175	154,10046	175,95054	201,27111	230,63224	264,69832	304,24352
43	142,99334	16357599	187,50758	215,35373	247,77650	285,55069	329,58301
44	151,14301	173,57267	199,75803	230,35172	266,12085	307,96699	356,94965
45	159,70016	184,11917	212,74351	246,32459	285,74931	332,06452	386,50562
46	168,68516	195,24572	226,50812	263,33568	306,75176	357,96935	418,42607
47	178,11942	206,98423	241,09861	281,45250	329,22439	385,81706	452,90015
48	188,02539	219,36837	256,56453	300,74692	353,27009	415,75333	490,13216
49	198,42666	232,43363	272,95840	321,29547	378,99900	447,93483	530,34274
50	209,34800	24651748	290,33590	343,17967	406,52893	482,52995	573,77016

Продовження таблиці В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0850000	2,0900000	2,0950000	2,1000000	2,1050000	2,1100000	2,1150000
3	3,2622250	3,2781000	3,2940250	3,3100000	3,3260250	3,3421000	3,3582250
4	4,5395141	4,5731290	4,6069574	4,6410000	4,6752576	4,7097310	4,7444209
5	5,9253728	5,9847106	6,0446183	6,1051000	6,1661597	6,2278014	6,2900293
6	7,4290295	7,5233346	7,6188571	7,7156100	7,8136064	7,9128596	8,0133826
7	9,0604970	9,2004347	9,3426485	9,4871710	9,6340351	9,7832741	9,9349216
8	10,830639	11,028474	11,230200	11,435888	11,645609	11,859434	12,077438
9	12,751244	13,021036	13,297069	13,579477	13,868398	14,163972	14,466343
10	14,835099	15,192930	15,560291	15,937425	16,324579	16,722009	17,129972
11	17,096083	17,560293	18,038518	18,531167	19,038660	19,561430	20,099919
12	19,549250	20,140720	20,752178	21,384284	22,037720	22,713187	23,411410
13	22,210936	22,953385	23,723634	24,522712	25,351680	26 211638	27,103722
14	25,098866	26,019189	26,977380	27,974983	29,013607	30 094918	31,220650
15	28,232269	29,360916	30,540231	31,772482	33,060035	34,405359	35 811025
16	31,632012	33,003399	34,441553	35,949730	37,531339	39,189948	40 929293
17	35,320733	36,973705	38,713500	40,544703	42,472130	44,500843	46 636161
18	39,322995	41,301338	43,391283	45,599173	47,931703	50,395936	52,999320
19	43,665450	46,018458	48,513454	51,159090	53,964532	56,939488	60 094242
20	48,377013	51,160120	54,122233	57,274999	60,630808	64,202832	68 005080
21	53,489059	56,764530	60,263845	64,002499	67,997043	72,265144	76,825664
22	59,035629	62,873338	66,988910	71,402749	76,136732	81,214309	86,660615
23	65,053658	69,531939	74,352856	79,543024	85,131089	91,147884	97,626586
24	71,583219	76,789813	82,416378	88,497327	95,069854	102,17415	109,85364
25	78,667792	84,700896	91,245934	98,347059	106,05219	114,41331	123,48681
26	86,354555	93,323977	100,91430	109,18177	118,18767	127,99877	138,68780
27	94,694692	102,72313	111,50116	121,09994	131,59737	143,07864	155,63689
28	103,74374	112,96822	123,09377	134,20994	146,41510	159,81729	174,53513
29	113,56196	124,13536	135,78767	148,63093	162,78868	178,39719	195,60668
30	124,21473	136,30754	149,68750	164,49402	180,88149	199,02088	219,10144
31	135,77298	149,57522	164,90781	181,94342	200,87405	221,91317	245,29811
32	148,31368	164,03699	181,57406	201,13777	222,96583	247,32362	274,50739
33	161,92034	179,80032	199,82359	222,25154	247,37724	275,52922	307,07574
34	176,68357	196,98234	219,80683	245,47670	274,35185	306,83744	343,38945
35	192,70168	215,71075	241,68848	271,02437	304,15879	341,58955	383,87924
36	210,08132	236,12472	265,64889	299,12681	337,09547	380,16441	429,02535
37	228,93823	258,37595	291,88553	330,03949	373,49049	422,98249	479,36327
38	249,39798	282,62978	320,61466	364,04343	413,70699	470,51056	535,49004
39	271,59681	309,06646	352,07305	401,44778	458,14622	523,26673	598,07140
40	295,68254	337,88245	386,51999	442,59256	507,25158	581,82607	667,84961
41	321,81555	369,29187	424,23939	487,85181	561,51299	646,82693	745,65231
42	350,16987	403,52813	465,54213	537,63699	621,47186	718,97790	832,40233
43	380,93431	440,84566	510,76864	592,40069	687,72640	799,06547	929,12860
44	414,31373	481,52177	560,29166	652,64076	760,93768	887,96267	1036,9784
45	450,53040	525,85873	614,51936	718,90484	841,83613	986,63856	1157,2309
46	489,82548	574,18602	673,89870	791,79532	931,22893	1096,1688	1291,3125
47	532,46065	626,86276	738,91908	871,97485	1030,0080	1217,7474	1440,8134
48	578,71980	684,28041	810,11639	960,17234	1139,1588	1352,6996	1607,5069
49	628,91098	746,86565	888,07745	1057,1896	1259,7705	1502,4965	1793,3702
50	683,36842	815,08356	973,44481	1163,9085	1393,0464	1668,7712	2000,6078

Продовження таблиці В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,1200000	2,1250000	2,1300000	2,1350000	2,1400000	2,1450000	2,1500000
3	3,3744000	3,3906250	3,4069000	3,4232250	3,4396000	3,4560250	3,4725000
4	4,7793280	4,8144531	4,8497970	4,8853604	4,9211440	4,9571486	4,9933750
5	6,3528474	6,4162598	6,4802706	6,5448840	6,6101042	6,6759352	6,7423813
6	8,1151890	8,2182922	8,3227058	8,4284434	8,5355187	8,6439458	8,7537384
7	10,089012	10,245579	10,404658	10,566283	10,730491	10,897318	11,066799
8	12,299693	12,526276	12,757263	12,992731	13,232760	13,477429	13,726819
9	14,775656	15,092061	15,415707	15,746750	16,085347	16,431656	16,785842
10	17,548735	17,978568	18,419749	18,872561	19,337295	19,814246	20,303718
11	20,654583	21,225889	21,814317	22,420357	23,044516	23,687312	24,349276
12	24,133133	24,879125	25,650178	26,447106	27,270749	28,121972	29,001667
13	28,029109	28,989016	29,984701	31,017465	32,088654	33,199658	34,351917
14	32,392602	33,612643	34,882712	36,204823	37,581065	39,013609	40,504705
15	37,279715	38,814223	40,417464	42,092474	43,842414	45,670582	47,580411
16	42,753280	44,666001	46,671735	48,774957	50,980352	53,292816	55,717472
17	48,883674	51,249252	53,739060	56,359577	59,117601	62,020275	65,075093
18	55,749715	58,655408	61,725138	64,968120	68,394066	72,013215	75,836357
19	63,439681	66,987334	70,749406	74,738816	78,969235	83,455131	88,211811
20	72,052442	76,360751	80,946829	85,828556	91,024928	96,556125	102,44358
21	81,698736	86,905845	92,469917	98,415411	104,76842	111,55676	118,81012
22	92,502584	98,769075	105,49101	112,70149	120,43600	128,73249	137,63164
23	104,60289	112,11521	120,20484	128,91619	138,29704	148,39871	159,27638
24	118,15524	127,12961	136,83147	147,31988	158,65862	170,91652	184,16784
25	133,33387	144,02081	155,61956	168,20806	181,87083	196,69941	212,79302
26	150,33393	163,02341	176,85010	191,91615	208,33274	226,22083	245,71197
27	169,37401	184,40134	200,84061	218,82483	238,49933	260,02285	283,56877
28	190,63889	208,45151	227,94989	249,36618	272,88923	298,72616	327,10408
29	214,58275	235,50795	258,58338	284,03062	312,09373	343,04145	377,16969
30	241,33268	265,94644	293,19922	323,37475	356,78685	393,78246	434,74515
31	271,29261	300,18974	332,31511	368,03034	407,73701	451,88092	500,95692
32	304,84772	338,71346	376,51608	418,71444	465,82019	518,40365	57710046
33	342,42945	382,05265	426,46317	476,24089	532,03501	594,57218	664 66552
34,	384,52098	430,80923	482,90338	541,53341	607,51991	681,78515	765 36535
35	431,66350	485,66038	546,68082	615,64042	693,57270	781,64400	881,17016
36	484,46312	547,36793	618,74933	699,75188	791,67288	895,98238	1014,3457
37	543,59869	616,78892	700,18674	795,21838	903,50708	1026,8998	1167,4975
38	609,83053	694,88753	792,21101	903,57286	1030,9981	1176,8003	1343,6222
39	684,01020	782,74847	896,19845	1026,5552	1176,3378	1348,4363	1546,1655
40	767,09142	881,59203	1013,7042	1166,1401	1342,0251	1544,9596	1779,0903
41	860,14239	992,79104	1146,4858	1324,5691	1530,9086	1769,9788	2046,9539
42	964,35948	1117,8899	1296,5289	1504,3859	1746,2358	2027,6257	2354,9969
43	1081,0826	1258,6262	1466,0777	1708,4780	1991,7088	2322,6314	2709,2465
44	1211,8125	1416,9544	1657,6678	1940,1225	2271,5481	2660,4129	3116,6334
45	1358,2300	1595,0737	1874,1646	2203,0391	2590,5648	3047,1728	3585,1285
46	1522,2176	1795,4579	2118,8060	2501,4493	2954,2439	3490,0129	4123,8977
47	1705,8838	2020,8902	2395,2508	2840,1450	3368,8380	3997,0648	4743,4824
48	1911,5898	2274,5015	2707,6334	3224,5646	3841,4753	4577,6391	5456,0047
49	2141,9806	2559,8141	3060,6258	3660,8808	4380,2819	5242,3968	6275,4055
50	2400,0182	2880,7909	3459,5071	4156,0997	4994,5213	6003,5444	7217,7163

Продовження таблиці В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	18,50
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,1550000	2,1600000	2,1650000	2,1700000	2,1750000	2,1800000	2,1850000
3	3,4890250	3,5056000	3,5222250	3,5389000	3,5556250	3,5724000	3,5892250
4	5,0298239	5,0664960	5,1033921	5,1405130	5,1778594	5,2154320	5,2532316
5	6,8094466	6,8771354	6,9454518	7,0144002	7,0839848	7,1542098	7,2250795
6	8,8649108	8,9774770	9,0914514	9,2068482	9,3236821	9,4419675	9,5617192
7	11,238972	11,413873	11,591541	11,772012	11,955326	12,141522	12,330637
8	13,981013	14,240093	14,504145	14,773255	15,047509	15,326996	15,611805
9	17,148070	17,518508	17,897329	18,284708	18,680823	19,085855	19,499989
10	20,806020	21,321469	21,850388	22,393108	22,949967	23,521309	24,107487
11	25,030954	25,732904	26,455702	27,199937	27,966211	28,755144	29,567372
12	29,910751	30,850169	31,820893	32,823926	33,860298	34,931070	36,037336
13	35,546918	36,786196	38,071341	39,403993	40,785850	42,218663	43,704243
14	42,056690	43,671987	45,353112	47,102672	48,923373	50,818022	52,789528
15	49,575477	51,659505	53,836375	56,110126	58,484964	60,965266	63,555591
16	58,259676	60,925026	63,719377	66,648848	69,719832	72,939014	76,313375
17	68,289926	71,673030	75,233075	78,979152	82,920803	87,068036	91,431350
18	79,874864	84,140715	88,646532	93,405608	98,431944	103,74028	109,34615
19	93,255468	98,603230	104,27321	110,28456	116,65753	123,41353	130,57519
20	108,71007	115,37975	122,47829	130,03294	138,07260	146,62797	155,73160
21	126,56013	134,84051	143,68721	153,13854	163,23531	174,02100	185,54194
22	147,17695	157,41499	168,39560	180,17209	192,80149	206,34479	220,86720
23	170,98937	183,60138	197,18087	211,80134	227,54175	244,48685	262,72763
24	198,49272	213,97761	230,71571	248,80757	268,36155	289,49448	312,33225
25	230,25910	249,21402	269,78381	292,10486	316,32482	342,60349	371,11371
26	266,94926	290,08827	315,29813	342,76268	372,68167	405,27211	440,76975
27	309,32639	337,50239	368,32233	402,03234	438,90096	479,22109	523,31215
28	358,27198	392,50277	430,09551	471,37783	516,70863	566,48089	621,12490
29	414,80414	456,30322	502,06127	552,51207	608,13264	669,44745	737,03300
30	480,09878	530,31173	585,90138	647,43912	715,55585	790,94799	874,38411
31	555,51409	616,16161	683,57510	758,50377	841,77812	790,94799	1037,1452
32	642,61878	715,74746	797,36500	888,44941	990,08929	1103,4960	1230,0170
33	743,22469	831,26706	929,93022	1040,4858	1164,3549	1303,1253	1458,5702
34	859,42451	965,26979	1084,3687	1218,3684	1369,1170	1538,6878	1729,4057
35	993,63531	1120,7130	1264,2895	1426,4910	1609,7125	1816,6516	2050,3457
36	1148,6488	1301,0270	1473,8973	1669,9945	1892,4122	2144,6489	2430,6597
37	1327,6893	1510,1914	1718,0904	1954,8936	2224,5843	2531,6857	2881,3317
38	1534,4812	1752,8220	2002,5753	2288,2255	2614,8866	2988,3891	3415,3781
39	1773,3258	2034,2735	2334,0002	2678,2238	3073,4917	3527,2992	4048,2230
40	2049,1913	2360,7572	2720,1102	3134,5218	3612,3528	4163,2130	4798,1443
41	2367,8159	2739,4784	3169,9284	3668,3906	4245,5145	4913,5914	5686,8009
42	2735,8274	3178,7949	3693,9666	4293,0169	4989,4796	5799,0378	6739,8591
43	3160,8806	3688,4021	4304,4711	5023,8298	5863,6385	6843,8646	7987,7331
44	3651,8171	4279,5465	5015,7089	5878,8809	6890,7753	8076,7603	9466,4637
45	4218,8488	4965,2739	5844,3008	6879,2907	8097,6609	9531,5771	11218,759
46	4873,7704	5760,7177	6809,6105	8049,7701	9515,7516	11248,261	13295,230
47	5630,2048	6683,4326	7934,1962	9419,2310	11182,008	13273,948	15755,848
48	6503,8865	7753,7818	9244,3386	11021,500	13139,860	15664,259	18671,679
49	7512,9889	8995,3869	10770,654	12896,155	15440,335	18484,825	22126,940
50	8678,5022	10435,649	12548,812	15089,502	18143,394	21813,094	26221,424

Продовження таблиці В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	19,00	19,50	20,00	20,50	21,00	21,50	22,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,1900000	2,1950000	2,2000000	2,2050000	2,2100000	2,2150000	2,2200000
3	3,6061000	3,6230250	3,6400000	3,6570250	3,6741000	3,6912250	3,7084000
4	5,2912590	5,3295149	5,3680000	5,4067151	5,4456610	5,4848384	5,5242480
5	7,2965982	7,3687703	7,4416000	7,5150917	7,5892498	7,6640786	7,7395826
6	9,6829519	9,8056805	9,9299200	10,055686	10,182992	10,311856	10,442291
7	12,522713	12,717788	12,915904	13,117101	13,321421	13,528904	13,739595
8	15,902028	16,197757	16,499085	16,806107	17,118919	17,437619	17,762306
9	19,923413	20,356319	20,798902	21,251359	21,713892	22,186707	22,670013
10	24,708862	25,325802	25,958682	26,607887	27,273809	27,956849	28,657416
11	30,403546	31,264333	32,150419	33,062504	34,001309	34,967572	35,962047
12	37,180220	38,360878	39,580502	40,840317	42,141584	43,485599	44,873697
13	45,244461	46,841249	48,496603	50,212582	51,991317	53,835003	55,745911
14	54,840909	56,975293	59,195923	61,506162	63,909493	66,409529	69,010011
15	66,260682	69,065475	72,035108	75,114925	78,330487	81,687578	85,192213
16	79,850211	83,557143	87,442129	91,513485	95,779889	100,25041	104,93450
17	96,021751	100,85079	105,93056	111,27375	116,89367	122,80424	129,02009
18	115,26588	121,51669	128,11667	135,08487	142,44134	150,20716	158,40451
19	138,16640	146,21244	154,74000	163,77727	173,35402	183,50170	194,25350
20	165,41802	175,72387	186,68800	198,35160	210,75836	223,95456	237,98927
21	197,84744	210,99002	225,02560	240,01368	256,01762	273,10479	291,34691
22	236,43846	253,13308	271,03072	290,21649	310,78131	332,82232	356,44323
23	282,36176	303,49403	326,23686	350,71087	377,04539	405,37912	435,86075
24	337,01050	363,67536	392,48424	423,60660	457,22492	493,53563	532,75011
25	402,04249	435,59206	471,98108	511,44595	554,24216	600,64579	650,95513
26	479,43056	521,53251	567,37730	617,29237	671,63301	730,78464	795,16526
27	571,52237	624,23135	681,85276	744,83731	813,67594	888,90333	971,10162
28	681,11162	746,95647	819,22331	898,52895	985,54789	1081,0175	1185,7440
29	811,52283	893,61298	984,06797	1083,7274	1193,5129	1314,4363	1447,6077
30	966,71217	1068,8675	1181,8816	1306,8915	1445,1507	1598,0401	1767,0813
31	1151,3875	1278,2967	1419,2579	1575,8043	1749,6323	1942,6188	2156,8392
32	1371,1511	1528,5645	1704,1095	1899,8441	2118,0551	2361,2818	2632,3439
33	1632,6698	1827,6346	2045,9314	2290,3122	2563,8467	2869,9574	3212,4595
34	1943,8771	2185,0233	2456,1176	2760,8262	3103,2545	3487,9982	3920,2006
35	2314,2137	2612,1029	2948,3411	3327,7955	3755,9379	4233,9178	4783,6447
36	2754,9143	3122,4630	3539,0094	4010,9936	4545,6848	5151,2852	5837,0466
37	3279,3481	3732,3433	4247,8112	4834,2473	5501,2787	6259,8115	7122,1968
38	3903,4242	4461,1502	5098,3735	5826,2680	6657,5472	7606,6709	8690,0801
39	4646,0748	5332,0745	6119,0482	7021,6530	8056,6321	9243,1052	10602,898
40	5529,8290	6372,8290	7343,8578	8462,0918	9749,5248	11231,373	12936,535
41	6581,4965	7616,5306	6813,6294	10197,821	11797,925	13647,118	15783,573
42	7832,9808	9102,7541	10577,355	12289,374	14276,489	16582,248	19256,959
43	9322,2472	10878,791	12693,826	14809,696	17275,552	20148,432	23494,490
44	11094,474	13001,155	15233,592	17846,683	20904,418	24481,345	28664,278
45	13203,424	15537,381	18281,310	21506,253	25295,346	29745,834	34971,419
46	15713,075	18568,170	21938,572	25916,035	30608,368	36142,188	42666,131
47	18699,559	22189,963	26327,286	31229,822	37037,126	43913,758	52053,680
48	22253,475	26518,006	31593,744	37632,936	44815,922	53356,216	63506,490
49	26482,636	31690,017	37913,492	45348,688	54228,266	64828,803	77478,917
50	31515,336	37870,570	45497,191	54646,169	65617,202	78767,995	94525,279

Продовження таблиці В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,2250000	2,2300000	2,2350000	2,2400000	2,2450000	2,2500000	2,2550000
3	3,7256250	3,7429000	3,7602250	3,7776000	3,7950250	3,8125000	3,8300250
4	5,5638906	5,6037670	5,6433779	5,6842240	5,7248061	5,7656250	5,8066814
5	7,8157660	7,8926334	7,9701892	8,0484378	8,1273836	8,2070313	8,2873851
6	10,574313	10,707939	10,843184	10,980063	11,118593	11,258789	11,400668
7	13,953534	14,170765	14,391332	14,615278	14,842648	15,073486	15,307839
8	18,093079	18,430041	18,773295	19,122945	19,479097	19,841858	20,211338
9	23,164022	23,668950	24,185019	24,712451	25,251475	25,802322	26,365229
10	29,375927	30,112809	30,868498	31,643440	32,438087	33,252903	34,088362
11	36,985510	38,038755	39,122596	40,237865	41,385418	42,566129	43,780894
12	46,307250	47,787669	49,316406	50,894953	52,524845	54,207661	55,345022
13	57,726381	59,778833	61,905761	64,109741	66,393432	68,759576	71,211003
14	71,714817	74,527964	77,453615	80,496079	83,659823	86,949470	90,369809
15	88,850651	92,669396	96,655214	100,81514	105,15648	109,68684	114,41411
16	109,84 205	114,98336	120,36919	126,01077	131,91982	138,10855	144,58971
17	135,55651	142,42953	149,65595	157,25336	165,24017	173,63568	182,46008
18	167,05672	176,18832	185,82510	195,99416	206,72401	218,04460	229,98741
19	205,64448	217,71163	230,49399	244,03276	258,37140	273,55576	289,63419
20	252,91449	268,78531	285,66008	303,60062	322,67239	342,94470	364,49091
21	310,82025	331,60593	353,79020	377,46477	402,72713	429,68087	458,43610
22	381,75481	408,87530	437,93090	469,05632	502,39527	538,10109	576,33730
23	468,64964	503,91662	541,84466	582,62984	626,48211	673,62636	724,30331
24	575,09581	620,81744	670,17816	723,46100	780,97023	843,03295	910,00066
25	705,49237	764,60545	828,67003	898,09164	973,30794	1054,7912	1143,0508
26	865,22816	941,46470	1024,4075	1114,63363	1212,7684	1319,4890	1435,5288
27	1060,9045	1159,0016	1266,1432	1383,14570	1510,8966	1650,3612	1802,5886
26	1300,6080	1426,5719	1564,6869	1716,10067	1882,0663	2063,9515	2263,2487
29	1594,2448	1755,6835	1933,3883	2128,96483	2344,1726	2580,9394	2841,3771
30	1953,9499	2160,4907	2388,7346	2640,91639	2919,4948	3227,1743	3566,9283
31	2394,5886	2658,4036	2951,0872	3275,73632	3635,7711	4034,9678	4477,4950
32	2934,3710	3270,8364	3645,5927	4062,91304	4527,5350	5044,7098	5620,2563
33	3595,6045	4024,1287	4503,3070	5039,01217	5637,7811	6306,8872	7054,4216
34	4405,6156	4950,6783	5562,5841	6249,37509	7020,0374	7884,6091	8854,2992
35	5397,8790	6090,3344	6870,7914	7750,22511	8740,9466	9856,7613	11113,145
36	6613,4018	7492,1113	8486,4274	9611,27913	10883,479	12321,952	13947,998
37	8102,4172	9216,2969	10481,738	11918,9861	13550,931	15403,440	17505,737
38	9926,4611	11337,045	12945,946	14780,5428	16871,909	19255,299	21970,700
39	12160,915	13945,566	15989,244	18328,8731	21006,526	24070,124	27574,228
40	14898,121	17154,046	19747,716	22728,8026	26154,125	30088,655	34606,656
41	18251,198	21100,476	24389,429	28184,7152	32562,886	37611,819	43432,354
42	22358,717	25954,586	30121,945	34950,0469	40541,793	47015,774	54508,604
43	27390,429	31925,140	37201,602	43339,0581	50475,533	58770,718	68409,298
44	33554,275	39268,923	45944,978	53741,4321	62843,038	73464,397	85854,669
45	41104,987	48301,775	56743,048	66640,3758	78240,582	91831,496	107748,61
46	50354,609	59412,183	70078,664	82635,0660	97410525	114790,37	135225,51
47	61685,397	73077,985	86548,151	102468,482	121277,10	143488,96	169709,01
48	75565,611	89886,922	106887,97	127061,917	150990,99	179362,20	212985,81
49	92568,873	110561,91	132007,64	157557,778	187984,79	224203,75	267298,19
50	113397,87	135992,15	163030,43	195372,644	234042,06	280255,69	335460,22

Продовження таблиці В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,50	29,00
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,2600000	2,2650000	2,2700000	2,2750000	2,2800000	2,2850000	2,2900000
3	3,8476000	3,8652250	3,8829000	3,9006250	3,9184000	3,9362250	3,9541000
4	5,8479760	5,8895096	5,9312830	5,9732969	6,0155520	6,0580491	6,1007890
5	8,3664498	8,4502297	8,5327294	8,6159535	8,6999066	8,7845931	8,8700178
6	11,544247	11,689541	11,836566	11,985341	12,135880	12,288202	12,442323
7	15,545751	15,787269	16,032439	16,281309	16,533927	16,790340	17,050597
8	20,587646	20,970895	21,361198	21,758670	22,163426	22,575587	22,995270
9	26,940434	27,528182	28,128721	28,742304	29,369136	30,009629	30,663898
10	34,944947	35,823150	36,723476	37,646437	38,592558	39,562373	40,556428
11	45,030633	46,316285	47,638815	48,999207	50,398474	51,837649	53,317792
12	57,738598	59,590101	61,501295	63,473989	65,510047	67,611379	69,779952
13	73,750633	76,381478	79,106644	81,929336	84,852860	87,880623	91,016138
14	93,925798	97,622569	101,46544	105,45990	109,61166	113,92660	118,41082
15	119,34651	124,49255	129,86111	135,46138	141,30293	147,39568	153,74996
16	151,37660	158,48308	165,92360	173,71326	181,86774	190,40345	199,33744
17	191,73451	201,48109	211,72298	222,48440	233,79071	245,66843	258,14530
18	242,58548	255,87358	269,88818	284,66761	300,25211	316,68394	334,00744
19	306,65771	324,68008	343,75799	363,95121	385,32271	407,93386	431,86960
20	387,38872	411,72030	437,57265	465,03779	494,21306	525,20143	558,11178
21	489,10978	521,82618	556,71726	593,92318	633 59272	675 88384	720,96420
22	617,27832	661,11012	708,03093	758,25205	811,99868	869 51074	931,04381
23	778,77069	837,30430	900,19928	967,77137	1040,3583	1118,3213	1202,0465
24	982,25107	1060,1899	1144,2531	1234,9085	1332,6586	1438,0429	1551,6400
25	1238,6363	1342,1403	1454,2014	1575,5083	1706,8031	1848,8851	2002,6156
26	1561,6818	1698,8074	1847,8358	2009,7731	2185,7079	2376,8173	2584,3741
27	1968,7191	2149,9914	2347,7515	2563,4607	2798,7061	3055,2103	3334,8426
28	2481,5860	2720,7391	2982,6443	3269,4124	3583,3438	3926,9452	4302,9470
29	3127,7984	3442,7350	3788,9583	4169,5008	4587,6801	5047,1246	5551,8016
30	3942,0260	4356,0598	4812,9771	5317,1136	5873,2306	6486,5551	7162,8241
31	4967,9527	5511,4156	6113,4809	6780,3198	7518,7351	8336,2233	9241,0431
32	6260,6204	6972,9408	7765,1207	8645,9078	9624,9810	10713,047	11921,946
33	7889 3817	8821,7701	9862,7033	11024,532	12320,976	13767,265	15380,310
34	9941,6210	11160,539	12526,633	14057,279	15771,849	17691,936	19841,600
35	12527,442	14119,082	15909,824	17924,030	20188,966	22735,138	25596,664
36	15785,577	17861,639	20206,477	22854,139	25842,877	23215,652	33020,696
37	19890,828	22595,973	25663,225	29140,027	33079,883	37543,113	42597,698
38	25063,443	28584,906	32593,296	37154535	42343,250	48243,900	54952,030
39	31560,938	36160,906	41394,486	47373,031	54200,360	61994,411	70889,119
40	39792,982	45744,546	52571,998	60401,615	69377,460	79663,818	91447,963
41	50140,157	57867,851	66767,437	77013,059	88804,149	102369,01	117968,87
42	63177,598	73203,831	84795,645	98192,651	113670,31	131545,17	152180,85
43	79604,773	92603,846	107691,47	125196,63	145499,00	169036,55	196314,29
44	100303,01	117144,87	136769,17	159626,70	186239,72	217212,96	253246,44
45	126382,80	148189,26	173697,84	203525,05	238387,84	279119,66	326688,90
46	159243,33	187460,41	220597,26	259495,43	305137,43	358669,76	421429,68
47	200647,59	237138,42	280159,52	330857,68	390576,92	460891,64	543645,29
48	252816,96	299981,10	355603,59	421844,54	499939,45	592246,76	701303,43
49	318550,37	379477,09	451871,55	537852,79	639923,50	761038,09	904682,42
50	401374,47	480039,51	573877,87	685763,30	819103,08	977934,94	1167041,3

Продовження таблиці В.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	29,50	30,00	30,50	31,00	31,50	32,00	32,50
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,2950000	2,3000000	2,3050000	2,3100000	2,3150000	2,3200000	2,3250000
3	3,9720250	3,9900000	4,0080250	4,0261000	4,0442250	4,0624000	4,0806250
4	6,1437724	6,1870000	6,2304726	6,2741910	6,3181559	6,3623680	6,4068281
5	8,9561852	9,0431000	9,1307668	9,2191902	9,3083750	9,3983258	9,4890473
6	12,598260	12,756030	12,915651	13,077139	13,240513	13,405790	13,572988
7	17,314747	17,582839	17,854924	18,131052	18,411275	18,695643	18,984209
8	23,422597	23,857691	24,300676	24,751679	25,210826	25,678249	26,154076
9	31,332263	32,014998	32,712382	33,424699	34,152237	34,895288	35,654151
10	41,575280	42,619497	43,689659	44,786356	45,910191	47,061780	48,241750
11	54,839988	56,405346	58,015005	59,670126	61,371901	63,121550	64,920319
12	72,017784	74,326950	76,709581	70,167865	81,704050	84,320446	87,019423
13	94,263031	97,625036	101,106003	104,709903	108,440826	112,302988	116,30073
14	123,07063	127,91255	132,94333	138,16997	143,59969	149,23994	155,09847
15	160,37646	167,28631	174,49105	182,00266	189,83359	197,99673	206,50548
16	208,68751	218,47220	228,71082	239,42349	250,63117	262,35568	274,61976
17	271,25033	285,01386	299,46762	314,64477	330,57998	347,30950	364,87118
18	352,26918	371,51802	391,80535	413,18465	435,71268	469,44854	484,45433
19	457,18859	483,97343	512,30585	542,27189	573,96217	607,47207	642,90197
20	593,05922	630,16546	669,55913	711,37618	755,76026	802,86313	852,84511
21	769,01169	820,21510	874,77466	932,90280	994,82474	1060,77933	1131,0197
22	996,87014	1067,2796	1142,5809	1223,1027	1309,1945	1401,2287	1499,6012
23	1291,94683	1388,4635	1492,0681	1603,2645	1722,5908	1850,6219	1987,9716
24	1674,07115	1806,0026	1948,1489	2101,2765	2266,2069	2443,8209	2635,0623
25	2168,92214	2348,8033	2543,3343	2753,6722	2981,0621	3226,8436	3492,4576
26	2309,75417	3054,4443	3320,0513	3608,3106	3921,0967	4260,4336	4628,5063
27	3639,63164	3971,7776	4333,6669	4727,8868	5157,2421	5624,7723	6133,7709
28	4714,32298	5164,3109	5656,4353	6194,5318	6782,7734	7425,6994	8128,2464
29	6106,04826	6714,6042	7382,6481	8115,8366	8920,3470	9802,9233	10770,926
30	7908,33249	8729,9855	9635,3558	10632,7460	11731,2563	12940,8587	14272,477
31	10242,2906	11349,981	12575,139	13929,897	15427,602	17082,934	18912,033
32	13264,7663	14755,975	16411,557	18249,165	20288,297	22550,472	25059,443
33	17178,8724	19183,768	21418,082	23907,407	26680,110	29767,623	33204,763
34	22247,6397	24939,899	27951,596	31319,703	35085,345	39294,263	43997,310
35	28811,6934	32422,868	36477,833	41029,810	46138,228	51869,427	58297,436
36	37312,1430	42150,729	47604,573	53750,052	60672,770	68468 644	77245,103
37	48320,2252	54796,947	62124,967	70413,568	79785,693	80379,609	102350,76
38	62575,6916	71237,031	81074,082	92242,774	104919,186	119302,084	135615,75
39	81036,5206	92609,141	105802,677	120839,034	137969,730	157479,751	179691,88
40	104943,294	120392,88	138073,49	158300,13	181431,19	207874,27	238092,74
41	135902,566	156511,75	180186,91	207374,18	238583,02	274395,04	315473,88
42	175994,823	203466,27	235144,92	271661,17	313737,67	362202,45	418003,90
43	227914,296	264507,15	306365,12	355877,13	412566,04	478108,24	553856,16
44	295150,013	343860,30	400459,98	466200,04	542525,34	631103,87	733860,41
45	382220,267	447019,39	522601,27	610723,06	713421,82	833058,11	972366,05
46	494976,245	581126,21	681995,66	800048,21	938150,70	1099637,71	1288386,0
47	640995,238	755465,07	890005,33	1048064,15	1233669,17	1451522,77	1707112,4
48	830089,833	982105,59	1161457,96	1372965,03	1622275,96	1916011,06	2261925,0
49	1074967,33	1276738,3	1515703,6	1798585,2	2133293,9	2529135,6	2997051,7
50	1392083,70	1659760,7	1977994,2	2356147,6	2805282,5	3338460,0	3971094,4

Додаток Г
Таблиці коефіцієнтів дисконтування (приведення) ренти

Таблиця Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	5,00	5,50	6,00	6,50	7,00	7,50	8,00
1	0,9523810	0,9478673	0,9433962	0,9389671	0,9345794	0,9302326	0,9259259
2	1,8594104	1,8463197	1,8333927	1,6206264	1,8080182	1,7955652	1,7332647
3	2,7232480	2,6979334	2,6730119	2,6484755	2,6243160	2,6005257	2,5770970
4	3,5459505	3,5051501	3,4651056	3,4257986	3,3872113	3,3493263	3,3121268
5	4,3294767	4,2702845	4,2123638	4,1556794	4,1001974	4,0458849	3,9927100
6	5,0756921	4,9955303	4,9173243	4,8410136	4,7665397	4,6938464	4,6228797
7	5,7863734	5,6829671	5,5823814	5,4845198	5,3892894	5,2966013	5,2063701
8	6,4632128	6,3345660	6,2097938	6,0887510	5,9712985	5,8573036	5,7466389
9	7,1078217	6,9521552	6,8016923	6,6561042	6,5152322	6,3788870	6,2468879
10	7,7217349	7,5376258	7,3600871	7,1888302	7,0235815	6,8640810	6,7100814
11	8,3064142	8,0925363	7,8868746	7,6890425	7,4986743	7,3154241	7,1389643
12	8,8632516	8,6185178	8,3838439	8,1587253	7,9426863	7,7352783	7,5360780
13	9,3935730	9,1170785	8,8526830	8,5997421	8,3576507	8,1258403	7,9037759
14	9,8986409	9,5896479	9,2949839	9,0138423	8,7454680	8,4891537	8,2442370
15	10,3796580	10,0375809	9,7122490	9,4026689	9,1079140	8,8271197	8,5594787
16	10,8377696	10,4621620	10,1058953	9,7677642	9,4466486	9,1415067	8,8513692
17	11,2740662	10,8646086	10,4772597	10,1105767	9,7632230	9,4339598	9,1216381
18	11,6895869	11,2460745	10,8276035	10,4324664	10,0590869	9,7060091	9,3718871
19	12,0853209	11,6076535	11,1581165	10,7347102	10,3355952	9,9590782	9,6035992
20	12,4622103	11,9503825	11,4699212	11,0185072	10,5940142	10,1944914	9,8181474
21	12,8211527	12,2752441	11,7640766	11,2849833	10,8355273	10,4134803	10,0168032
22	13,1630026	12,5831697	12,0415817	11,5351956	11,0612405	10,6171910	10,2007437
23	13,4885739	12,8750424	12,3033790	11,7701367	11,2721874	10,8066893	10,3710589
24	13,7986418	13,1516990	12,5503575	11,9907387	11,4693340	10,9829668	10,5287583
25	14,0939446	13,4139327	12,7833562	12,1978767	11,6535832	11,1469459	10,6747762
26	14,3751853	13,6624954	13,0031662	12,3923725	11,8257787	11,2994845	10,8099780
27	14,6430336	13,8980999	13,2105341	12,5749977	11,9867090	11,4413810	10,9351648
28	14,8981273	14,1214217	13,4061643	12,7464767	12,1371113	11,5733776	11,0510785
29	15,1410736	14,3331012	13,5907210	12,9074898	12,2776741	11,6961652	11,1584060
30	15,3724510	14,5337452	13,7648312	13,0586759	12,4090412	11,8103863	11,2577833
31	15,5928105	14,7239291	13,9290860	13,2006347	12,5318142	11,9166384	11,3497994
32	15,8026767	14,9041982	14,0840434	13,3339293	12,6465553	12,0154776	11,4349994
33	16,0025492	15,0750694	14,2302296	13,4590885	12,7537900	12,1074210	11,5138884
34	16,1929040	15,2370326	14,3681411	13,5766089	12,8540094	12,1929498	11,5869337
35	16,3741943	15,3905522	14,4982464	13,6869567	12,9476723	12,2725114	11,6545682
36	16,5468517	155360684	14,6209871	13,7905697	13,0352078	12,3465222	11,7171928
37	16,7112873	15,6739985	14,7367803	13,8878589	13,1170166	12,4153695	11,7751785
38	16,8678927	15,8047379	14,8460192	13,9792102	13,1934735	12,4794135	11,8288690
39	17,0170407	15,5286615	14,9490747	14,0649861	13,2649285	12,5389893	11,8785824
40	17,1590864	16,0461247	15,0462969	14,1455269	13,3317088	12,5944087	11,9246133
41	17,2943680	16,1574642	15,1380159	14,2211520	13,3941204	12,6459615	11,9672346
42	17,4232076	16,3629992	15,2245433	14,2921615	13,4524490	12,6939177	12,0066987
43	17,5459120	16,3630324	15,3061729	14,3588371	13,5069617	12,7385281	12,0432395
44	17,6627733	16,4578506	15,3831820	14,4214433	13,5579081	12,7800261	12,0770736
45	17,7740698	16,5477257	15,4558321	14,4802284	13,6055216	12,8186290	12,1084015
46	17,8800665	16,6329154	15,5243699	14,5354257	13,6500202	12,8545386	12,1374088
47	17,9810157	16,7136639	15,5890282	14,5872542	13,6916076	12,8879429	12,1642674
48	18,0771578	16,7902027	15,6500266	14,6359195	13,7304744	12,9190166	12,1891365
49	18,1687217	16,8627514	15,7075723	14,6816145	13,7667985	12,9479224	12,2121634
50	18,2559255	16,9315179	15,7618606	14,7245207	13,8007463	12,9748116	12,2334846

Продовження таблиці Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	8,50	9,00	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50
1	0,9216590	0,9174312	0,9132420	0,9090909	0,9049774	0,9009009	0,8968610
2	1,7711143	1,7591112	1,7472530	1,7355372	1,7239614	1,7125233	1,7012206
3	2,5540224	2,5312947	2,5089068	2,4868520	2,4651235	2,4437147	2,4226194
4	3,2755967	3,2397199	3,2044811	3,1698654	3,1358583	3,1024457	3,0696138
5	3,9406421	3,8896513	3,8397088	3,7907868	3,7428582	3,6958970	3,6498778
6	4,5535872	4,4859186	4,4198254	4,3552607	4,2921794	4,2305379	4,1702940
7	5,1185135	5,0329528	4,9496122	4,8684188	4,7893026	4,7121963	4,6370350
8	5,6391830	5,5348191	5,4334358	5,3349262	5,2391879	5,1461228	5,0556368
9	6,1190626	5,9952469	5,8752838	5,7590238	5,6463239	5,5370475	5,4310644
10	6,5613481	6,4176577	6,2787980	6,1445671	6,0147727	5,8892320	5,7677707
11	6,9689844	6,8051906	6,6473041	6,4950610	6,3482106	6,2065153	6,0697495
12	7,3446861	7,1607253	6,9838394	6,8136918	6,6499644	6,4923561	6,3405825
13	7,6909549	7,4869039	7,2911775	7,1033562	6,9230447	6,7498704	6,5834821
14	8,0100967	7,7861504	7,5718516	7,3666875	7,1701762	6,9818652	6,8013292
15	8,3042366	8,0606884	7,8281750	7,6060795	7,3938246	7,1908696	6,9967078
16	8,5753332	8,3125582	8,0622603	7,8237086	7,5962214	7,3791618	7,1719353
17	8,8251919	8,5436314	8,2760368	8,0215533	7,7793858	7,5487944	7,3290899
18	9,0554764	8,7556251	8,4712665	8,2014121	7,9451456	7,7016166	7,4700358
19	9,2677202	8,9501148	8,6495584	8,3649201	8,0951543	7,8392942	7,5964447
20	9,4633366	9,1285457	8,8123821	8,5135637	8,2309089	7,9633281	7,7098159
21	9,6436282	9,2922437	8,9610796	8,6486943	8,3537637	8,0750704	7,8114940
22	9,8097956	9,4424254	9,0968763	8,7715403	8,4649445	8,1757391	7,9026852
23	9,9629452	9,5802068	9,2208916	8,8832184	8,5655607	8,2664316	7,9844711
24	10,1040970	9,7066118	9,3341476	8,9847440	8,6566160	8,3481366	8,0578216
25	10,2341908	9,8225796	9,4375777	9,0770400	8,7390190	8,4217447	8,1236068
26	10,3540929	9,9289721	9,5320344	9,1609455	8,8135919	8,4880583	8,1826070
27	10,4646017	10,0265799	9,6182963	9,2372232	8,8810786	8,5478002	8,2355220
28	10,5664532	10,1161284	9,6970742	9,3065665	8,9421526	8,6016218	8,2829793
29	10,6603255	10,1982829	9,7690176	9,3696059	8,9974232	8,6501098	8,3255420
30	10,7468438	10,2736540	9,8347192	9,4269145	9,0474418	8,6937926	8,3637148
31	10,8265642	10,3428019	9,8947208	9,4790132	9,0927075	8,7331465	8,3979505
32	10,9000776	10,4062403	9,9495167	9,5263756	9,1336719	8,7686004	8,4286552
33	10,9673034	10,4644406	8,9995586	9,5694324	9,1707438	8,8005409	8,4561930
34	11,0X2428	10,5178354	10,0452590	9,6085749	9,2042931	8,8293161	8,4808906
35	11,0877814	10,5668215	10,0869945	9,6441590	9,2346543	8,8552398	8,5030409
36	11,1408123	10,6117628	10,1251092	9,6765082	9,2621306	8,8785944	8,5229066
37	11,1896888	10,6529934	10,1599170	9,7059065	9,2869960	8,8996346	8,5407234
38	11,2347362	10,6908196	10,1917051	9,7326514	9,3094987	8,9185897	8,5567026
39	11,2762546	10,7255226	10,2207352	9,7569558	9,3298631	8,9356664	8,5710337
40	11,3145203	10,7573602	10,2472468	9,7790507	9,3482924	8,9510508	8,5838868
41	11,3497883	10,7865690	10,2714582	9,7991370	9,3649705	8,9649106	8,5954141
42	11,3822934	10,8133660	10,2935692	9,8173973	9,3800638	8,9773970	8,6057526
43	11,4122520	10,8379505	10,3137618	9,8339975	9,3937229	8,9886459	8,6150247
44	11,4398636	10,8605050	10,3322026	9,8490887	9,4060840	8,9987801	8,6233406
45	11,4653120	10,8811973	10,3490434	9,8628079	9,4172706	9,0079100	8,6307987
46	11,4887669	10,9001810	10,3644232	9,8752799	9,4273942	9,0161351	8,6374876
47	11,5103842	10,9175972	10,3784687	9,8866181	9,4365559	9,0235452	8,6434867
48	11,5303080	10,9335755	10,3912956	9,8969255	9,4448469	9,0302209	8,6488670
49	11,5486710	10,9482344	10,4030097	9,9062959	9,4523502	9,0362350	8,6536923
50	11,5655954	10,9616829	10,4137075	9,9148145	9,4591404	9,0416532	8,6580200

Продовження таблиці Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	14,50	15,00
1	0,8928571	0,8888889	0,8849558	0,8810573	0,8771930	0,8733624	0,8695652
2	1,6900510	1,6790123	1,6681024	1,6573192	1,6466605	1,6361244	1,6257089
3	2,4018313	2,3813443	2,3611526	2,3412504	2,3216320	2,3022921	2,2832251
4	3,0373493	3,0056394	2,9744713	2,9438329	2,9137123	2,8840979	2,8549784
5	3,6047762	3,5605683	3,5172313	3,4747427	3,4330810	3,3922252	3,3521551
6	4,1114073	4,0538385	3,9975498	3,9425046	3,8886675	3,6360046	3,7844827
7	4,5637565	4,4923009	4,4226104	4,3546296	4,2883048	4,2235848	4,1604197
8	4,9676398	4,8820453	4,7987703	4,7177353	4,6388639	4,5620828	4,4873215
9	5,3282498	5,2284847	5,1316551	5,0376522	4,9463718	4 8577142	4,7715839
10	5,6502230	5,5364308	5,4262435	5,3195174	5 2161156	5,1159076	5,0187686
11	5,9376991	5,8101607	5,6869411	5,5678567	5,4527330	5,3414040	5,2337118
12	6,1943742	6,0534762	5,9176470	5,7866579	5,6602921	5,5383441	5,4206190
13	6,4235484	6,2697566	6,1218115	5,9794343	5,8423615	5,7103442	5,5831470
14	6,6281682	6,4620059	6,3024881	6,1492813	6,0020715	5,8605626	5,7244756
15	6,8108645	6,6328941	6,4623788	6,2989263	6,1421680	5,9917578	5,8473701
16	6,9739862	6,7847948	6,6038751	6,4307720	6,2650596	6,1063386	5,9542349
17	7,1196305	6,9198176	6,7290930	6,5469357	6,3728593	6,2064093	6,0471608
18	7,2496701	7,0398378	6,8399053	6,6492826	6,4674205	6,2938072	6,1279659
19	7,3657769	7,1465225	6,9379693	6,7394560	6,5503688	6,3701373	6,1982312
20	7,4694436	7,2413534	7,0247516	6,8189040	6 6231306	6,4368012	6,2593315
21	7,5620032	7,3256474	7,1015501	6,8889022	6,6869566	6,4950229	6,3124622
22	7,6446457	7,4005755	7,1695133	6,9505746	6,7429444	6,5458715	6,3586627
23	7,7184337	7,4671782	7,2296578	7,0049115	6,7920565	6,5902808	6,3988372
24	7,7843158	7,5263806	7,2828830	7,0527855	6,8351373	6,6290662	6,4337714
25	7,8431391	7,5790050	7,3299850	7,0949652	6 8729274	6 6629399	6,4641491
26	7,8956599	7,6257822	7,3716681	7,1321279	6,9060767	6,6925239	6,4905644
27	7,9425535	7,6673620	7,4085559	7,1648704	6,9351550	6 7183615	6 5135343
28	7,9844228	7,7043218	7,4411999	7,1937184	6,9606623	6,7409271	6 5335081
29	8,0218060	7,7371749	7,4700884	7,2191352	6,9830371	6,7606350	6,5508766
30	8,0551840	7,7663777	7,4956534	7,2415288	7,0026641	6,7778472	6,5659796
31	8,0849857	7,7923357	7,5182774	7,2612589	7,0198808	6,7928796	6 5791127
32	8,1115944	7,8154095	7,5382986	7,2786422	7,0349832	6,8060084	6,5905328
33	8,1353521	7,8359196	7,5560164	7,2939579	7,0482308	6,8174746	6,6004633
34	8,1565644	7,8541507	7,5716960	7,3074519	7,0598516	6,8274887	6,6090985
35	8,1755039	7,8703562	7,5855716	7,3193408	7,0700453	6,8362347	6,6166074
36	8,1924142	7,8847611	7,5978510	7,3298157	7,0789871	6,8438731	6,6231369
37	8,2075127	7,8975654	7,6087177	7,3390447	7,0868308	6,8505442	6,6288147
38	8,2209935	7,9089470	7,6183343	7,3471759	7,0937112	6,8563705	6,6337519
39	8,2330299	7,9190640	7,6268445	7,3543400	7,0997467	6,8614589	6,6380451
40	8,2437767	7,9280569	7,6343756	7,3606520	7,1050409	6,8659030	6,6417784
41	8,2533720	7,9360506	7,6410404	7,3662132	7,1096850	6,8697843	6,6450247
42	8,2619393	7,9431561	7,6469384	7,3711130	7,1137588	6,8731740	6,6478475
43	8,2695887	7,9494721	7,6521579	7,3754299	7,1173323	6,8761345	6,6503022
44	8,2764185	7,9550863	7,6567769	7,3792334	7,1204669	6,8787201	6,6524367
45	8,2825165	7,9600767	7,6608645	7,3825845	7,1232166	6,8809783	6,6542928
46	8,2879611	7,9645126	7,6644819	7,3855370	7,1256286	6,8829504	6,6559068
47	8,2928225	7,9684557	7,6676831	7,3881383	7,1277444	6,8846729	6,6573102
48	8,2971629	7,9719606	7,6705160	7,3904303	7,1296003	6,8861772	6,6585306
49	8,3010383	7,9750761	7,6730230	7,3924496	7,1312284	6,8874910	6,6595919
50	8,3044985	7,9778454	7,6752416	7,3942287	7,1326565	6,8886384	6,6605147

Продовження таблиці Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	15,50	16,00	16,50	17,00	17,50	18,00	18,50
1	0,6658009	0,8620690	0,8583691	0,8547009	0,8510638	0,8474576	0,8438819
2	1,6154120	1,6052319	1,5951666	1,5852144	1,5753735	1,5656421	1,5560184
3	2,2644260	2,2458895	2,2276108	2,2095850	2,1918072	2,1742729	2,1569776
4	2,8263428	2,7981806	2,7704814	2,7432350	2,7164317	2,6900618	2,6641161
5	3,3128509	3,2742937	3,2364647	3,1993462	3,1629206	3,1271710	3,0920811
6	3,7340701	3,6847359	3,6364504	3,5891848	3,5429111	3,4976026	3,4532330
7	4,0987620	4,0385654	3,9797858	3,9223801	3,8663073	3,8115276	3,7580025
8	4,4145125	4,3435909	4,2744942	4,2071625	4,1415382	4,0775658	4,0151920
9	4,6878896	4,6065439	4,5274628	4,4505662	4,3757772	4,303021В	4,2322295
10	4,9245798	4,8332275	4,7446033	4,6586036	4,5751295	4,4940863	4,4153836
11	5,1295063	5,0286444	4,9309900	4,8364134	4,7447911	4,6560053	4,5699440
12	5,3069319	5,1971072	5,0909785	4,9883875	4,8891839	4,7932249	4,7003746
13	5,4605471	5,3423338	5,2283077	5,1182799	5,0120714	4,9095126	4,8104427
14	5,5935472	5,4675291	5,3461869	5,2292991	5,1166565	5 0080615	4,9033272
15	5,7086989	5,5754562	5,4473707	5,3241872	5,2056651	5,0915776	4,9817107
16	5,8083973	5 6684967	5,5342238	5,4052882	5,2814171	5,1623539	5,0478571
17	5,8947163	5,7487040	5,6087758	5,4746053	5,3458869	5,2223333	5,1036769
18	5,9694513	5,8178463	5,6727689	5,5338507	5,4007548	5,2731642	5,1507822
19	6,0341570	5,8774554	5,7276986	5,5844878	5,4474509	5,3162409	5,1905335
20	6,0901792	5,9288409	5,7748486	5,6277673	5,4871923	5,3527465	5,2240789
21	6,1386833	5,9731387	5,8153207	5,6647584	5,5210147	5,3836835	5,2523873
22	6,1806782	6,0113265	5,8500607	5,6963747	5,5497997	5,4099012	5,2762762
23	6,2170374	6,0442470	5,8798804	5,7233972	5,5742976	5,4321197	5,2964356
24	6,2485172	6,0726267	5,9054768	5,7464933	5,5951469	5,4509489	5,3134478
25	6,2757725	6,0970920	5,9274479	5,7662336	5,6128910	5,4669058	5,3278040
26	6,2993701	6,1181827	5,9463072	5,7831056	5,6279923	5,4804287	5,3399190
27	6,3198010	6,1363644	5,9624954	5,7975262	5,6408446	5,4918887	5,3501426
28	6,3374900	6,1520383	5,9763909	5,8098514	5,6517826	5,5016006	5,3587701
29	6,3528052	6,1655503	5,9883184	5,8203859	5,6610916	5,5098310	5,3660508
30	6,3660651	6,1771985	5,9985566	5,8293896	5,6690141	5,5168060	5,3721947
31	6,3775456	6,1872401	6,0073447	5,8370851	5,6757567	5,5227169	5,3773795
32	6,3874853	6,1958966	6,0148881	5,8436625	5,6814950	5,5277262	5,3817549
33	6,3960912	6,2033592	6,0213632	5,8492842	5,6863788	5,5319713	5,3854471
34	6,4035422	6,2097924	6,0269212	5,8540891	5,6905351	5,5355689	5,3385630
35	6,4099932	6,2153383	6,0316920	5,8581958	5,6940724	5,5386177	5,3911924
36	6,4155785	6,2201192	6,0357871	5,8617058	5,6970829	5,5412015	5,3934113
37	6,4204143	6,2242407	6,0393023	5,8647058	5,6996450	5,5433911	5,3952838
38	6,4246011	6,2277937	6,0423195	5,8672699	5,7018256	5,5452467	5,3968640
39	6,4282261	6,2308566	6,0449095	5,8694615	5,7036813	5,5468192	5,3981974
40	6,4313646	6,2334971	6,0471326	5,8713346	5,7052607	5,5481519	5,3993227
41	6,4340819	6,2357734	6,0490409	5,8729355	5,7066049	5,5492813	5,4002724
42	6,4364345	6,2377357	6,0506789	5,8743039	5,7077488	5,5502384	5,4010737
43	6,4384705	6,2394273	6,0520849	5,8754734	5,7087224	5,5510495	5,4017500
44	6,4402350	6,2408856	6,0532917	5,8764730	5,7095510	5,5517368	5,4023206
45	6,4417619	6,2421428	6,0543277	5,8773273	5,7102562	5,5523193	5,4028022
46	6,4430839	6,2432265	6,0552169	5,8780576	5,7108563	5,5528130	5,4032086
47	6,4442285	6,2441608	6,0559801	5,8786817	5,7113671	5,5532314	5,4035516
48	6,4452195	6,2449662	6,0566353	5,8792151	5,7118018	5,5535859	5,4038410
49	6,4460775	6,2456605	6,0571977	5,8796710	5,7121717	5,5538864	5,4040852
50	6,4468203	6,2462591	6,0576804	5,8800607	5,7124866	5,5541410	5,4042913

Продовження таблиці Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	19,00	19,50	20,00	20,50	21,00	21,50	22,00
1	0,6403361	0,8368201	0,8333333	0,8298755	0,8264463	0,8230453	0,8196721
2	1,5465010	1,5370879	1,5277778	1,5185689	1,5094597	1,5004488	1,4915345
3	2,1399168	2,1230861	2,1064815	2,0900987	2,0739337	2,0579825	2,0422414
4	2,6385855	2,6134612	2,5887346	2,5643972	2,5404410	2,5168581	2,4936405
5	3,0576349	3,0238169	2,9906121	2,9580060	2,9259843	2,8945334	2,8636398
6	3,4097772	3,3672108	3,3255101	3,2846523	3,2446152	3,2053773	3,1669178
7	3,7056951	3,6545697	3,6045918	3,5557280	3,5079464	3,4612159	3,4155064
8	3,9543657	3,8950374	3,8371598	3,7806872	3,7255755	3,6717826	3,6192676
9	4,1633325	4,0962656	4,0309665	3,9673752	3,9054343	3,8450886	3,7862849
10	4,3389349	4,2646574	4,1924721	4,1223031	4,0540780	3,9877272	3,9231843
11	4,4864999	4,4055711	4,3270601	4,2508739	4,1769239	4,1051253	4,0353970
12	4,6105041	4,5234904	4,4392167	4,3575717	4,2784495	4,2017492	4,1273746
13	4,7147093	4,6221677	4,5326806	4,4461176	4,3623550	4,2812751	4,2027661
14	4,8022768	4,7047429	4,6105672	4,5195997	4,4316983	4,3467284	4,2645623
15	4,8758623	4,7738434	4,6754726	4,5805807	4,4890069	4,4005995	4,3152150
16	4,9376998	4,8316681	4,7295605	4,6311873	4,5363693	4,4449379	4,3567336
17	4,9896637	4,0800570	4,7746338	4,6731845	4,5755118	4,4814304	4,3907653
18	5,0333309	4,9205498	4,8121948	4,7080369	4,6078610	4,5114653	4,4186601
19	5,0700259	4,9544350	4,8434957	4,7369601	4,6345959	4,5361855	4,4415246
20	5,1008621	4,9827908	4,8695797	4,7609627	4,6566908	4,5565312	4,4602661
21	5,1267749	5,0065195	4,8913164	4,7808819	4,6749511	4,5732767	4,4756279
22	5,1485503	5,0263761	4,9094304	4,7974124	4,6900422	4,5870590	4,4882196
23	5,1668490	5,0429926	4,9245253	4,8111306	4,7025142	4,5984025	4,4985407
24	5,1822261	5,0568976	4,9371044	4,8225150	4,7128217	4,6077387	4,5070006
25	5,1951480	5,0685335	4,9475870	4,8319627	4,7213402	4,6154228	4,5139349
26	5,2060067	5,0782707	4,9563225	4,8398031	4,7283804	4,6217471	4,5196188
27	5,2151317	5,0864190	4,9636021	4,8463096	4,7341986	4,6269524	4,5242777
28	5,2227997	5,0932377	4,9696684	4,8517092	4,7390071	4,6312365	4,5280965
29	5,2292435	5,0989437	4,9747237	4,8561902	4,7429811	4,6347626	4,5312266
30	5,2346584	5,1037185	4,9789364	4,8599089	4,7462654	4,6376647	4,5337923
31	5,2392087	5,1077143	4,9824470	4,8629949	4,7489797	4,6400532	4,5356953
32	5,2430325	5,1110580	4,9853725	4,8655560	4,7512229	4,6420191	4,5376191
33	5,2462458	5,1138560	4,9878104	4,8676813	4,7530767	4,6436371	4,5390321
34	5,2489461	5,1161975	4,9898420	4,8694451	4,7546089	4,6449688	4,5401902
35	5,2512152	5,1181569	4,9915350	4,8709088	4,7558751	4,6460649	4,5411395
36	5,2531220	5,1197966	4,9929458	4,8721235	4,7569216	4,6469670	4 5419176
37	5,2547244	5,1211687	4,9941215	4,8731315	4,7577864	4,6477095	4,5425554
38	5,2560709	5,1223169	4,9951013	4,8739680	4,7585012	4,6483205	4,5430782
39	5,2572024	5,1232777	4,9959177	4,8746623	4,7590919	4,6488235	4,5435067
40	5,2581533	5,1240818	4,9965981	4,8752384	4,7595801	4,6492374	4,5438580
41	5,2589524	5,1247546	4,9971651	4,8757165	4,7599835	4,6495781	4,5441459
42	5,2596238	5,1253177	4,9976376	4,8761133	4,7603170	4,6498585	4,5443819
43	5,2601881	5,1257889	4,9980313	4,8764426	4,7605925	4,6500893	4,5445753
44	5,2606623	5,1261831	4,9983594	4,8767158	4,7606203	4,6502793	4,5447339
45	5,2610607	5,1265131	4,9986329	4,8769426	4,7610085	4,6504356	4,5448638
46	5,2613956	5,1267892	4,9988607	4,8771308	4,7611640	4,6505643	4,5449703
47	5,2616769	5,1270202	4,9990506	4,8772870	4,7612926	4,6506702	4,5450577
48	5,2619134	5,1272136	4,9992088	4,8774166	4,7613988	4,6507574	4,5451292
49	5,2621121	5,1273754	4,9993407	4,8775241	4,7614866	4,6508291	4,5451879
50	5,2622791	5,1275108	4,9994506	4,8776134	4,7615592	4,6508882	4,5452360

Продовження таблиці Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	22,50	23,00	23,50	24,00	24,50	25,00	25,50
1	0,8163265	0,8130081	0,8097166	0,8064516	0,6032129	0,8000000	0,7968127
2	1,4827155	1,4739903	1,4653576	1,4568158	1,4483637	1,4400000	1,4317233
3	2,0267066	2,0113743	1,9962409	1,9813031	1,9665572	1,9520000	1,9376281
4	2,4707809	2,4482718	2,4261060	2,4042767	2,3827769	2,3616000	2,3407395
5	2,8332905	2,8034730	2,7741749	2,7453844	2,7170899	2,6892800	2,6619439
6	3,1292167	3,0922545	3,0560121	3,0204713	2,9856143	2,9514240	2,9178836
7	3,3707892	3,3270361	3,2842203	3,2423156	3,2012967	3,1611392	3,1218196
8	3,5679912	3,5179156	3,4690043	3,4212222	3,3745355	3,3289114	3,2843184
9	3,7289724	3,6731021	3,6186270	3,5655018	3,5136831	3,4631291	3,4137995
10	3,8603856	3,7992700	3,7397789	3,6818563	3,6254483	3,5705033	3,5169717
11	3,9676617	3,9018455	3,8378777	3,7756906	3,7152195	3,6564026	3,5991807
12	4,0552341	3,9852403	3,9173099	3,8513634	3,7873249	3,7251221	3,6646858
13	4,1267217	4,0530409	3,9816274	3,9123898	3,8452409	3,7800977	3,7168811
14	4,1850789	4,1081633	4,0337064	3,9616047	3,8917597	3,8240781	3,7584710
15	4,2327175	4,1529783	4,0758756	4,0012941	3,9291243	3,8592625	3,7916104
16	4,2716061	4,1894132	4,1100208	4,0333017	3,9591360	3,8874100	3,8180162
17	4,3033519	4,2190352	4,1376686	4,0591143	3,9832418	3,9099280	3,8390567
18	4,3292669	4,2431180	4,1600556	4,0799309	4,0026038	3,9279424	3,8558221
19	4,3504219	4,2626976	4,1781826	4,0967184	4,0181557	3,9423539	3,8691810
20	4,3676914	4,2786159	4,1928604	4,1102568	4,0306471	3,9538831	3,8798255
21	4,3817889	4,2915577	4,2047453	4,1211748	4,0406804	3,9631065	3,8883071
22	4,3932970	4,3020794	4,2143687	4,1299797	4,0487393	3,9704852	3,8950655
23	4,4026915	4,3106337	4,2221609	4,1370804	4,0552123	3,9763882	3,9004506
24	4,4103604	4,3175883	4,2284703	4,1428068	4,0604115	3,9811105	3,9047415
25	4,4166207	4,3232425	4,2335792	4,1474248	4,0645875	3,9848884	3,9081605
26	4,4217312	4,3278395	4,2377160	4,1511491	4,0679418	3,9879107	3,9108849
27	4,4259030	4,3315768	4,2410656	4,1541525	4,0706360	3,9903286	3,9130557
28	4,4293086	4,3346153	4,2437778	4,1565746	4,0728000	3,9922629	3,9147854
29	4,4320886	4,3370856	4,2459739	4,1585279	4,0745381	3,9938103	3,9161637
30	4,4343581	4,3390940	4,2477522	4,1601031	4,0759342	3,9950482	3,9172619
31	4,4362107	4,340726В	4,2491920	4,1613735	4,0770556	3,9960386	3,9181370
32	4,4377230	4,3420543	4,2503579	4,1623980	4,0779563	3,9968309	3,9188342
33	4,4389576	4,3431336	4,2513020	4,1632242	4,0786798	3,9974647	3,9193898
34	4,4399653	4,3440111	4,2520664	4,1638905	4,0792609	3,9979718	3,9198325
35	4,4407880	4,3447244	4,2526853	4,1644278	4,0797276	3,9983774	3,9201853
36	4,4414596	4,3453044	4,2531865	4,1648611	4,0801025	3,9987019	3,9204664
37	4,4420079	4,3457759	4,2535923	4,1652106	4,0804036	3,9989615	3,9206903
38	4,4424554	4,3461593	4,2539209	4,1654924	4,0306455	3,9991692	3,9208688
39	4,4428207	4,3464710	4,2541870	4,1657197	4,0808397	3,9993354	3,9210110
40	4,4431190	4,3467244	4,2544024	4,1659030	4,0809958	3,9994683	3,9211243
41	4,4433624	4,3469304	4,2545768	4,1660508	4,0811211	3,9995746	3,9212146
42	4,4435612	4,3470979	4,2547181	4,1661700	4,0812218	3,9996597	3,9212865
43	4,4437234	4,3472340	4,2548325	4,1662661	4,0813026	3,9997278	3,9213438
44	4,4438558	4,3473448	4,2549251	4,1663436	4,0813676	3,9997822	3,9213895
45	4,4439639	4,3474348	4,2550001	4,1664062	4,0814197	3,9998258	3,9214259
46	4,4440522	4,3475079	4,2550608	4,1664566	4,0814616	3,9998606	3,9214549
47	4,4441242	4,3475674	4,2551099	4,1664972	4,0814953	3,9998885	3,9214780
48	4,4441831	4,3476158	4,2551497	4,1665300	4,0815223	3,9999108	3,9214964
49	4,4442311	4,3476551	4,2551820	4,1665565	4,0815440	3,9999286	3,9215111
50	4,4442703	4,3476871	4,2552081	4,1665778	4,0815615	3,9999429	3,9215228

Продовження таблиці Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	26,00	26,50	27,00	27,50	28,00	28,50	29,00
1	0,7936508	0,7905138	0,7874016	0,7843137	0,7812500	0,7782101	0,7751938
2	1,4235324	1,4154260	1,4074028	1,3994617	1,3916016	1,3838211	1,3761192
3	1,9234384	1,9094276	1,8955928	1,8819308	1,8684387	1,8551137	1,8419529
4	2,3201892	2,2999428	2,2799943	2,2603379	2,2409678	2,2218784	2,2030643
5	2,6350708	2,6066504	2,5826727	2,5571277	2,5320061	2,5072983	2,4829955
6	2,8849768	2,8526881	2,8210021	2,7899041	2,7593797	2,7294150	2,6999965
7	3,0833149	3,0456032	3,0086631	2,9724738	2,9370154	2,9022685	2,8682144
8	3 2407261	3,1981053	3,1564276	3,1156657	3,0757933	3,0367848	2,9986158
9	3,3656557	3,3186603	3,2727777	3,2279731	3,1842135	3,1414668	3,0997022
10	3,4648061	3,4139607	3,3643919	3,3160574	3,2689168	3,2229314	3,1780637
11	3,5434969	3,4892970	3,4365290	3,3851430	3,3350913	3,2863279	3,2388091
12	3,6059499	3,5488514	3,4933299	3,4393279	3,3867900	3,3356637	3,2858985
13	3,6555158	3,5959300	3,5380551	3,4818258	3,4271797	3,3740574	3,3224019
14	3,6948538	3,6331462	3,5732717	3,5151575	3,4587342	3,4039357	3,3506992
15	3,7260745	3,6625662	3,6010013	3,5413000	3,4833861	3,4271873	3,3726350
16	3,7508527	3,6858231	3,6228357	3,5618039	3,5026454	3,4452820	3,3896396
17	3,7705180	3,7042080	3,6400281	3,5778854	3,5176917	3,4593634	3,4028214
18	3,7861254	3,7187415	3,6535654	3,5904984	3,5294466	3,4703217	3,4130398
19	3,7985123	3,7302304	3,6642248	3,6003909	3,5386302	3,4788496	3,4209611
20	3,8083431	3,7393126	3,6726179	3,6081497	3,5456048	3,4854861	3,4271016
21	3,8161453	3,7464922	3,6792267	3,6142351	3,5514100	3,4906506	3,4318617
22	3,8223375	3,7521677	3,6844305	3,6190079	3,5557891	3,4946697	3,4355517
23	3,8272520	3,7566543	3,6885279	3,6227513	3,5592102	3,4977975	3,4384122
24	3,8311524	3,7602010	3,6917543	3,6256873	3,5618830	3,5002315	3,4406296
25	3,8342479	3,7630048	3,6942947	3,6279900	3,5639711	3,5021257	3,4423485
26	3,8367047	3,7652212	3,6962950	3,6297961	3,5656024	3,5035997	3,4436810
27	3,8386545	3,7669733	3,6978701	3,6312126	3,5668769	3,5047469	3,4447140
28	3,8402020	3,7683583	3,6991103	3,6323236	3,5678726	3,5056196	3,4455147
29	3,8414302	3,7694532	3,7000869	3,6331950	3,5686504	3 5063343	3,4461354
30	3,8424049	3,7703187	3,7008558	3,6338784	3,5692582	3,5068750	3,4466166
31	3,8431785	3,7710030	3,7014613	3,6344145	3,5697329	3,5072957	3,4469896
32	3,8437924	3,7715438	3,7019380	3,6348349	3,5701039	3,5076231	3,4472788
33	3,8442797	3,7719714	3,7023134	3,6351646	3,5703936	3,5078779	3,4475029
34	3,8446664	3,7723094	3,7026090	3,6354232	3,5706200	3,5080762	3,4476767
35	3,8449734	3,7725766	3,7028417	3,6356261	3,5707969	3,5082305	3,4478114
36	3,8452170	3,7727878	3,7030250	3,6357851	3,5709351	3,5083506	3,4479158
37	3,8454103	3,7729548	3,7031693	3,6359099	3,5710430	3,5084440	3,4479967
38	3,8455637	3,7730868	3,7032829	3,6360078	3,5711274	3,5085168	3,4480595
39	3,8456855	3,7731912	3,7033724	3,6360845	3,5711933	3,5085734	3,4481081
40	3,8457821	3,7732736	3,7034428	3,6361447	3,5712447	3,5086174	3,4481458
41	3,8458588	3,7733388	3,7034983	3,6361919	3,5712849	3,5086517	3,4481751
42	3,8459197	3,7733904	3,7035419	3,6362290	3,5713164	3,5086783	3,4481977
43	3,8459680	3,7734311	3,7035763	3,6362580	3,5713409	3,5086991	3,4482153
44	3,8460064	3,7734634	3,7036034	3,6362808	3,5713601	3,5087153	3,4482289
45	3,8460368	3,7734888	3,7036247	3,6362987	3,5713751	3,5087278	3,4482395
46	3,8460610	3,7735089	3,7036415	3,6363127	3,5713868	3,5087376	3,4482476
47	3,8460801	3,7735249	3,7036547	3,6363237	3,5713959	3,5087452	3,4482540
48	3,8460953	3,7735374	3,7036652	3,6363323	3,5714031	3,5087511	3,4482589
49	3,8461074	3,7735474	3,7036733	3,6363391	3,5714086	3,3087558	3,4482627
50	3,8461170	3,7735552	3,7036798	3,6363444	3,5714130	3,5087593	3,4482657

Продовження таблиці Г.1

Число періодів	Ставка відсотків						
	29,50	30,00	30,50	31,00	31,50	32,00	32,50
1	0,7722008	0,7692308	0,7662835	0,7633588	0,7604563	0,7575758	0,7547170
г	1,3684948	1,3609467	1,3534740	1,3460754	1,3387500	1,3314968	1,3243147
3	1,8289535	1,8161129	1,8034283	1,7908973	1,7785171	1,7662854	1,7541998
4	2,1845201	2,1662407	2,1482209	2,1304559	2,1129408	2,0956708	2,0786413
5	2,4590889	2,4355698	2,4124298	2,3896610	2,3672553	2,3452051	2,3235029
6	2,6711111	2,6427460	2,6146888	2,5875275	2,5606505	2,5342463	2,5083041
7	2,8348348	2,8021123	2,7700297	2,7385706	2,7077190	2,6774593	2,6477767
8	2,3612624	2,9247018	2,8889117	2,8538707	2,8195582	2,7859540	2,7530390
9	3,0588899	3,0190013	2,8800089	2,9418860	2,9046070	2,8681470	2,8324823
10	3,1342779	3,0915395	3,0498153	3,0090733	2,9692829	2,9304144	2,6924394
11	3,1924926	3,1473381	3,1033067	3,0603613	3,0184661	2,9775867	2,9376901
12	3,2374460	3,1902601	3,1442963	3,0995124	3,0558677	3,0133232	2,9718416
13	3,2721531	3,2232770	3,1757060	3,1293988	3,0843101	3,0403964	2,9976163
14	3,2989645	3,2486746	3,1997747	3,1522128	3,1059392	3,0609064	3,0170689
15	3,3196637	3,2682112	3,2182182	3,1696281	3,1223872	3,0764442	3,0317501
16	3,3356477	3,2832394	3,2323511	3,1829222	3,1348952	3,0882153	3,0428303
17	3,3479905	3,2947995	3,2431809	3,1930704	3,1444070	3,0971328	3,0511927
18	3,3575216	3,3036920	3,2514796	3,2008171	3,1516403	3,1038885	3,0575039
19	3,3648816	3,3105323	3,2578388	3,2067306	3,1571409	3,1090064	3,0622671
20	3,3705649	3,3157941	3,2627117	3,2112447	3,1613239	3,1128837	3,0658620
21	3,3749536	3,319841E	3,2664458	3,2146906	3,1645049	3,1158210	3,0685751
22	3,3783425	3,3229551	3,2693071	3,2173211	3,1669239	3,1180462	3,0706227
23	3,3809595	3,3253500	3,2714997	3,2193291	3,1687634	3,1197320	3,0721681
24	3,3829803	3,3271923	3,2731798	3,2208619	3,1701623	3,1210091	3,0733344
25	3,3845408	3,3286095	3,2744673	3,2220320	3,1712261	3,1219766	3,0742146
26	3,3857458	3,3296996	3,2754539	3,2229252	3,1720350	3,1227095	3,0748790
27	3,3866763	3,3305382	3,2762099	3,2236070	3,1726502	3,1232648	3,0753804
28	3,3873948	3,3311832	3,2767892	3,2241275	3,1731180	3,1236854	3,0757588
29	3,3879497	3,3316794	3,2772331	3,2245248	3,1734738	3,1240041	3,0760443
30	3,3883781	3,3320611	3,2775732	3,2248281	3,1737443	3,1242455	3,0762599
31	3,3887090	3,3323547	3,2778339	3,2250596	3,1739501	3,1244284	3,0764226
32	3,3889645	3,3325805	3,2780336	3,2252363	3,1741065	3,1245670	3,0765453
33	3,3891617	3,3327542	3,2781867	3,2253713	3,1742255	3,1246720	3,0766380
34	3,3893141	3,3328879	3,2783040	3,2254742	3,1743160	3,1247515	3,0767079
35	3,3894317	3,3329907	3,2783939	3,2255529	3,1743848	3,1248117	3,0767607
36	3,3895226	3,3330697	3,2784627	3,2256129	3,1744371	3,1248574	3,0768005
37	3,3895927	3,3331306	3,2785155	3,2256587	3,1744769	3,1248920	3,0768306
38	3,3896469	3,3331774	3,2785559	3,2256936	3,1745071	3,1249181	3,0768533
39	3,3896887	3,3332134	3,2785869	3,2257203	3,1745301	3,1249380	3,0768704
40	3,3897210	3,3332410	3,2786107	3,2257407	3,1745476	3,1249530	3,0768833
41	3,3897460	3,3332623	3,2786289	3,2257563	3,1745609	3,1249644	3,0768931
42	3,3897652	3,3332787	3,2786428	3,2257681	3,1745711	3,1249730	3,0769004
43	3,3897801	3,3332913	3,2786535	3,2257772	3,1745787	3,1249796	3,07E9060
44	3,3897916	3,3333010	3,2786617	3,2257841	3,1745846	3,1249845	3,0769102
45	3,3898004	3,3333085	3,2786680	3,2257894	3,1745890	3,1248883	3,0769133
46	3,3898073	3,3333142	3,2786728	3,2257934	3,1745924	3,1249911	3,0769157
47	3,3898126	3,3333186	3,2786764	3,2257965	3,1745950	3,1249933	3,0769175
48	3,3898167	3,3333220	3,2786793	3,2257989	3,1745970	3,1249949	3,0769189
43	3,3898198	3,3333246	3,2786814	3,2258007	3,1745985	3,1249961	3,0769199
50	3,3898223	3,3333266	3,2786831	3,2258020	3,1745996	3,1249971	3,0769207

Навчальне видання

Калетнік Григорій Миколайович

Козловський Сергій Володимирович

Підвальна Оксана Григорівна

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНІ РОЗРАХУНКИ В МЕНЕДЖМЕНТІ ТА БІЗНЕСІ

Навчальний посібник

Відповідальні за випуск Д.В. Кушерець, Є.А. Харлан
Відповідальний редактор ________________
Оригінал-макет підготовлений С.В. Козловським

ТОВ «Видавництво „Знання України"».
03150, Київ, вул. Велика Васильківська 57/3.
Реєстраційне свідоцтво
Серія ДК № 217 від 11.10.2000 р. ______
Тел.: (044) 287-41-45

Підписано до друку ____________.
Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум.-друк. арк. 22,8. Обл.-вид. арк. 25,8.
Наклад 1000 прим. Зам. № ____.

Віддруковано у __________________
21010, ____________. ________.
Тел.: (0432) ___________