Математичне моделювання електротехнічних систем

Лекція 10

8. СПЛАЙНИ. РАЦІОНАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

8.1 Сплайн – інтерполяція

Сплайн — функція, область визначення якої розбита на кінцеве число відрізків, на кожному з яких сплайн співпадає з деяким многочленом алгебри.

Максимальний ступінь з використаних поліномів називається ступенем сплайна.

9 . ІНТЕРПОЛЯЦІЯ. АПРОКСИМАЦІЯ, ЗГЛАДЖУВАННЯ ДАНИХ, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

9.1 Апроксимація дослідних даних

В результаті проведення натурного експерименту отримана таблична функція:

i	X	Y
0	x_o	y_o
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
:	:	:
n	x_n	y_n

де

N – кількість вузлових точок в таблиці, **n=N-1.**

Завдання апроксимації полягає у відшуканні аналітичної залежності **y=f(x)** отриманої табличної функції.

Перший спосіб. Цей спосіб вимагає, щоб апроксимуюча крива **F(x)**, аналітичний вид якої необхідно знайти, проходила через всі вузлові точки таблиці. Цю задачу можна вирішити за допомогою побудови інтерполяційного многочлена ступеня **n**:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x^1 + a_n \qquad (9.1)$$

Проте цей спосіб апроксимації досвідчених даних має недоліки:

- Точність апроксимації гарантується в невеликому інтервалі $[x_0, x_n]$ при кількості вузлових точок не більше 7-8.
- Значення табличної функції у вузлових точках повинні бути задані з великою точністю.

Відомо, що як би точно не проводився експеримент, результати експерименту містять похибки. Річ у тому, що насправді досліджувана величина залежить не тільки від одного аргументу Х, але і від інших випадкових чинників, які від досліду до досліду коливаються по своїх власних випадкових законах. Цим самим обумовлюється випадкове коливання досліджуваної функції.

В результаті апроксимувати дослідні дані за допомогою інтерполяційного многочлена, який проходив би через всі вузлові точки таблиці, не завжди вдається. Більш того, прагнучи пройти через всі вузлові точки таблиці і збільшуючи порядок многочлена, ми тим самим починаємо відтворювати не тільки закономірні зміни функції, що знімається, але і її випадкові збурювання.

Другий спосіб. На практиці знайшов застосування інший спосіб апроксимації дослідних даних – згладжування дослідних даних. Суть цього методу полягає в тому, що табличні дані апроксимують кривою F(x), яка не обов'язково повинна пройти через всі вузлові точки, а повинна як би згладити всі випадкові збурювання табличної функції.

9.2 Згладжування дослідних даних методом найменших квадра У цьому методі при згладжуванні досвідчених даних що апроксимує криву F(x) прагнуть провести так, щоб її відхилення і ε від табличних даних (ухилення) по всіх вузлових точках були мінімальними (рис. 9.1), тобто

$$\varepsilon_i = \left|F(x_i) - y_i\right| \to \min \qquad (9.2)$$

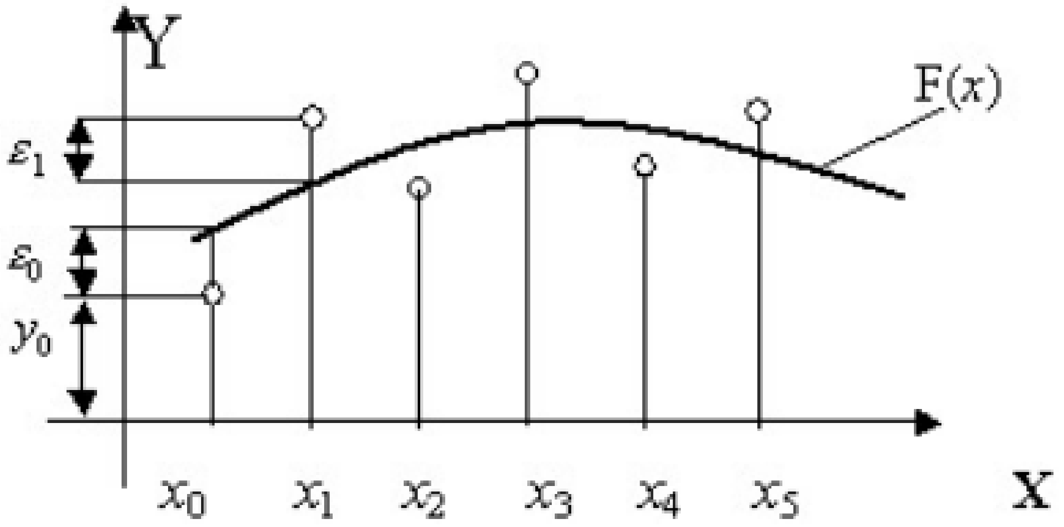

Рисунок 9.1 – Згладжування досвідчених даних апроксимуючою кривою **F(x)** з мінімізацією відхилень по всіх вузлових точках

Позбавимося від знаку відхилення. Тоді умова (9.2) матиме вигляд:

$$\varepsilon_i^2 = \left|(F(x_i) - y_i)^2\right| \to \min \qquad (9.3)$$

Суть методу найменших квадратів полягає в наступному: для табличних даних, отриманих в результаті експерименту, відшукати аналітичну залежність F(x), сума квадратів відхилень якої від табличних даних по всіх вузлових точках була б мінімальною, тобто

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (F(x_i) - y_i)^2 \to \min \qquad (9.4)$$

Для визначеності завдання шукану функцію F(x) вибиратимемо з класу многочленів алгебри ступеня m:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x^1 + a_m \qquad (9.5)$$

Назвемо многочлен (9.5) апроксимуючим многочленом. Апроксимуючий многочлен не проходить через всі вузлові точки таблиці. Тому його ступінь **m** не залежить від числа вузлових точок. При цьому завжди **m < n**. Ступінь **m** може мінятися в межах $1 \le m \le N-2$.

Якщо **m=1**, то ми апроксимуємо табличну функцію прямою лінією. Таке завдання називається лінійною регресією.

Якщо **m=2**, то ми апроксимуємо табличну функцію квадратичною параболою. Таке завдання називається квадратичною апроксимацією.

Якщо **m=3**, то ми апроксимуємо табличну функцію кубічною параболою. Таке завдання називається кубічною апроксимацією.

Уточнимо метод найменших квадратів: для табличної функції, отриманої в результаті експерименту, побудувати апроксимуючий многочлен (9.5) ступені **m**, для якого сума квадратів ухилень по всіх вузлових точках мінімальна, тобто

$$S = \sum_{0}^{n} \left(P_m(x_i) - y_i \right) \to \min \tag{9.6}$$

Змінимо вид многочлена $\mathbf{P_m}$. Поставимо на останнє місце доданки, що містять $\mathbf{x^m}$. На передостаннє – доданки, що містять $\mathbf{x^{m-1}}$ і т.д. В результаті отримаємо:

$$P_m(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \tag{9.7}$$

або

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

При цьому змінимо індекси коефіцієнтів многочлена. Тоді умова (9.6) матиме вигляд:

$$S=\sum_{i=0}^{n}\left(a_0x_i^0+a_1x_i^1+a_2x_i^2+\ldots+a_mx_i^m+y_i\right)^2\to\min$$

де

x$_i$ і **y**$_i$ – координати вузлових точок таблиці,

a$_j$, $j=\overline{0,m}$ – невідомі коефіцієнти многочлена.

Якщо для будь-якого $n \in D$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{a})$ виконується нерівність $\mathbf{f(x) \leq f(a)}$ $(a \in D)$ то точка **a** називається точкою найбільшого значення функції на множині **D**:

$$\max_{x \in D} f(x) = f(a)$$

Якщо для будь-якого $x \in D$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{b})$ виконується нерівність $\mathbf{f(x) > f(b)}$ $(b \in D)$ то точка **b** називається точкою найменшого значення функції на множині **D**.

$$\max_{x \in D} f(x) = f(b)$$

Точка найбільшого або найменшого значення може бути екстремумом функції, але не обов'язково їм є.

Точку найбільшого (найменшого) значення безперервної на відрізку функції слід шукати серед екстремумів цієї функції і її значень на кінцях відрізання.

Необхідною умовою існування мінімуму функції S є рівність нулю її часткових похідних (першій похідній) по кожній a_j.

$$
\begin{cases}
\frac{\delta s}{\delta a_0} \to 2\sum_{i=0}^{n}\left(\left(a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \ldots + a_m x_i^m - y_i\right)x_i^0\right) = 0 \\
\frac{\delta s}{\delta a_1} \to 2\sum_{i=0}^{n}\left(\left(a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \ldots + a_m x_i^m - y_i\right)x_i^1\right) = 0 \\
\frac{\delta s}{\delta a_2} \to 2\sum_{i=0}^{n}\left(\left(a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \ldots + a_m x_i^m - y_i\right)x_i^2\right) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\delta s}{\delta a_m} \to 2\sum_{i=0}^{n}\left(\left(a_0 x_i^0 + a_1 x_i^1 + \ldots + a_m x_i^m - y_i\right)x_i^m\right) = 0
\end{cases}
$$

В результаті отримали систему лінійних рівнянь. Розкриваючи дужки і переносячи вільні члени в правій частині рівнянь, отримаємо в нормальній формі систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_m a_m = d_0 \\ c_1 a_0 + c_2 a_1 + c_3 a_2 + \ldots + c_{m+1} a_m = d_1 \\ c_2 a_0 + c_3 a_1 + c_4 a_2 + \ldots + c_{m+2} a_m = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_m a_0 + c_{m+1} a_1 + c_{m+2} a_2 + \ldots + c_{2m} a_m = d_m \end{cases} \qquad (9.8)$$

де

$\mathbf{a_j}$ – невідомі системи лінійних рівнянь (9.7),

$c_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k, k = \overline{0,2m}$ – коефіцієнти системи лінійних рівнянь (9.7),

$d_j = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k, j = \overline{0,m}$ – вільні члени системи лінійних рівнянь (9.7), Порядок системи становить **m+1**.

При ручному рахунку коефіцієнти $\mathbf{c_k}$ і вільні члени $\mathbf{d_j}$ зручно визначати, користуючись (табл. 9.1).

Таблиця 9.1 – Для ручного рахунку коефіцієнтів c_k і вільних членів d_j

i	x_i^0	x_i^1	x_i^2	...	x_i^{2m}	$x_i^0 y_i$	$x_i^1 y_i$	...	x_i^m
0	1								
1	1								
2	1								
...	...								
N	1								
$\sum_{i=0}^{n}$	c_0	c_1	c_2	...	c_{2m}	d_0	d_1	...	d_m