

Л2. Основні закони і тотожності алгебри логіки

Для виконання перетворень функцій в алгебрі логіки використовується ряд законів та тотожностей, основні з яких наведені нижче:

Закон перестановки (комутативний):

$$X1 \vee X2 = X2 \vee X1, \quad X \cdot X2 = X2 \cdot X1;$$

Закон сполучення (асоціативний):

$$(X1 \vee X2) \vee X3 = X1 \vee (X2 \vee X3), \quad (X1 \cdot X2) \cdot X3 = X1 \cdot (X2 \cdot X3);$$

Закон розподілу (дистрибутивний):

$$X1 \cdot (X2 \vee X3) = X1 \cdot X2 \vee X1 \cdot X3, \quad X1 \vee X2 \cdot X3 = (X1 \vee X2) \cdot (X1 \vee X3);$$

Закон повторення:

$$X1 \vee X1 \vee \dots \vee X1 = X1, \quad X1 \cdot X1 \cdot \dots \cdot X1 = X1;$$

Закон інверсії:

$$\overline{X1 \vee X2} = \overline{X1} \cdot \overline{X2}, \quad \overline{X1 \cdot X2} = \overline{X1} \vee \overline{X2};$$

Закон заперечення:

$$X \vee \overline{X} = 1; \quad X \cdot \overline{X} = 0;$$

Закон подвійного заперечення:

$$\overline{\overline{X}} = X;$$

Закон поглинання:

$$X1 \vee X1 \cdot X2 = X1; \quad X1 \cdot (X1 \vee X2) = X1;$$

Закон склеювання:

$$X1 \cdot X2 \vee X1 \cdot \overline{X2} = X1;$$

Правила операцій з константами:

$$\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0, \quad X \cdot 0 = 0, \quad X \cdot 1 = X, \quad X \vee 0 = X, \quad X \vee 1 = 1;$$

Додаткові тотожності:

$$X1 \vee \overline{X1} \cdot X2 = X1 \vee X2, \quad X1 \cdot (\overline{X1} \vee X2) = X1 \cdot X2.$$

Крім того, необхідно враховувати наступні властивості логічних операцій:

Операція НЕ

$$\overline{\overline{1}} = 0$$

$$\overline{\overline{0}} = 1$$

$$\overline{\overline{X}} = X$$

Операція І

$$X \cdot 1 = X$$

$$X \cdot 0 = 0$$

$$X \cdot X = X$$

$$X \cdot \overline{X} = 0$$

Операція АБО

$$X + 1 = 1$$

$$X + 0 = X$$

$$X + X = X$$

$$X + \overline{X} = 1$$

Функціонально повна система логічних елементів - це такий набір елементів, за допомогою якого можна реалізувати будь-яку функцію, незалежно від її складності. Оскільки логічна функція є комбінацією простих функцій - диз'юнкції, кон'юнкції та інверсії, то набір з елементів АБО, І, НЕ є

функціонально повним. Аналогічно можна сказати і про елементи, що реалізують функції І-НЕ та АБО-НЕ. _

Способи задавання функцій алгебри логіки

Розрізняють декілька способів задавання функцій алгебри логіки, основними з яких є: табличний, аналітичний, координатний, графічний та цифровий.

При **табличному способі** ФАЛ задається таблицею істинності (станів), в якій вказується, який із двох можливих значень «0» або «1» приймає функція на кожному з наборів аргументів. Приклад задавання ФАЛ табличним способом наведений на рис. 1.

Номер набору	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>y₂</i>
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Рисунок 1 – Табличний спосіб задавання функцій алгебри логіки

Аналітичний спосіб передбачає задавання функції у виді формалізованого виразу, що складений з використанням математичного апарату алгебри логіки, наприклад:

$$Y_2 = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + abc \quad (1)$$

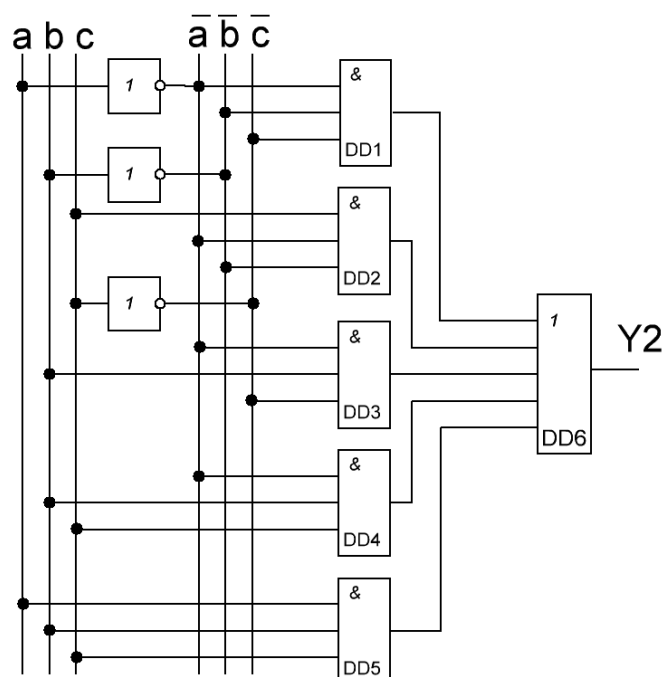


Рисунок 2 – Реалізації схеми за формулою (1) ФЛА

Застосуємо закони та тотожності алгебри логіки до (1) та спростимо ФАЛ

$$Y2 = \bar{a}\bar{b} \cdot (\bar{c} + c) + \bar{a}bc + bc \cdot (\bar{a} + a) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}bc + bc \quad (2)$$

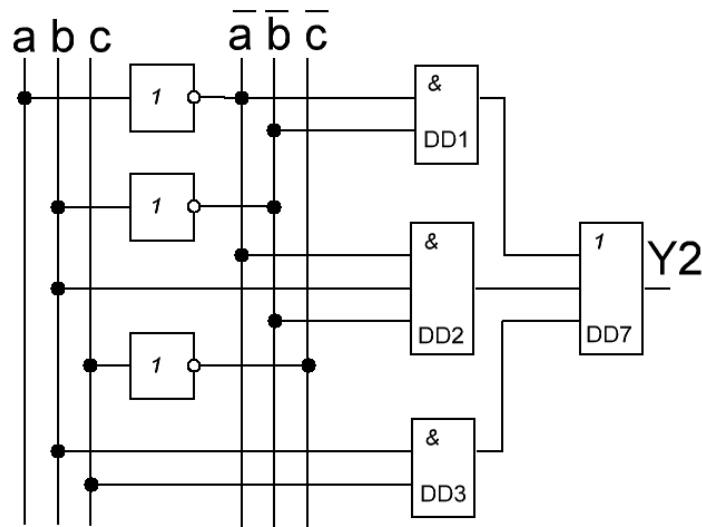


Рисунок 3 – Реалізації схеми за формулою (2) ФЛА

Застосуємо до (2) ФЛА закон інверсії, щоб перейти до базису І-НЕ

$$Y2 = \bar{\bar{a}\bar{b}} + \bar{\bar{a}bc} + \bar{bc} = \bar{\bar{a}\bar{b}} \cdot \bar{\bar{a}bc} \cdot \bar{bc} \quad (3)$$

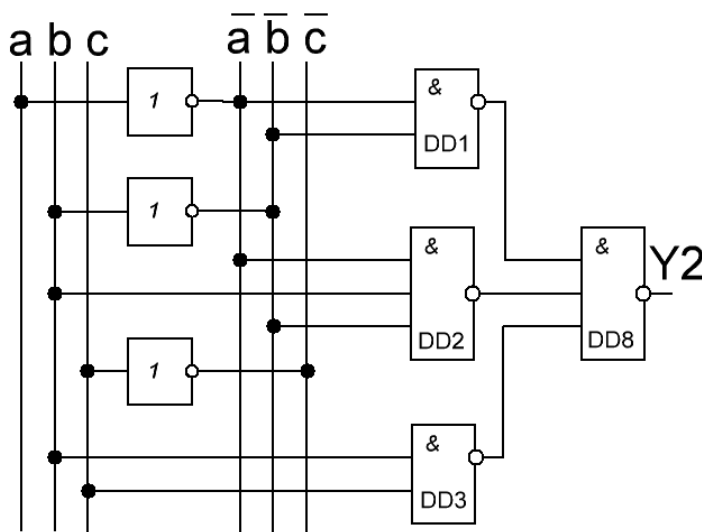


Рисунок 4 – Реалізації схеми за формулою (3) ФЛА

Завдання 1. Записати логічну формулу до схеми, що наведена на рис. 5

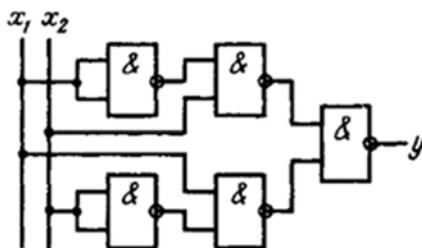


Рисунок 5 – Схема до завдання 1

Координатний спосіб передбачає задавання ФАЛ у виді координатних карт станів, які називаються картами Карно (рис. 6). При наявності n змінних карти Карно складаються з 2^n полів, куди записують значення функції при відповідному наборі аргументів. При складанні карти Карно необхідно, щоб набори аргументів в сусідніх полях (клітинках) відрізнялись тільки значенням однієї змінної.

		$X_1 X_2$			
X_3		00	01	11	10
	0	1	1	0	0
	1	1	1	1	0

Рисунок 6 – Спосіб задавання ФАЛ координатний способом _

Метод карт Карно

Метод заснований на використанні карт мінтермів. Карта Карно є прямокутною таблицею, розділеною горизонтальними і вертикальними лініями на комірки (клітки), загальне число яких збігається з числом мінтермів даного числа аргументів. Кількість кліток карти Карно $k = 2^n$, де n число змінних. У кожену комірку таблиці заносяться значення одного мінтерма. Їх розміщення здійснюється так, щоб два суміжні мінтерми знаходилися в сусідніх комірках (суміжні – розрізняються формою входження не більш, ніж одного аргументу). Карта Карно для чотирьох змінних A, B, C, D (число мінтермів дорівнює $k = 2^n = 2^4 = 16$):

		A				
		0	1	3	2	
C		4	5	7	6	
		B				

		A				
		0	1	3	2	
C		4	5	7	6	
		12	13	15	14	
		8	9	11	10	D
		B				

Рисунок 7 – Карти Карно для 8 та 16 мінтермів (3 та 4 вхідних змінних)

Правила групування мінтермів

1. Групуються дві клітки, що стоять поруч, в стовпці, або ряду. Кожна з групованих кліток відрізняється від будь-якої сусідньої лише одною змінною, яка при цьому і виключається; число групованих кліток має бути парним; можна групувати крайні клітки між собою, оскільки карта – по суті тор.

2. Групуються клітки, що є повними квадратами з 4, 16 кліток.

3. Групуються клітки, що є повними горизонтальними рядами, або вертикальними стовпцями.

4. Групуються клітки, що представляють два поруч розташованих стовпця, або рядка.

5. Клітка може входити в декілька об'єднань.

Складемо до рис.1 ФЛА методом карт Карно. Заповнюємо карту Карно для 8 мінтермів та виконаємо групування мінтермів (рис. 8)

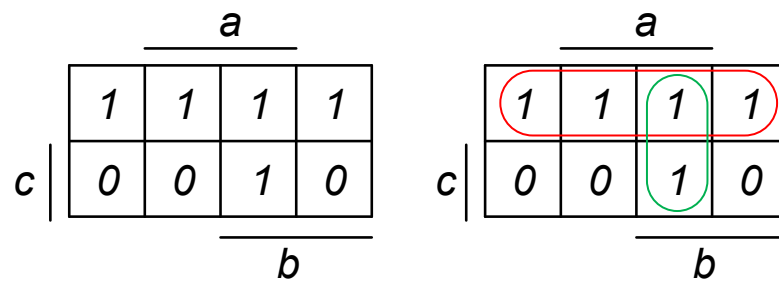


Рисунок 8 – Карти Карно з групуванням мінтермів для табличної функції (рис. 1)

Запишемо спрощену ФАЛ

$$Y2 = \bar{c} + ab = \overline{\bar{\bar{c}} \cdot \bar{ab}} = \overline{c \cdot \bar{ab}} \quad (4)$$

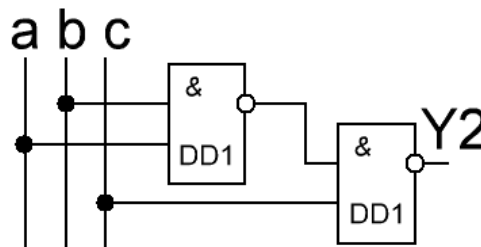


Рисунок 9 – Реалізації схеми за формулою (4) ФЛА

Завдання 2. Записати структурну формулу, яка реалізує комбінаційна схема (рис. 10). Спростити отриману структурну формулу і побудувати нову схему на елементах I, АБО та НЕ.

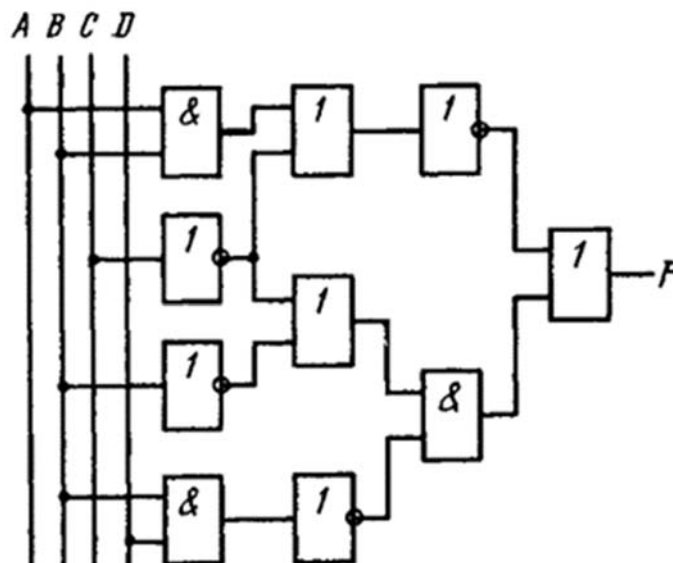


Рисунок 10 – Схема до завдання 2

Складаємо схему в середовищі Proteus (рис. 11).

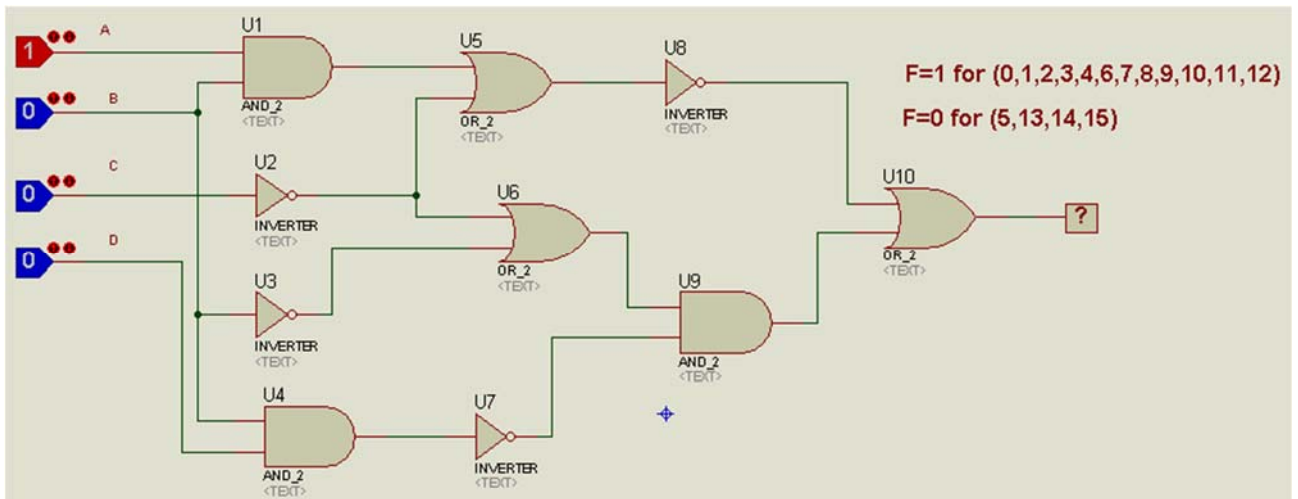


Рисунок 11 – Схема цифрового пристрою до завдання 2 в середовищі Proteus

Складаємо логічну функцію роботи схеми табличним способом (табл. 1) дослідивши її роботу в середовищі Proteus при різних значеннях A, B, C, D.

Таблиця 1 – Табличний спосіб задавання ФАЛ до завдання 2

n	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Заповнюємо карту Карно для 16 мінтермів та виконаємо групування мінтермів (рис. 12).

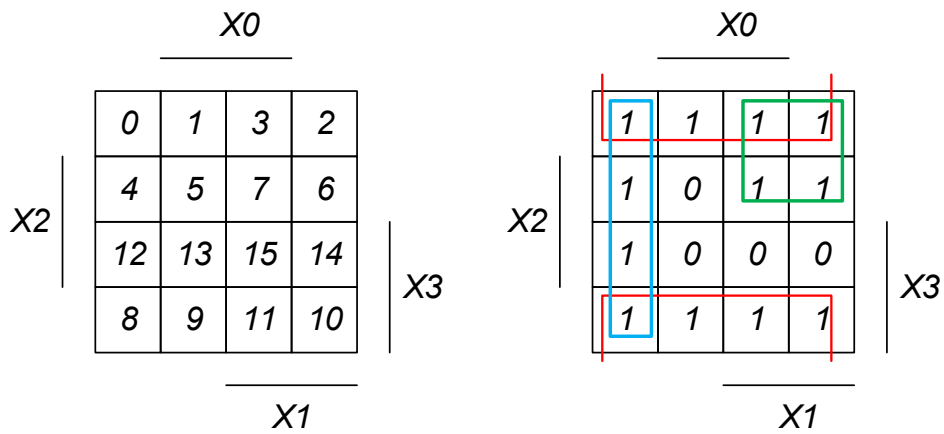


Рисунок 12 – Карти Карно з групуванням мінтермів (до завдання 2)

$$\text{Результат } Y = x_2 \times \overline{x_1} \overline{x_3} \times \overline{x_0} \overline{x_1}$$

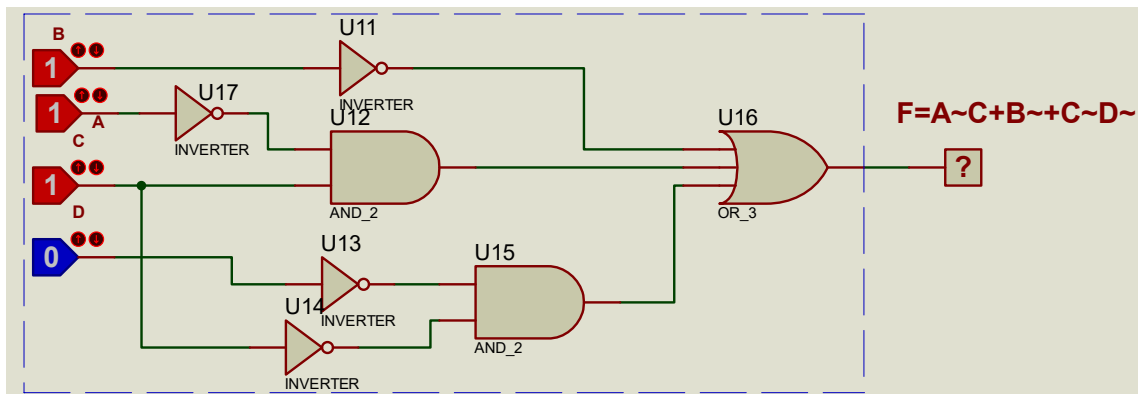


Рисунок 13 – Синтезована схема цифрового пристрою (до завдання 2)

Завдання 3. За структурною схемою (рис. 14) провести аналіз та встановити функціональну залежність у вигляді формул алгебри логіки та таблиці істинності. Для цього скласти схему (за своїм варіантом) у середовищі Proteus VSM та експериментально визначити таблицю істинності роботи схеми. За таблицею істинності скласти карти Карно, мінімізувати логічну функцію. Синтезувати схему цифрового пристрою у базисі I-НЕ.

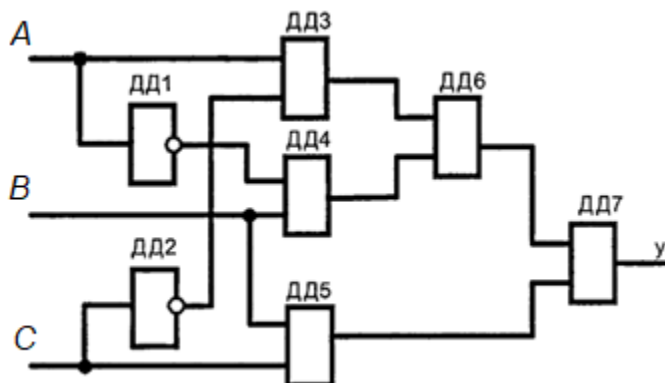


Рисунок 14 – Схема до завдання 3

ДД1, ДД2 – інвертори, знак «-» в таблиці 2 означає, що елемент відсутній, знак «+» відповідає наявності інвертора в схемі.

Таблиця 2 – Дані до виконання завдання 3

№	ДД1	ДД2	ДД3	ДД4	ДД5	ДД6	ДД7
29	-	+	I	АБО	I	АБО-НЕ	АБО-НЕ

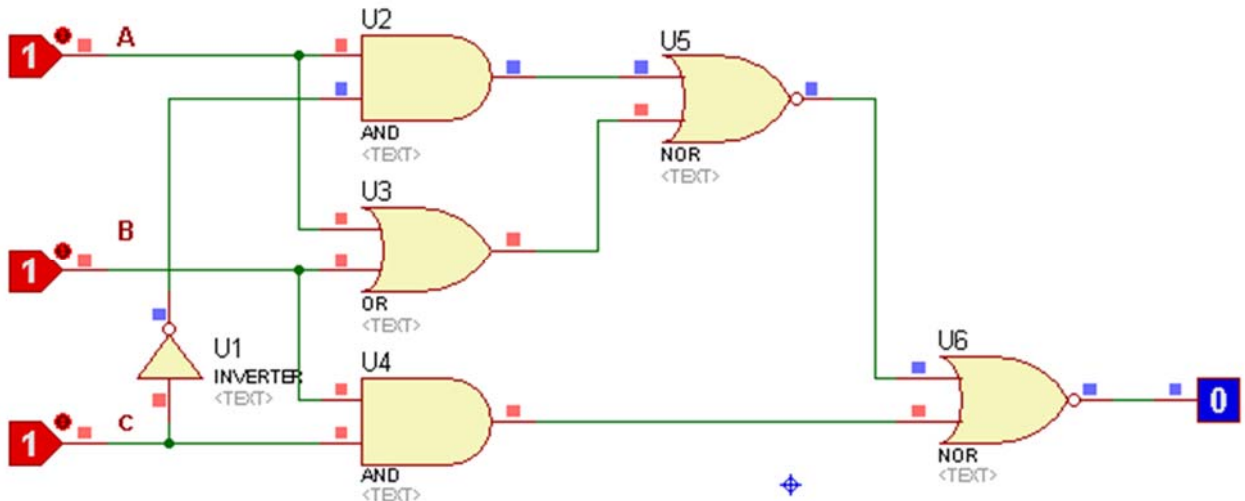
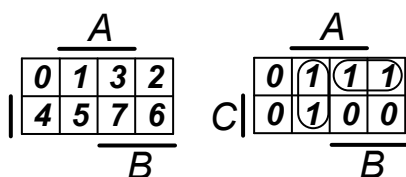


Рисунок 15 – Схема цифрового пристрою (завдання 3)

Таблиця 3 – Табличний спосіб задавання ФАЛ до завдання 3

№	C	B	A	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0



$$F = AB + BC = \overline{A}B \overline{C} + A\overline{B}C$$

Рисунок 16 – Карти Карно з групуванням мінтермів (до завдання 3)

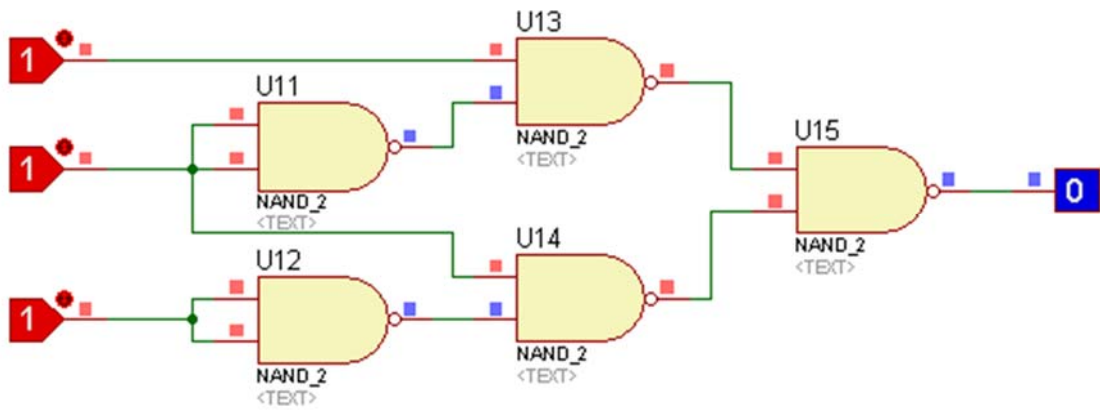


Рисунок 17 – Синтезована схема цифрового пристрою у базисі І-НЕ