



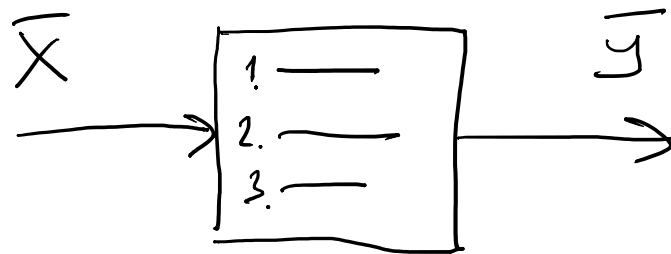
Розробка та аналіз алгоритмів

1. Вступ

- Що таке алгоритми?
- Ефективність алгоритмів
- Приклад: метод Карацуби
- Структура курсу

Що таке алгоритм?

- **Алгоритм** – набір систематизованих **правил виконання** обчислювального **процесу**, що обов'язково приводить до **розв'язання певного класу задач** після **скінченного** числа операцій
- **Алгоритм** – це довільна, **коректна обчислювальна процедура**, на **вхід** якої подається деяка величина або набір величин, а результатом виконання якої є **вихідна** величина або набір значень



Приклад: задача сортування

Вхід $\bar{X} : \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

Вихід $\bar{Y} : \langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$, $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$, $a'_i \in \bar{X}$

Екземпляр задачі

Ⓐ

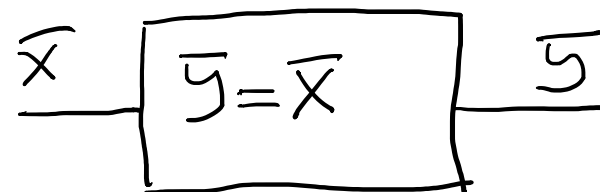
$\bar{X} = \langle 30, 5, 15, 43, 11 \rangle$

$\bar{Y} = \langle 5, 11, 15, 30, 43 \rangle$

Ⓑ

$\bar{X} = \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$

$\bar{Y} = \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$



Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації

- Кожний алгоритм має справу з дискретними даними: вхідними, проміжними, вихідними

Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації
2. Дискретність роботи алгоритму
 - Алгоритм виконується по кроках та при цьому на кожному кроці виконується тільки одна операція

Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації
2. Дискретність роботи алгоритму
3. Детермінованість алгоритму
 - Дані, які отримуються в кожний момент часу, однозначно визначаються даними, які були отримані в попередні моменти часу

Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації
2. Дискретність роботи алгоритму
3. Детермінованість алгоритму
4. Елементарність кроків алгоритму
 - Правила, за якими отримуються наступні дані з попередніх, повинні бути простими та локальними

Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації
2. Дискретність роботи алгоритму
3. Детермінованість алгоритму
4. Елементарність кроків алгоритму
5. Виконуваність операцій
 - В алгоритмі не повинно бути невиконуваних операцій (наприклад, «ділення на нуль»)

Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації
2. Дискретність роботи алгоритму
3. Детермінованість алгоритму
4. Елементарність кроків алгоритму
5. Виконуваність операцій
6. Скінченність алгоритму
 - Опис алгоритму повинен бути скінченним

Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації
2. Дискретність роботи алгоритму
3. Детермінованість алгоритму
4. Елементарність кроків алгоритму
5. Виконуваність операцій
6. Скінченність алгоритму
7. Масовість алгоритму
 - Алгоритм повинен застосовуватись для якогось (потенційно нескінченного) набору вхідних даних

Властивості алгоритмів

1. Дискретність інформації ✓
2. Дискретність роботи алгоритму ✓
3. Детермінованість алгоритму ✓
4. Елементарність кроків алгоритму ✓
5. Виконуваність операцій ✓
6. Скінченність алгоритму ✓
7. Масовість алгоритму ✓

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times 222 \\ \hline 222 \\ 222 \\ 222 \\ \hline 24642 \end{array}$$

$$\overline{X} = \langle 111, 222 \rangle$$

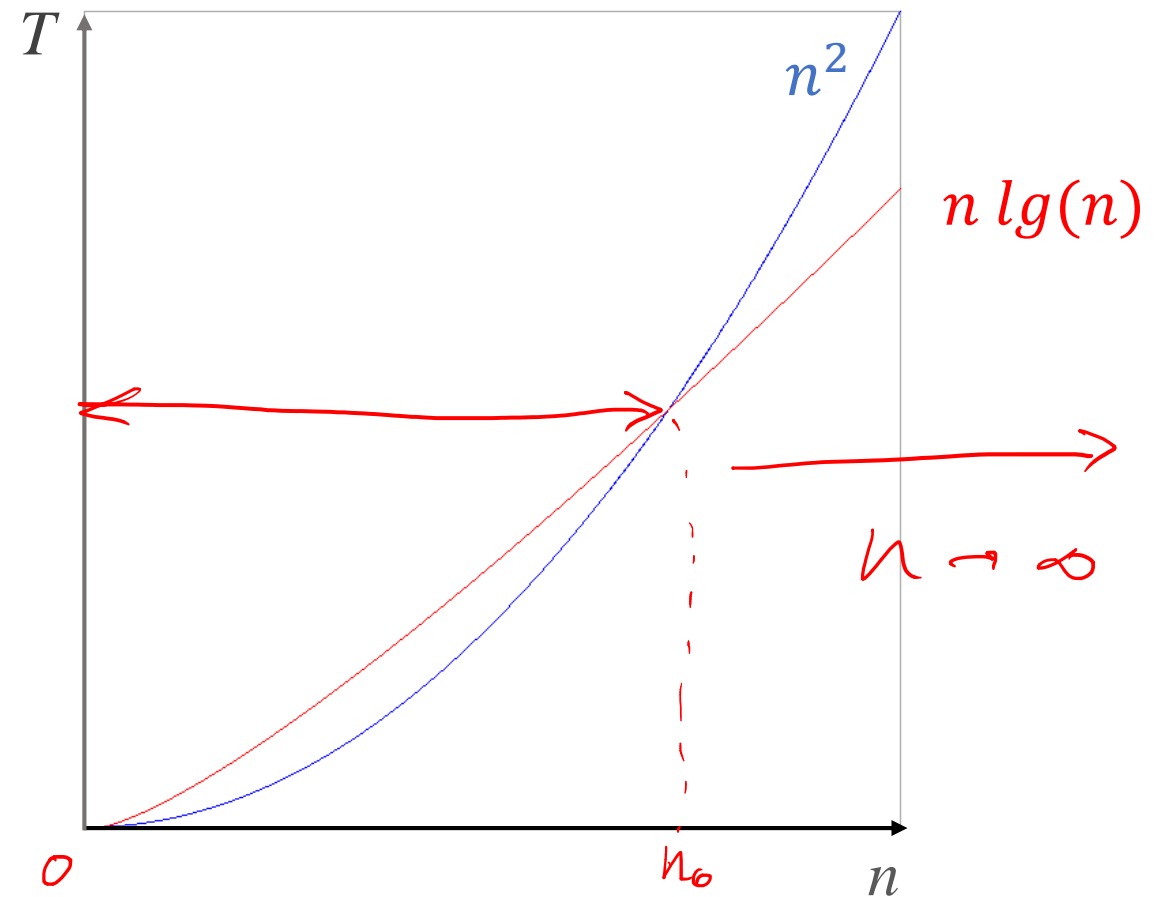
$$\overline{Y} = \langle 24642 \rangle$$

Ефективність алгоритмів

Задача
сортування

Сортування вставками
(Insertion sort)
 $T(n) = c_1 \cdot n^2$

Сортування злиттям
(Merge sort)
 $T(n) = c_2 \cdot n \cdot \log n$



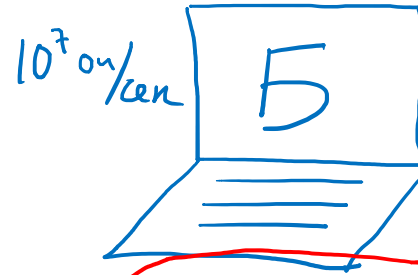
Приклад: ефективність алгоритмів



Insertion sort
 $C_1 = 2$

$$n = 10^6 \quad \frac{2 \cdot (10^6)^2}{10^9} = 2000 \text{ сек.} \quad >$$

$$n = 10^7 \quad T(n) \approx 2,3 \text{ год} \quad \gg$$



Merge sort
 $C_2 = 50$

$$\frac{50 \cdot 10^6 \cdot \log_2 10^6}{10^7} \approx 100 \text{ сек}$$

$$T(n) \approx 20 \times 6$$

Задача множення цілих чисел

$$X_1 = 5678$$

$$X_2 = 1 \ 2 \ 3 \ 4$$

$$n = 4$$

Handwritten multiplication of 5678 by 1234. The intermediate result 22712 is boxed in blue, and the final result 7006652 is underlined.

$$\begin{array}{r}
 5678 \\
 \times 1234 \\
 \hline
 22712 \\
 17034 \\
 11356 \\
 5678 \\
 \hline
 7006652
 \end{array}$$

$$\frac{4}{16} = 4^{-2}$$

$$T(n) = n^2$$

Золоте правило розробника алгоритмів

«Можливо найбільш важливим принципом для гарного розробника алгоритмів є відмова від того, щоб бути задоволеним результатом»

Аго, Гопкрофт, Ульман, «Розробка та аналіз комп'ютерних алгоритмів», 1974

Задача множення цілих чисел

$$X_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline 56 & 78 \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$X_1 = 10^{n/2} \cdot a + b$$

$$X_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 12 & 34 \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}$$

$$X_2 = 10^{n/2} \cdot c + d$$

$$X_1 \cdot X_2 = (10^{n/2} \cdot a + b) \cdot (10^{n/2} \cdot c + d) =$$

$$= 10^n \cdot \boxed{ac} + 10^{n/2} \cdot (\boxed{ad} + \boxed{bc}) + \boxed{bd}$$

$$|a|, |b|, |c|, |d| = n/2$$

$$T(n) = n^2$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot 4 = \frac{n^2}{4} \cdot 4 = n^2$$

Метод Карацуби

$$X_i X_L = 10^n \cdot ac + 10^{n/2} \cdot (ad + bc) + bd$$

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + \underline{ad + bc} + bd$$

$$ad + bc = \underbrace{(a+b) \cdot (c+d)}_{\sim n/2} - \underbrace{ac}_{\sim n/2} - \underbrace{bd}_{\sim n/2}$$

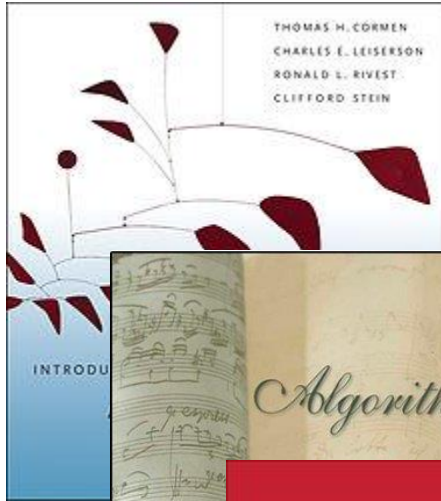
$$X_i X_L = 10^n \cdot \textcircled{ac} + 10^{n/2} \cdot \left[\underbrace{(a+b) \cdot (c+d)}_{\sim n/2} - ac - bd \right] + \textcircled{bd}$$

$$T(n) = 3n^{\log_2 3} \approx 3n^{1.585}$$

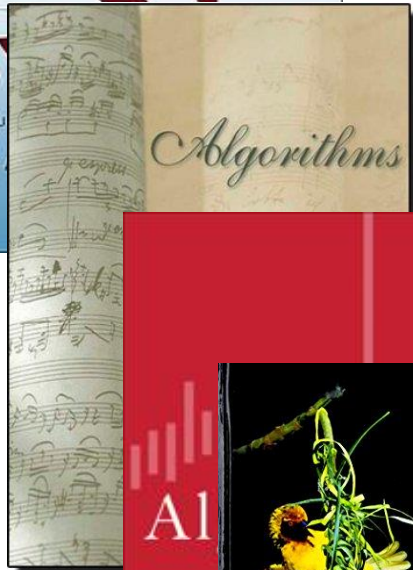
Навіщо вивчати алгоритми?

- Щоб вміти більш ефективно розв'язувати складні задачі
- Для розвитку власних якостей програміста
- Щоб успішно проходити співбесіди в найкращі IT-компанії
- Заради цікавості та інтелектуальної насолоди

Рекомендована література



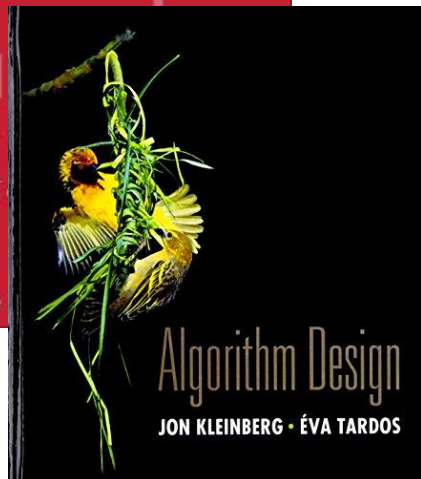
- Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К. **Алгоритмы: построение и анализ**



- Dasgupta, Sanjoy; Papadimitriou, Christos; Vazirani, Umesh (2006) **Algorithms**



- Sedgewick, Robert; Wayne, Kevin (2011) **Algorithms**



- J. Kleinberg, E. Tardos. **Algorithm Design**. Addison Wesley, 2005