

ЛЕКЦІЯ 1

1. Теорія напружень

1.1. Напружений стан в точці

З курсу опору матеріалів [1] відомо, що дев'ять компонентів напруження

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{array}$$

в трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через точку тіла (рис. 1.1), що розглядається, повністю визначають напружений стан в цій точці, тобто, володіючи їх значеннями, можна знайти напруження в будь-якій площадці ABC, яка проходить через точку, що розглядається.

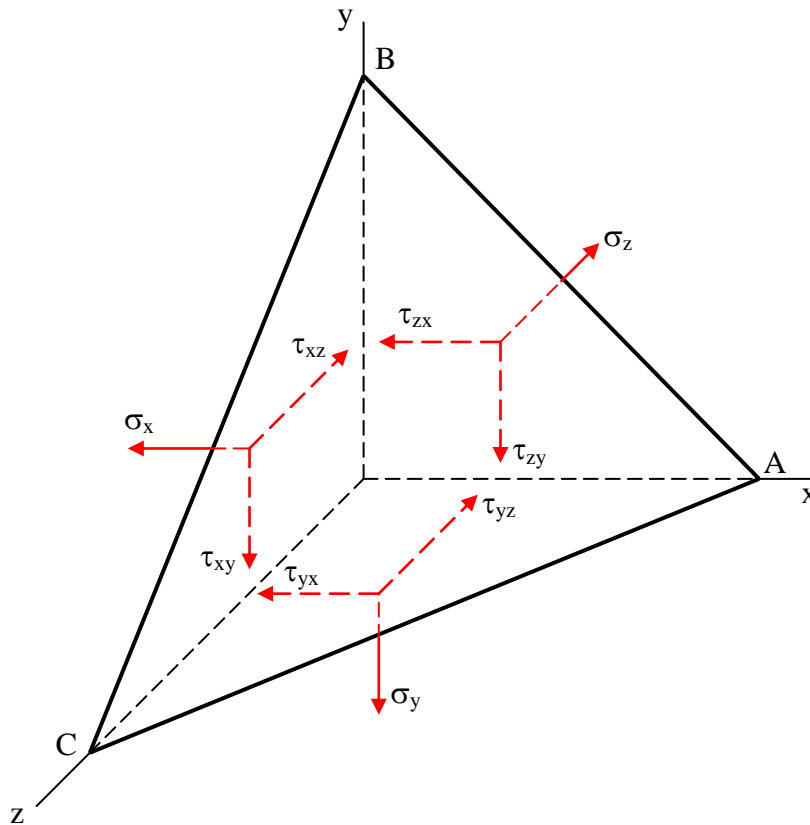


Рис. 1.1. Напруження в трьох взаємно перпендикулярних гранях елементарного тетраедра

Проекції X_v , Y_v , Z_v на вісі координат x , y , z повного напруження p_v (рис. 1.2) в певні похилі площадці визначаються по формулам

$$\left. \begin{array}{l} X_v = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_v = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_v = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

де l , m , n – направляючі косинуси нормалі v до площадки.

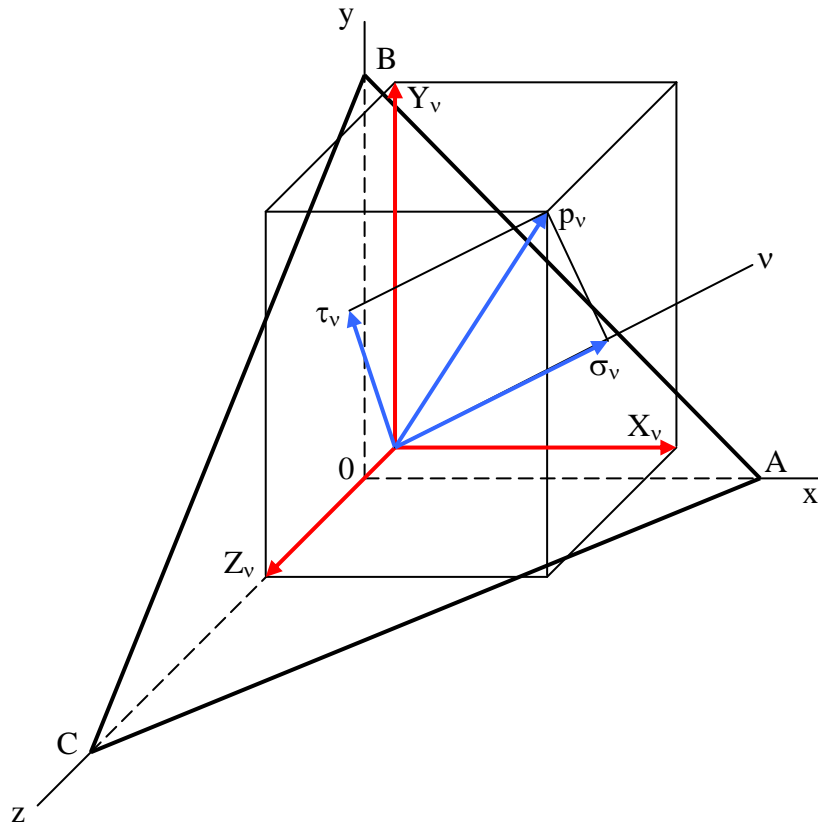


Рис. 1.2. Напруження в похилі грані елементарного тетраедра

Після розрахунку проєкцій повного напруження X_v , Y_v , Z_v вже неважко визначити повне, нормальне і дотичне напруження в цій площадці по формулам

$$p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2};$$

$$\sigma_v = X_v l + Y_v m + Z_v n;$$

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}.$$

Приведені вище дев'ять компонентів напруження утворюють тензор напруження

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Згідно закону парності дотичних напружень в двох взаємно перпендикулярних площадках складові дотичних напружень, перпендикулярні до лінії перетину цих площадок, рівні між собою і направлені або до лінії перетину цих площадок, або від неї, тобто $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Таким чином, компоненти тензора напруження, розташовані симетрично відносно головної діагоналі (діагоналі, що проходить через нормальні напруження σ_x , σ_y , σ_z), рівні між собою.

Як правило для зображення напруженого стану в точці тіла навколо останньої виділяють елемент об'єму в вигляді прямокутного паралелепіпеда, три ребра якого приймаються за вісі координат (рис. 1.3). По граням виділеного елемента зображають складові напруження у відповідних площинах. При цьому

мається на увазі, що довжини ребер паралелепіпеда дорівнюють нулю, тобто паралелепіпед є точкою.

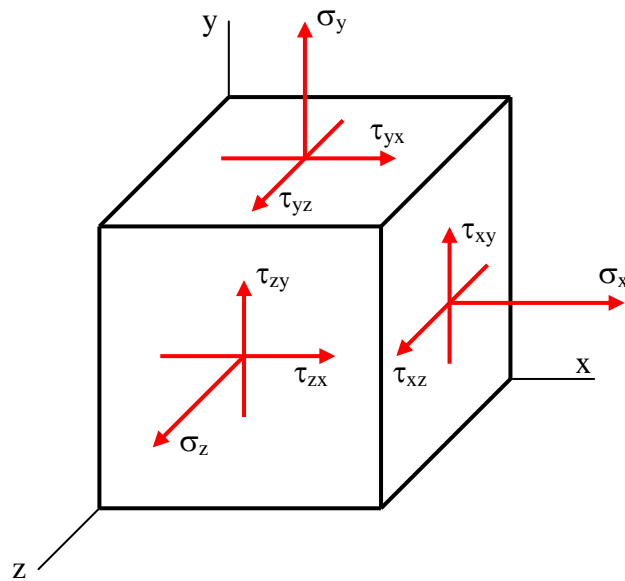


Рис. 1.3. Модель напруженого стану

В подальшому при розгляді загальних питань теорії пластичності і повзучості будуть використані тензорні позначення, які дозволяють записувати низку формул в більш компактному вигляді.

При використанні тензорної символіки декартові координати x , y , z позначають через x_1 , x_2 , x_3 або в загальному вигляді x_i , де індекс i приймає значення 1, 2, 3.

Нормальні напруження позначають σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , а дотичні σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} . Загальний компонент записують у вигляді σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Окремі компоненти отримують із загального компонента заміною букв i і j цифрами 1, 2 і 3.

В подальшому під σ_{ij} будемо розуміти також сукупність всіх дев'яти компонентів напруження, тобто тензор напруження.

Позначимо через n_i складові одиничного вектору нормалі до площадки, рівні направляючим косинусам нормалі.

Тоді формули (1.1) можна представити у вигляді

$$X_{vj} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} n_i .$$

Скорочений запис сумування полягає в тому, що знак суми опускається і по всякому, що двічі повторюється, в одночлені індексу проводиться сумування по значенням 1, 2, 3. В такому випадку попередня формула приймає вигляд

$$X_{vj} = \sigma_{ij} n_i \quad (1.2)$$

або

$$\left. \begin{aligned} X_{v1} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \\ X_{v2} &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \\ X_{v3} &= \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{aligned} \right\}$$

де $X_{v1}=X_v$, $X_{v2}=Y_v$, $X_{v3}=Z_v$,

$$\sigma_{11}=\sigma_x, \sigma_{22}=\sigma_y, \sigma_{33}=\sigma_z,$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{12}=\tau_{yx}=\tau_{xy}, \sigma_{31}=\sigma_{13}=\tau_{zx}=\tau_{xz}, \sigma_{32}=\sigma_{23}=\tau_{zy}=\tau_{yz},$$

$$n_1=l, n_2=m, n_3=n.$$

Індекс, що повторюється (у випадку і, що розглядається), називають підставним, а, що не повторюється (j), вільним.

1.2. Диференціальні рівняння рівноваги

Виділимо із тіла нескінченно малий елемент у формі паралелепіпеда, грані якого паралельні координатним осям (рис. 1.4). Ребра паралелепіпеда позначимо через dx , dy і dz . Дію на паралелепіпед відкинутої частини тіла замінимо силами. На рис. 1.4 зображені сили тільки на видимих гранях. На невидимих гранях сили будуть ті ж, що і на паралельних їм видимих гранях без відповідних прирощень. Проекції на вісі x , y , z сили, що приходить на одиницю об'єму (об'ємної сили), позначимо через X , Y , Z . Рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

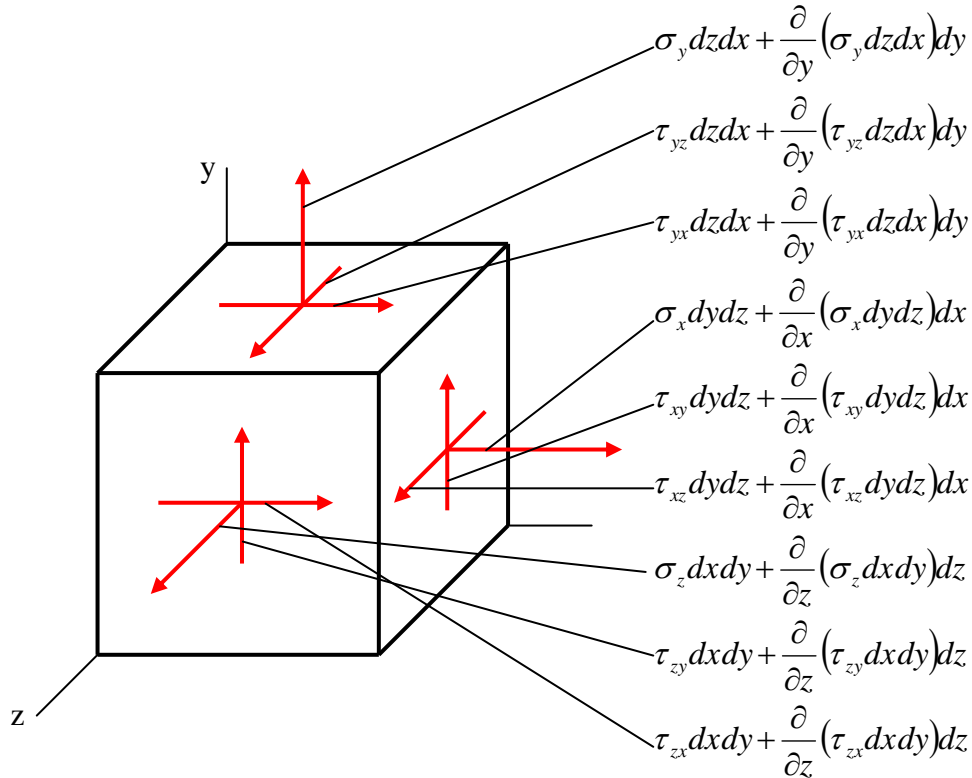


Рис. 1.4. Елементарний паралелепіпед у рівноважному стані

Таким чином, три рівняння рівноваги (1.3) пов'язують шість незалежних компонентів напруження $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

В скороченому запису рівняння (1.3) мають вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_j = 0 \quad (1.4)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

де $X_1=X, X_2=Y, X_3=Z,$

$\sigma_{11}=\sigma_x, \sigma_{22}=\sigma_y, \sigma_{33}=\sigma_z,$

$\sigma_{21}=\sigma_{12}=\tau_{yx}=\tau_{xy}, \sigma_{31}=\sigma_{13}=\tau_{zx}=\tau_{xz}, \sigma_{32}=\sigma_{23}=\tau_{zy}=\tau_{yz},$

$X_1=X, X_2=Y, X_3=Z.$

1.3. Розкладання тензора напружень

Загальний випадок напруженого стану (рис. 1.5, а) може бути представлений у вигляді суми двох напружених станів (рис. 1.5, б, в).

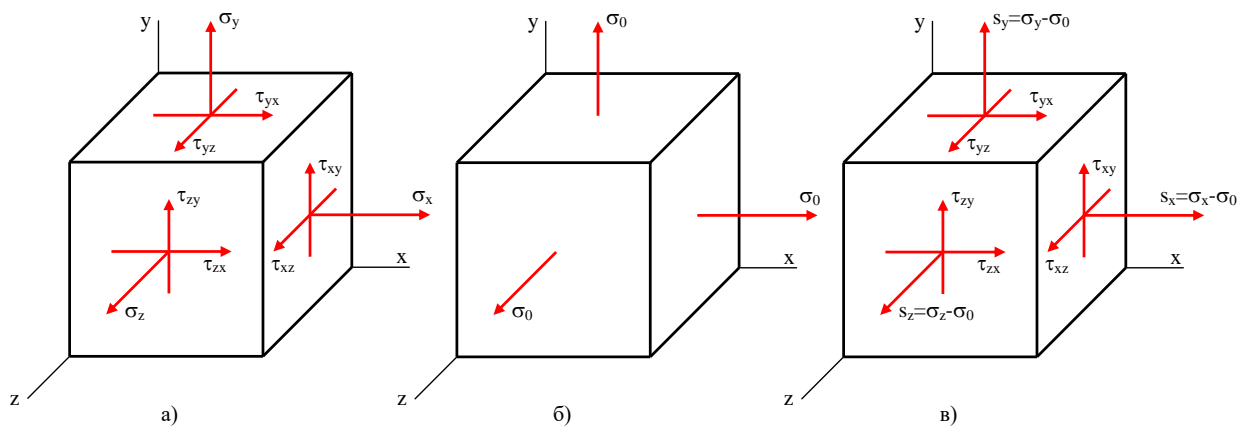


Рис. 1.5. Розкладання тензора напружень на шаровий тензор і девіатор

Тензор напруження першого напруженого стану (рис. 1.5, б) називають шаровим тензором

$$T_{\sigma_0} = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix},$$

де

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad (1.5)$$

а другого напруженого стану (рис. 1.5, в) – девіатором напруження

$$D_{\sigma} = \begin{Bmatrix} s_x & s_{yx} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{zy} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{Bmatrix}.$$

Очевидно, що компоненти девіатора:

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \sigma_x - \sigma_0; & s_{xy} &= \tau_{xy}; \\ s_y &= \sigma_y - \sigma_0; & s_{yz} &= \tau_{yz}; \\ s_z &= \sigma_z - \sigma_0; & s_{zx} &= \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Представлене на рис. 1.5 розкладання загального випадку напруженого стану на два рівносильне розкладання тензора на шаровий тензор і девіатор напруження:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma_0} + D_{\sigma}.$$

З формул (1.6) і (1.5) випливає, що

$$s_x + s_y + s_z = 0, \quad (1.7)$$

тобто в другому напруженому стані сума нормальних напружень в координатних площинах дорівнює нулю.

В межах пружності об'ємна деформація прямо пропорційна сумі нормальних напружень [1]. Нижче буде встановлено, що це положення може бути розповсюджене і за межі пружності. Отже, в другому напруженому стані (рис. 1.5, в) зміна об'єму дорівнює нулю і спотворюється форма елементу. Очевидно, що в першому напруженому стані (рис. 1.5, б) форма елементу не змінюється, а змінюється його об'єм.

Як показують досліди, при усесторонніх рівних розтягах або стисках пластичні деформації не виникають. Утворення їх пов'язано із спотворенням форми елементу. Тому виконане розкладання загального випадку напруженого стану на два фізично виправдано. Девіатор напружень характеризує, наскільки заданий напружений стан відрізняється (ухиляється) від усестороннього рівного розтягу або стиску з головними напруженнями, рівними середньому арифметичному нормальних напружень вихідного напруженого стану.

Введемо величину, яка називається символом Кронекера (дельта-символом). Вона визначається наступними співвідношеннями:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Тоді, використовуючи тензорні позначення і записи сумування, компоненти девіатора напружень можна представити у вигляді

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad (1.8)$$

де

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sigma_{11} - \delta_{11} \sigma_0 & s_{21} &= \sigma_{21} - \delta_{21} \sigma_0 & s_{31} &= \sigma_{31} - \delta_{31} \sigma_0 \\ \text{або} \quad s_{12} &= \sigma_{12} - \delta_{12} \sigma_0 & s_{22} &= \sigma_{22} - \delta_{22} \sigma_0 & s_{32} &= \sigma_{32} - \delta_{32} \sigma_0 \\ s_{13} &= \sigma_{13} - \delta_{13} \sigma_0 & s_{23} &= \sigma_{23} - \delta_{23} \sigma_0 & s_{33} &= \sigma_{33} - \delta_{33} \sigma_0 \end{aligned}$$

$$\text{де} \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1}{3} (\delta_{11} \sigma_{11} + \delta_{21} \sigma_{21} + \delta_{31} \sigma_{31} + \delta_{12} \sigma_{12} + \delta_{22} \sigma_{22} + \delta_{32} \sigma_{32} + \delta_{13} \sigma_{13} + \delta_{23} \sigma_{23} + \delta_{33} \sigma_{33})$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\begin{aligned}
\delta_{21} &= \delta_{31} = \delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{13} = \delta_{23} = 0 \\
S_{11} &= S_x, S_{22} = S_y, S_{33} = S_z, \\
S_{21} &= S_{12} = S_{yx} = S_{xy}, S_{31} = S_{13} = S_{zx} = S_{xz}, S_{32} = S_{23} = S_{zy} = S_{yz}, \\
\sigma_{11} &= \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z, \\
\sigma_{21} &= \sigma_{12} = \tau_{yx} = \tau_{xy}, \sigma_{31} = \sigma_{13} = \tau_{zx} = \tau_{xz}, \sigma_{32} = \sigma_{23} = \tau_{zy} = \tau_{yz},
\end{aligned}$$

1.4. Головні площадки і головні напруження

В кожні точці тіла існують, принаймні, три взаємно перпендикулярні площадки, в яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Ці площадки називають *головними*, а нормальні напруження в них – *головними нормальними напруженнями* або *головними напруженнями*.

Головні напруження є коренями кубічного рівняння

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0 \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
I_1(T_\sigma) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\
I_2(T_\sigma) &= -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2; \\
I_3(T_\sigma) &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.
\end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

де

Використовуючи тензорні позначення і записи сумування, представимо формули (1.11) у вигляді

$$\left. \begin{aligned}
I_1(T_\sigma) &= \sigma_{ii}; \\
I_2(T_\sigma) &= -\frac{1}{2}[(\sigma_{ii})^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}]; \\
I_3(T_\sigma) &= \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{kl} + \frac{1}{6}(\sigma_{ii})^3 - \frac{1}{2}(\sigma_{ii})\sigma_{ij}\sigma_{ij}.
\end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

В подальшому в більшості випадків будемо притримуватися наступних позначень для головних напружень: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Таким чином, через σ_1 позначено алгебраїчно найбільше, а через σ_3 алгебраїчно найменше з головних напружень (з урахуванням знаку).

Оскільки головні напруження не можуть залежати від вибору осей координат, коефіцієнти кубічного рівняння також не змінюються при повороті осей координат, тобто є інваріантами. Їх називають відповідно першим $[I_1(T_\sigma)]$, другим $[I_2(T_\sigma)]$ і третім $[I_3(T_\sigma)]$ інваріантами тензора напружень.

Із формул (1.11) випливає, що вирази інваріантів тензора напружень через головні напруження мають вигляд:

$$\begin{aligned}
I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\
I_2(T_\sigma) &= -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1; \\
I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3.
\end{aligned}$$

Очевидно, що формули (1.11) дозволяють визначити інваріанти шарового тензора і девіатора напружень. Для цього необхідно підставити в них компоненти шарового тензора (1.5) і девіатора напружень (1.6). Визначимо другий і третій інваріанти девіатора напружень. [Перший інваріант девіатора напружень згідно формули (1.7) дорівнює нулю]. Для цього підставимо в формули (1.11) компоненти девіатора напружень (1.6), використовуючи при цьому співвідношення (1.5). Тоді отримаємо:

$$I_2(D_\sigma) = -s_x s_y - s_y s_z - s_z s_x + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 =$$

$$= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (1.13)$$

$$I_3(D_\sigma) = \begin{vmatrix} s_x & s_{yx} & s_{zx} \\ s_{xy} & s_y & s_{zy} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} [2(\sigma_x^3 + \sigma_y^3 + \sigma_z^3 - 3(\sigma_x^2 \sigma_y + \sigma_y^2 \sigma_z + \sigma_z^2 \sigma_x + \sigma_x \sigma_y^2 + \sigma_y \sigma_z^2 + \sigma_z \sigma_x^2)) + 12\sigma_x \sigma_y \sigma_z +$$

$$+ 9\sigma_x (\tau_{xy}^2 - 2\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + 9\sigma_y (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - 2\tau_{zx}^2) + 9\sigma_z (-2\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + 54\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}] \quad (1.14)$$

У скороченому тензорному запису згідно формул (1.12)

$$\left. \begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}; \\ I_3(D_\sigma) &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{kl}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

1.5. Інтенсивність напружень

Інтенсивністю напружень називають величину, пропорційну квадратному кореню з другого інваріанта девіатора напружень. В залежності від прийнятого коефіцієнта пропорційності розрізняють поняття інтенсивності нормальних напружень або просто інтенсивності напружень

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} \quad (1.16)$$

і інтенсивності дотичних напружень

$$T = \sqrt{I_2(D_\sigma)}. \quad (1.17)$$

Зіставляючи вирази (1.16) і (1.17), заключаємо, що

$$\sigma_i = \sqrt{3}T. \quad (1.18)$$

Підставляючи у вираз (1.16) співвідношення (1.13), отримаємо

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.19)$$

В скорочених позначеннях згідно формул (1.16) і (1.15) маємо

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}. \quad (1.20)$$

Залежність інтенсивності напружень від головних напружень має вигляд

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.21)$$

Для випадку одноосного розтягу ($\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) з формули (1.21) маємо

$$\sigma_i = \sigma. \quad (1.22)$$

Таким чином, коефіцієнт пропорційності $\sqrt{3}$ в формулі (1.16) був вибраний для того, щоб в найпростішому випадку одноосного розтягу інтенсивність напружень співпала з величиною найбільшого головного напруження.

У випадку чистого зсуву ($\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$) із формули (1.21) маємо

$$\sigma_i = \sqrt{3}\tau. \quad (1.23)$$

Із залежностей (1.16) і (1.21) випливає також, що інтенсивність дотичних напружень T співпадає з величиною найбільшого дотичного напруження при чистому зсуві:

$$T = \tau.$$

Розглянемо різну інтерпретацію поняття інтенсивності напружень.

Виберемо декартову систему координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис.1.6). Напружений стан в певній точці тіла характеризується вектором \overline{OP} , компоненти якого $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\overline{OP} = \sigma_1 \bar{i}_1 + \sigma_2 \bar{i}_2 + \sigma_3 \bar{i}_3,$$

де $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ - одиничні вектори осей координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

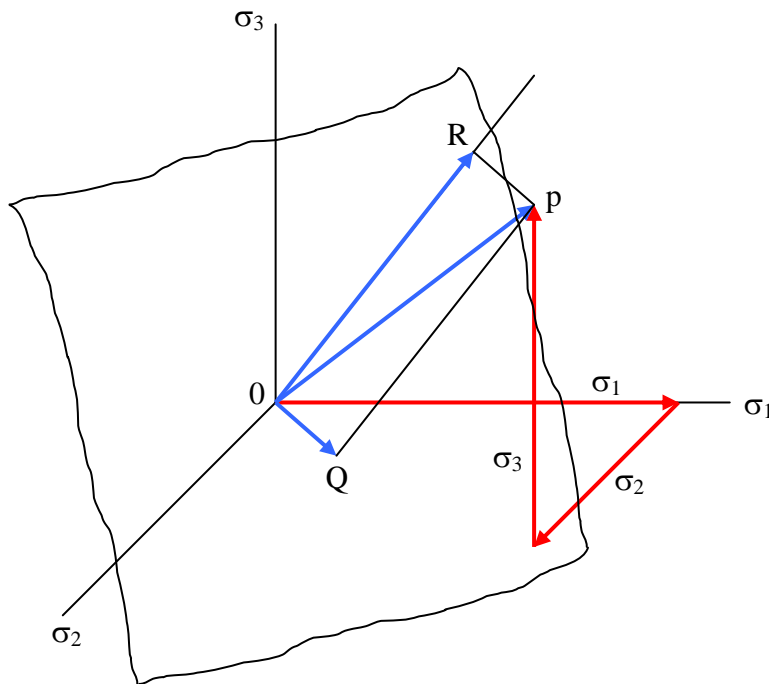


Рис. 1.6. Зображення напруженого стану в просторі головних напружень

Оскільки

$$\sigma_1 = \sigma_0 + s_1, \sigma_2 = \sigma_0 + s_2, \sigma_3 = \sigma_0 + s_3,$$

де s_1, s_2, s_3 – головні напруження девіатора s_{ij} , маємо

$$\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{OQ}.$$

В цьому виразі

$$\overline{OR} = \sigma_0 (\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3);$$

$$\overline{OQ} = s_1 \bar{i}_1 + s_2 \bar{i}_2 + s_3 \bar{i}_3.$$

Оскільки

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad (1.24)$$

вектор \overline{OQ} лежить в площині, що проходить через початок координат і рівнонахилений до осей головних напружень, рівняння якої

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

Цю площину називають девіаторною, оскільки будь-який вектор, що лежить в ній, характеризує девіатор якогось напруженого стану. Проекції осей σ_1 , σ_2 , σ_3 на девіаторну площину позначимо відповідно через $1'2'3'$ (рис. 1.7). Очевидно, що вони складають між собою кути 120° . Вектор \overline{OR} , проекції якого на вісі координат однакові, направлений по нормалі v (рис. 1.6) до девіаторної площини. Направляючі косинуси цієї нормалі дорівнюють $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а одиничний

вектор її $\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3)$, і тому

$$\overline{OR} = \sigma_0 \sqrt{3} \bar{n}.$$

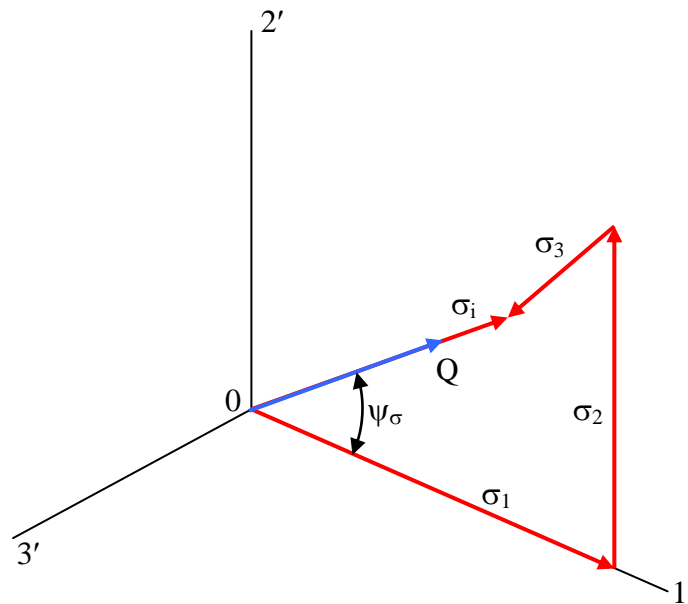


Рис. 1.7. Проекції осей σ_1 , σ_2 і σ_3 на девіаторну площину і діаграма Марциняка для напружень

Модуль вектора OQ:

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}.$$

Підвівши рівність (1.24) до квадрату, отримаємо

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0,$$

звідки

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = -2(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1).$$

Отже, згідно формулі (1.13)

$$I_2(D_\sigma) = \frac{|\overline{OQ}|^2}{2}$$

і тому

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} |\overline{OQ}|}. \quad (1.25)$$

Надаї [2] показав, що інтенсивність напружень пропорційна так званому октаедричному дотичному напруженню, тобто дотичному напруженню в площадці, рівнонахилений до трьох головних осей – октаедричній площадці.

Величина останнього

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

В. В. Новожилов [3] встановив, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із середнього значення квадратів дотичних напружень в точці тіла. Для того щоб пояснити це положення, опишемо навколо точки тіла сферу радіуса r . Нормаль ν до довільної площадки перетинає поверхню сфери в певні точки. Виділимо навколо неї елемент $d\Omega$ поверхні сфери. Дотичне напруження в цій площадці позначимо τ_ν . Добуток $\tau_\nu d\Omega$ є елементарною дотичною силою по площадці $d\Omega$. З метою виключення знаку дотичного напруження розглянемо замість величини $\tau_\nu d\Omega$ вираз $\tau_\nu^2 d\Omega$. Визначимо середнє значення квадратів дотичних напружень τ_c^2 наступним чином:

$$\tau_c^2 = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \tau_\nu^2 d\Omega. \quad (1.26)$$

Ця величина залежить від форми виділеного елемента і від його орієнтації по відношенню до головних осей тензора напружень. Вибір сфери пояснюється тим, що тільки на сфері (з огляду її повної симетрії) буде в рівній мірі представлена вся множина площадок, що проходять через точку.

В результаті розрахунку інтегралу в співвідношенні (1.26) можна встановити [3], що

$$\tau_c^2 = \frac{1}{15} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Зіставляючи цей вираз із співвідношенням (1.21), заключаємо, що сформульоване вище положення доведено.

С. Д. Пономарьовим [4] показано, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із мінімального середнеквадратичного ухилення головних напружень заданого напруженого стану $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, від напружень σ певного рівноосного напруженого стану. Позначимо цю величину через Δ :

$$\Delta = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2] \quad (1.27)$$

Визначимо напруження σ рівноосного напруженого стану таким чином, щоб ухилення Δ мало мінімальне значення. Такий рівноосний напружений стан будемо називати «найближчим» до заданого.

Для визначення напружень «найближчого» до заданого рівноосного напруженого стану прирівняєм нулю похідну виразу (1.25) по σ :

$$\frac{d\Delta}{d\sigma} = -\frac{2}{3} [(\sigma_1 - \sigma) + (\sigma_2 - \sigma) + (\sigma_3 - \sigma)] = 0$$

звідки

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Оскільки друга похідна виразу (1.27) по σ додатна, знайдене значення $\sigma = \sigma_0$ відповідає мінімуму виразу (1.27).

Підстановка знайденого значення σ в вираз (1.27) приводить до наступної величини мінімального середньоквадратичного ухилення:

$$\Delta_{\min} = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (1.28)$$

Зіставляючи вирази (1.28) і (1.21), заключаємо, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із мінімального середньоквадратичного ухилення.

В роботі В. М. Макушина [5] відмічено, що інтенсивність напружень пропорційна квадратному кореню із суми площ трьох окружностей, що обмежують кругову діаграму.

1.6. Геометричне зображення напруженого стану

Геометричним уявленням напруженого стану в точці тіла може слугувати так званий еліпсоїд напружень. Напівосями його є головні напруження σ_1 , σ_2 і σ_3 (рис.1.8). Поверхня еліпсоїда є геометричним місцем кінців векторів повних напружень в різних площадках, які проходять через точку, що розглядається. Із еліпсоїду напружень випливає екстремальність головних напружень, тобто одно із головних напружень є найбільшим, а інше найменшим із всіх нормальних напружень на площадках, які проходять через точку, що розглядається.

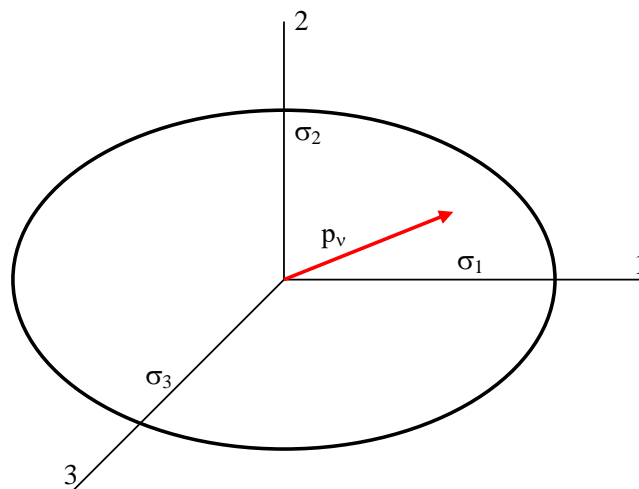


Рис. 1.8. Еліпсоїд напружень

В окремому випадку усестороннього рівного розтягу або стиску (рис. 1.5, б) еліпсоїд напружень перетворюється в кулю. Звідси і назва тензору напружень для такого напруженого стану – шаровий тензор.

Еліпсоїд напружень є просторовим геометричним уявленням напруженого стану. На відміну від нього кругова діаграма напружень, або діаграма Мора, є плоске геометричне уявлення напруженого стану.

Кругова діаграма напружень складається із трьох напівкол, діаметрами яких є різниці головних напружень (рис. 1.9). Координати точок, що лежать в заштриховані області між напівколами, є нормальним і дотичним напруженням в довільно орієнтованих площадках, а координати точок на напівколах I, II і III (рис. 1.9) дорівнюють нормальному і дотичному напруженням у зв'язках площадок I, II і III (рис. 1.10), що проходять через головні вісі 1, 2 і 3. Із кругової діаграми напружень, так як і з еліпсоїду напружень, випливає екстремальність головних напружень. Із кругової діаграми напружень встановлюємо також, що екстремальні значення дотичних напружень в серіях площадок, які проходять через головні вісі 1, 2 і 3 рівні відповідно:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.29)$$

Ці екстремальні значення дотичних напружень називають *головними дотичними напруженнями*. Площинки, в яких виникають головні дотичні напруження, ділять навпіл прямі кути між головними площадками. Оскільки раніше було прийнято, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = |\tau_2| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.30)$$

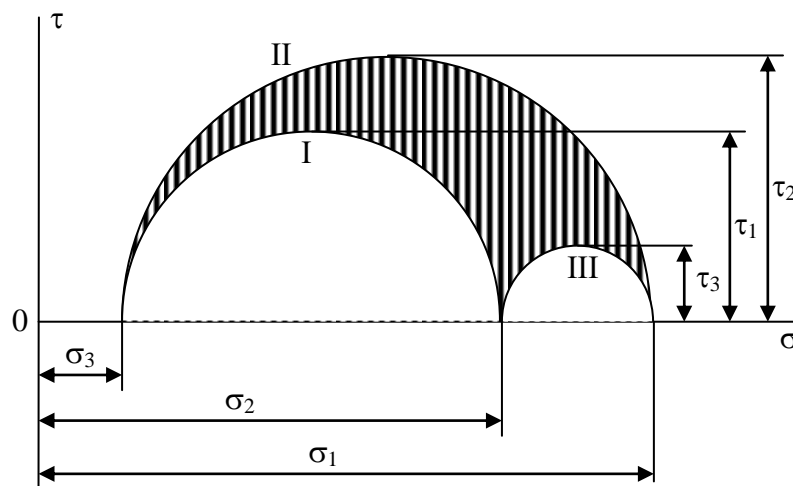


Рис. 1.9. Кругова діаграма напружень

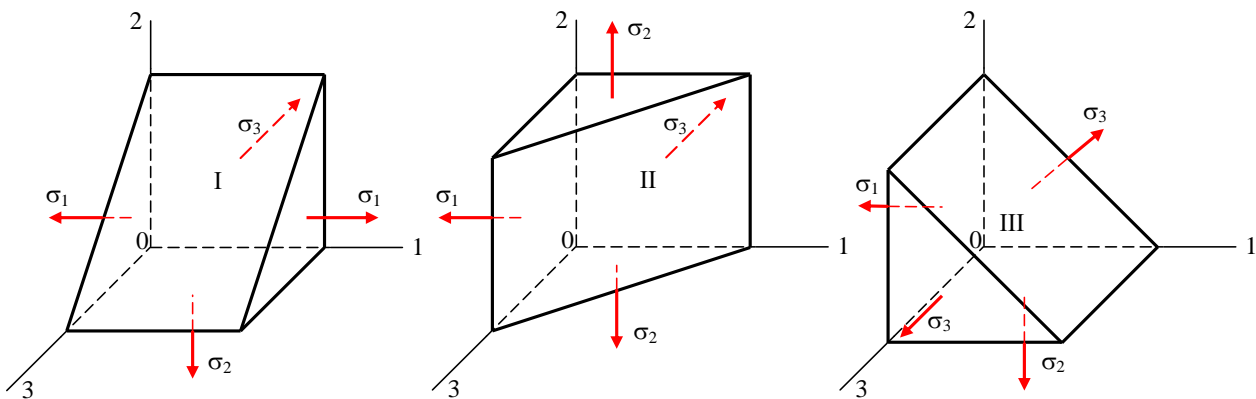


Рис. 1.10. Площинки, паралельні головним осям

У випадку рівноосного розтягу або стиску (див. рис. 1.5, б) всі три напівкола кругової діаграми стягуються в точку (рис. 1.11). Це означає, що для такого напруженого стану у всіх площадках, що проходять через початкову точку, дотичні напруження дорівнюють нулю, тобто всі площадки є головними. Як буде встановлено нижче, утворення пластичних деформацій пов'язано з виникненням зсувів і, отже, при наявності дотичних напружень. Тому природно, що, як відмічалось вище, при рівноосному розтягу або стиску пластичні деформації не виникають.

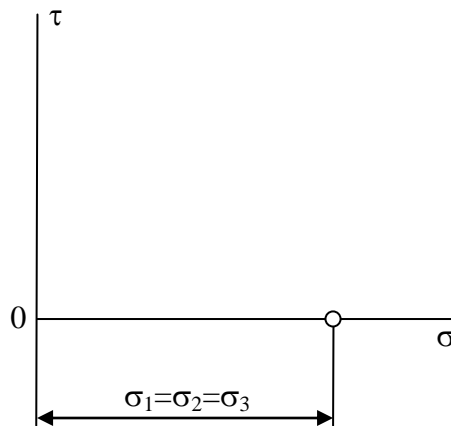


Рис. 1.11. Кругова діаграма напружень для трьохосного рівного розтягу

Розглянемо параметр, що характеризує з точністю до рівноосного розтягу або стиску вид напруженого стану. Він пов'язаний з головними напруженнями наступною залежністю:

$$\chi_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (1.31)$$

Цей параметр був вперше введений в експериментальні роботи Лоде [6], виконані під керівництвом Надаї, і тому його називають параметром Надаї-Лоде для напружень. Із формули (1.31) випливає, що при накладанні на напружений стан рівноосного розтягу або стиску параметр Надаї-Лоде не змінюється.

Згідно формули (1.31) для одноосного розтягу ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) $\chi_{\sigma} = -1$, для одноосного стиску ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$) $\chi_{\sigma} = 1$, для чистого зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$) $\chi_{\sigma} = 0$. Кругові діаграми називають подібними, якщо параметри Надаї-Лоде однакові.

ЛЕКЦІЯ 2

2. Теорія деформацій

2.1. Деформований стан в точці тіла

Припустимо, що певна точка M (рис. 2.1) тіла в результаті його деформації переміщується в положення M_1 . Позначимо проекції переміщення точки M на вісі координат через u_x , u_y і u_z . У випадку, коли компоненти деформацій малі порівняно з одиницею, а кути повороту [1, 4] малі настільки, що квадратами і добутками їх порівняно з компонентами деформації можна знехтувати, останні пов'язані з компонентами переміщення лінійними залежностями:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

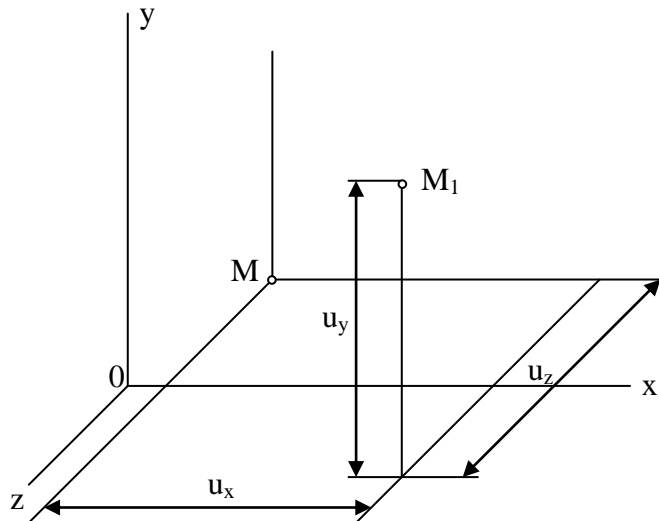


Рис. 2.1. Переміщення точки тіла в результаті деформації

В подальшому, якщо не буде обумовлено, будемо вважати, що компоненти деформацій малі порівняно з одиницею, а компоненти переміщення малі порівняно з основними розмірами тіла.

В курсах теорії пружності [2, 4] доводиться, що при повороті прямокутних осей координат компоненти деформації змінюються так і компоненти

напруження. Співставлення відповідних формул для компонентів деформації і напруження показує, що перші можна отримати із других заміною компонентів напруження σ і τ компонентами деформації ε і $\frac{\gamma}{2}$ з відповідними індексами.

Шість компонентів деформації ε_x , ε_y , ε_z , $\frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\frac{\gamma_{yz}}{2}$, $\frac{\gamma_{zx}}{2}$ утворюють тензор деформації:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

При використанні тензорної символіки загальний компонент тензора деформації має вид ε_{ij} ($i, j=1, 2, 3$), причому $\varepsilon_{11}=\varepsilon_x$, $\varepsilon_{22}=\varepsilon_y$, $\varepsilon_{33}=\varepsilon_z$, $\varepsilon_{12}=\frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\varepsilon_{23}=\frac{\gamma_{yz}}{2}$, $\varepsilon_{31}=\frac{\gamma_{zx}}{2}$.

Залежності компонентів деформації від компонентів переміщення (2.1) в скороченому запису мають вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.3)$$

2.2. Умови сумісності деформацій

Із залежностей (2.1) витікає, що шість компонентів деформації виражаються через частинні похідні від трьох компонентів переміщення по координатам x , y і z . Отже, вони не є незалежними функціями цих координат. Між ними повинні існувати залежності, які називають умовами сумісності деформацій.

Пояснимо висловлене положення. Уявимо собі деформуємо тіло ніби складеним із елементарних паралелепіпедів. Якщо тепер кожен паралелепіпед піддати довільній деформації так, що компоненти деформації не будуть між собою пов'язані, а потім намагатися скласти деформовані елементи, то це виявиться неможливим. Між певними елементами утворюються зазори, для інших елементів не буде місця, і деформовані елементи в цьому випадку буде неможливо об'єднати в безперервне тіло.

Для того щоб отримати умови сумісності деформацій, необхідно з рівнянь (2.1) виключити компоненти переміщення u_x , u_y і u_z . Опустивши перетворення, приведені в курсах теорії пружності [2, 4], маємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}; \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Ці співвідношення є умовами сумісності деформацій. В скороченому тензорному запису вони мають вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

2.3. Розкладення тензора деформацій

Аналогічно загальному випадку напруженого стану загальний випадок деформованого стану, що характеризується тензором деформацій T_ε (2.2), можна представити у вигляді суми двох деформованих станів.

Перший деформований стан характеризується шаровим тензором

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{Bmatrix},$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}, \quad (2.5)$$

а друге девіатором

$$D_\varepsilon = \begin{Bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{Bmatrix},$$

причому

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \varepsilon_x - \varepsilon_0; & e_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2}; \\ e_y &= \varepsilon_y - \varepsilon_0; & e_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{2}; \\ e_z &= \varepsilon_z - \varepsilon_0; & e_{zx} &= \frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

В скороченому тензорному запису компоненти девіатора деформацій можна записати у виді

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0,$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Таким чином,

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon_0} + D_\varepsilon.$$

Із формули (2.6) заключаємо, що

$$e_x + e_y + e_z = 0, \quad (2.7)$$

тобто в другому деформованому стані зміна об'єму дорівнює нулю.

Таким чином, в першому деформованому стані змінюється об'єм (форма не змінюється), а в другому – форма (зміна об'єму дорівнює нулю), в той час як в початковому деформованому стані змінюється як об'єм, так і форма.

Виконаний розділ деформованого стану має певний фізичний зміст, оскільки виникнення пластичних деформацій в матеріалі пов'язано з утворенням зсувів і, отже, зі зміною форми елементарного об'єму. При усесторонніх рівних розтягах або стисках пластичні деформації не виникають.

Девіатор деформацій показує, наскільки досліджуваний деформований стан ухиляється від усестороннього рівного розтягу з головними лінійними деформаціями, рівними середньому арифметичному лінійних деформацій початкового деформованого стану.

2.4. Головні осі і головні деформації

В кожній точці деформованого тіла існують три взаємно перпендикулярні вісі, для яких компоненти кутової деформації дорівнюють нулю і, отже, кут між цими осями при деформації не змінюється. Ці вісі називають *головними осями деформації* і позначають цифрами 1, 2, 3. Лінійні деформації в напрямку цих осей називають *головними лінійними деформаціями* і позначають: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Головні лінійні деформації є коренями кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 - I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0. \quad (2.8)$$

Оскільки головні деформації не можуть залежати від вибору осей координат, то коефіцієнти кубічного рівняння також не змінюються при повороті осей координат, тобто є інваріантами. Їх називають відповідно першим, другим і третім інваріантами тензора деформацій і визначають наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{\gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz}^2}{4} + \frac{\gamma_{zx}^2}{4}; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Очевидно, що вирази інваріантів тензора деформацій через головні деформації мають вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Отримаємо тепер другий і третій інваріанти девіатора деформацій. [Перший інваріант девіатора деформацій згідно формули (2.7) дорівнює нулю]. Для цього підставимо в формули (2.9) компоненти девіатора деформацій (2.6), використовуючи при цьому співвідношення (2.5). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} I_2(D_\varepsilon) &= -e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} I_3(D_\varepsilon) &= \begin{vmatrix} e_x & e_{xy} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{yz} & e_z \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \left[2(\varepsilon_x^3 + \varepsilon_y^3 + \varepsilon_z^3) - \right. \\ &- 3(\varepsilon_x^2 \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y^2 + \varepsilon_y \varepsilon_z^2 + \varepsilon_z \varepsilon_x^2) + 12 \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \\ &+ \frac{9}{4} \varepsilon_x (\gamma_{xy}^2 - 2\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) + \frac{9}{4} \varepsilon_y (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 - 2\gamma_{zx}^2) + \\ &\left. + \frac{9}{4} \varepsilon_z (-2\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) + \frac{27}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вирази для інваріантів тензорів і девіаторів деформації в скороченому тензорному запису можна отримати аналогічно формулам (1.12) і (1.15) в теорії напружень.

2.5. Інтенсивність деформацій

По аналогії з інтенсивністю напружень *інтенсивністю деформацій називають величину, пропорційну квадратному кореню із другого інваріанта девіатора деформацій*. В залежності від прийнятого коефіцієнту пропорційності

розрізняють поняття інтенсивності лінійних деформацій або просто інтенсивності деформацій

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3} I_2(D_\varepsilon)} \quad (2.13)$$

і інтенсивності кутових деформацій

$$\Gamma = \sqrt{4 I_2(D_\varepsilon)}. \quad (2.14)$$

Зіставляючи вирази (2.13) і (2.14), заключаємо, що

$$\varepsilon_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}. \quad (2.15)$$

Підставимо в формулу (2.13) співвідношення (2.11). Тоді отримаємо

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (2.16)$$

Аналогічно формулі (1.20) можна отримати скорочений запис інтенсивності деформацій

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij}. \quad (2.17)$$

Залежність інтенсивності деформацій від головних лінійних деформацій має вид

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (2.18)$$

Для окремого випадку одноосного розтягу ізотропного матеріалу ($\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon - 3\varepsilon_0}{2}$) по формулі (2.18) отримаємо

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \varepsilon_0. \quad (2.19)$$

Для окремого випадку зсуву ізотропного матеріалу ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xy} = \gamma$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) із формули (2.16) маємо

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}. \quad (2.20)$$

Із формул (2.15) і (2.20) витікає, що інтенсивність кутових деформацій Γ співпадає з величиною найбільшої кутової деформації при чистому зсуві

$$\Gamma = \gamma.$$

Аналогічно формулі (2.16) інтенсивність пластичних деформацій визначається виразом

$$\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2}[(\gamma_{xy}^p)^2 + (\gamma_{yz}^p)^2 + (\gamma_{zx}^p)^2]}. \quad (2.21)$$

або в скороченому тензорному запису

$$\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij}^p e_{ij}^p. \quad (2.22)$$

Так як і в теорії напружень, можна довести, що інтенсивність деформацій пропорційна квадратному кореню із мінімального середньоквадратичного ухилення деформованого стану, що розглядається, від найближчого до нього усестороннього рівного розтягу або стиску.

Можна також довести [3, 4], що середня лінійна деформація дорівнює лінійні деформації в напрямку, який складає рівні кути з трьома головними осями, а інтенсивність деформацій пропорційна максимальні кутові деформації між цим напрямком і напрямком, перпендикулярним до нього:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Цю величину називають октаедричною кутовою деформацією.

2.6. Геометричне зображення деформованого стану

Продовжуючи розвивати аналогію між деформованим і напруженим станами, можна заключити, що геометричним уявленням деформованого стану в точці тіла в просторі є еліпсоїд деформації, а на площині – кругова діаграма деформацій (рис. 2.2).

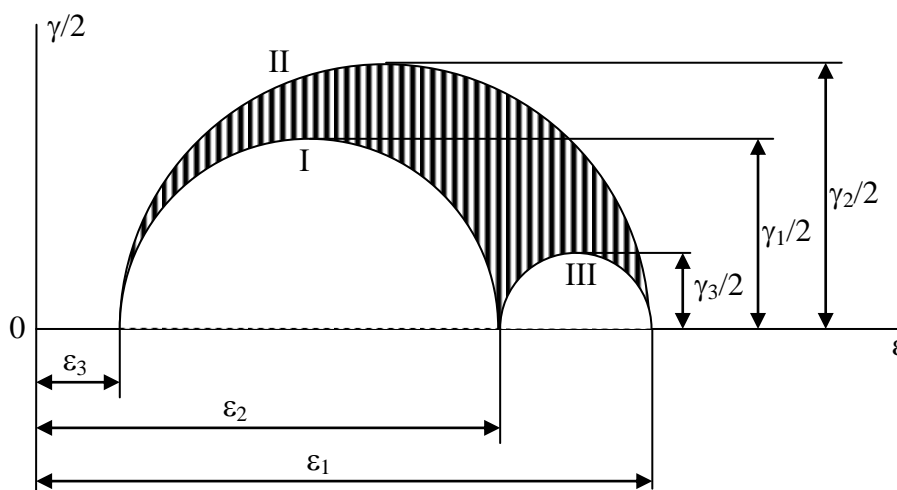


Рис. 2.2. Кругова діаграма деформацій

В останньому випадку по вісі абсцис відкладають лінійні деформації, а по вісі ординат – половини кутових деформацій. Координати точок, що лежать на напівколах I, II, III, рівні лінійним деформаціям і половинам кутових деформацій по напрямкам, які лежать в головних площинах 23, 31 і 12 відповідно.

Будь яка із точок, що лежать всередині області, обмеженої трьома колами діаграми, своїми координатами визначають лінійну і половину кутової деформації в напрямках, які не лежать в головних площинах.

Із кругової діаграми витікає, що одна із головних лінійних деформацій є найбільшою, а інша – найменшою із всіх лінійних деформацій біля точки, що досліджується. Далі на підставі кругової діаграми можна також заключити, що найбільші кутові деформації мають місце для напрямків, які лежать в головних площинах і складають кут 45° з головними осями.

Ці найбільші кутові деформації, які називаються *головними кутовими деформаціями*, дорівнюють різниці головних лінійних деформацій:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (2.23)$$

По аналогії із відповідною величиною для напружень (1.31) параметр Надаї-Лоде для деформацій має вид

$$\chi_\varepsilon = 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} - 1 = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \quad (2.24)$$

він характеризує вид деформованого стану з точністю до рівноосного розтягу або стиску.

Згідно формули (2.24) для одноосного розтягу ($\varepsilon_2=\varepsilon_3$) $\chi_\varepsilon=-1$, для одноосного стиску ($\varepsilon_1=\varepsilon_2$) $\chi_\varepsilon=1$, для чистого зсуву ($\varepsilon_1=-\varepsilon_3$, $\varepsilon_2=0$) $\chi_\varepsilon=0$.

Зіставляючи ці величини параметрів Надаї-Лоде по деформаціям з відповідними величинами параметрів Надаї-Лоде по напруженням заключаємо, що вони однакові, тобто кругові діаграми напружень і деформацій для цих напружених станів подібні.

2.7. Прирошення деформацій

Припустимо, що під час нескінченно малого проміжку часу dt компоненти переміщення певної точки тіла u_i зростають на

$$du_i = v_i dt, \quad (2.25)$$

де v_i – компоненти швидкості переміщення точки.

Розрахуємо по формулам (2.1) нескінченно малі природження компонент деформацій $d\varepsilon_{ij}$. Тоді отримаємо

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right]. \quad (2.26)$$

Ці величини утворюють тензор нескінченно малих природжень деформацій $d\varepsilon_{ij}$ або

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x & \frac{d\gamma_{xy}}{2} & \frac{d\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{d\gamma_{xy}}{2} & d\varepsilon_y & \frac{d\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{d\gamma_{zx}}{2} & \frac{d\gamma_{yz}}{2} & d\varepsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (2.27)$$

Аналогічно тому, як це було зроблено для деформацій, тепер можна визначити інтенсивність природжень деформацій

$$\overline{d\varepsilon_i} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)}. \quad (2.28)$$

або інтенсивність природжень пластичних деформацій

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2}[(d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\gamma_{yz}^p)^2 + (d\gamma_{zx}^p)^2]}. \quad (2.29)$$

В скороченому тензорному запису

$$\overline{d\varepsilon_i} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}}; \quad \overline{d\varepsilon_i^p} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}. \quad (2.30)$$

Інтенсивність природжень деформацій $\overline{d\varepsilon_i}$ не дорівнює природженню інтенсивності $d\varepsilon_i$, чим і пояснюється введення риси в позначення для інтенсивності природження деформацій.

Як і раніше, можна побудувати кругову діаграму для приращень деформацій, а також визначити параметр Надаї-Лоде

$$\chi_{d\varepsilon} = 2 \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} - 1 \quad (2.31)$$

Компоненти приращення деформацій можна виразити через *кут виду приращення деформацій* $\psi_{d\varepsilon}$ і дати графічну інтерпретацію у вигляді діаграми Мора, зірки Пелчинського або діаграми Марциняка для приращень деформацій.

В формулах (2.26) приращення компонентів деформацій розраховують по відношенню до поточного (миттєвого) стану. В окремому випадку одноосного однорідного розтягу стержня приращення осевої деформації

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l},$$

де l – поточна довжина стержня; dl – нескінченно мала її зміна.

Сумування приводить до так званої логарифмічної деформації:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.32)$$

де l_0 – довжина стержня до деформації; Δl – видовження, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – звичайна деформація стержня.

На рис. 2.5 представлений графік залежності (2.32), з якого витікає, що при $\varepsilon < 20\%$ різниця між логарифмічною і звичайною деформаціями незначна. При $\varepsilon = 20\%$ вона складає 10%.

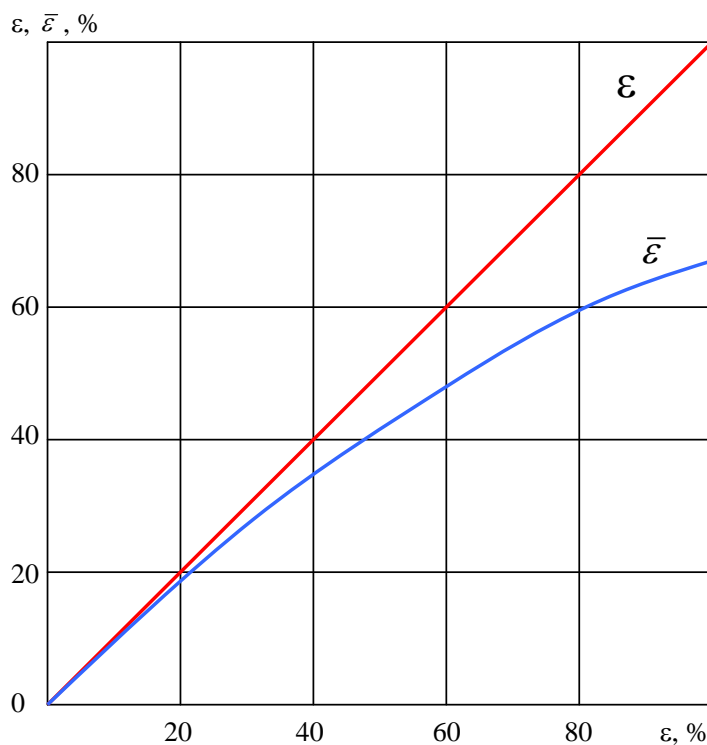


Рис. 2.5. Графік залежності логарифмічної деформації від деформації

Оскільки значення звичайної деформації, при якій утворюється шийка, як правило, не перевищує 10-15%, до утворення шийки логарифмічну деформацію наближено можна вважати рівною звичайній.

В загальному випадку інтеграли $\int d\epsilon_{ij}$ можна розрахувати, якщо відомий шлях деформування, тобто якщо відомі компоненти прирощень деформацій в функції певного параметру, що характеризує процес деформування. Якщо головні вісі деформації при деформуванні не обертаються, то ці інтеграли дорівнюють логарифмічним деформаціям.

2.8. Швидкості деформацій

Підставивши вирази (2.25) у співвідношення (2.26), приходимо до висновку, що компоненти нескінченно малих прирощень деформацій мають спільний множник dt . Розділивши їх на цей множник, отримаємо компоненти швидкостей деформацій ξ_{ij} , пов'язані з компонентами швидкості переміщення v_i співвідношеннями

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]. \quad (2.33)$$

Ці величини утворюють тензор швидкостей деформацій ξ_{ij} або

$$T_\xi = \begin{Bmatrix} \xi_x & \frac{\eta_{xy}}{2} & \frac{\eta_{zx}}{2} \\ \frac{\eta_{xy}}{2} & \xi_y & \frac{\eta_{yz}}{2} \\ \frac{\eta_{zx}}{2} & \frac{\eta_{yz}}{2} & \xi_z \end{Bmatrix}. \quad (2.34)$$

По аналогії з інтенсивностями деформацій і прирощень деформацій можна визначити інтенсивність швидкостей деформацій

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2}(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)}. \quad (2.35)$$

або в скороченому тензорному запису

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{3} (\xi_{ij} - \delta_{ij} \xi_0) (\xi_{ij} - \delta_{ij} \xi_0)}.$$

Якщо $\xi_0=0$, то

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} \quad (2.36)$$

Далі, так як і раніше, можна побудувати кругову діаграму для швидкостей деформацій, визначити параметр Надаї-Лоде

$$\chi_\xi = 2 \frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} - 1, \quad (2.37)$$

виразити компоненти девіатора швидкостей деформацій через *кут виду швидкостей деформацій* ψ_ξ і дати графічну інтерпретацію у вигляді діаграми Мора, зірки Пелчинського або діаграми Марциняка для швидкостей деформацій.

ЛЕКЦІЯ 3

3. Залежності між деформаціями і напруженнями. Умови виникнення пластичних деформацій

Вид залежності (3.49) між інтенсивністю напружень та інтенсивністю деформацій можна встановити за діаграмою розтягу матеріалу. Розглянемо діаграму (рис. 3.3, а), що складається з прямолінійної Oa і криволінійної ab ділянок.

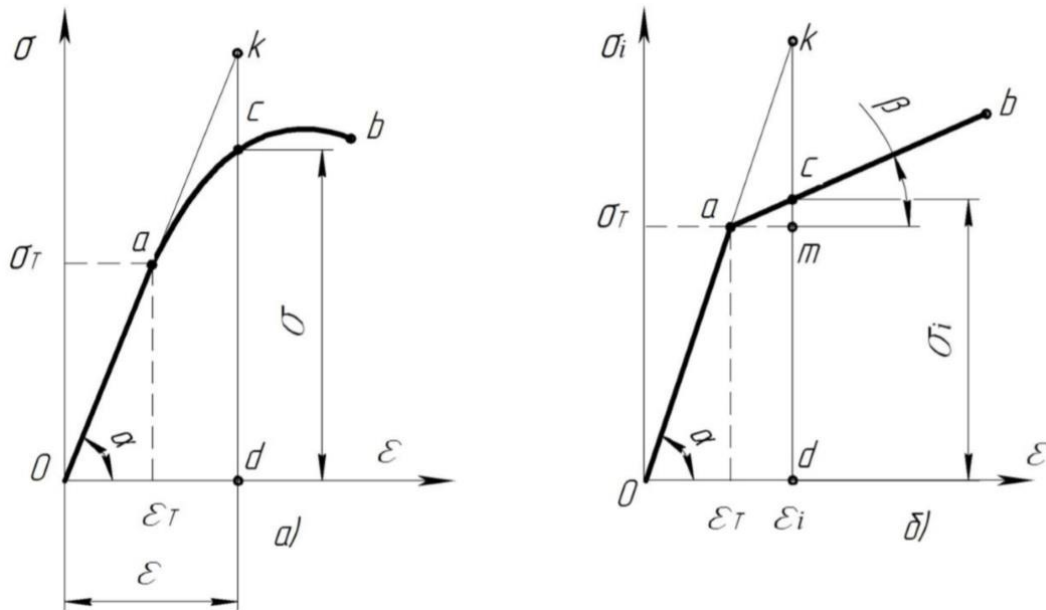


Рис. 3.3

Напруження в довільній точці c можна визначити як різницю відрізків

$$\sigma = kd - kc = \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha - kc. \quad (3.50)$$

Оскільки на діаграмі $\operatorname{tg} \alpha$ чисельно дорівнює модулю пружності E , то отримаємо

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - kc = E \cdot \varepsilon \left(1 - \frac{kc}{E \cdot \varepsilon} \right) = E \cdot \varepsilon \left[1 - \omega(\varepsilon) \right] \quad (3.51)$$

Де $\omega(\varepsilon)$ - функція зниження напруження за межею текучості (плинності) порівняно з напруженнями, отриманими в припущенні, що деформування відбувається за пружним законом

$$\omega(\varepsilon) = \frac{kc}{E \cdot \varepsilon} \quad (3.52)$$

Відповідно до третього закону теорії малих пружно-пластичних деформацій залежність (3.49) повинна мати такий же вигляд як при простому розтягу, тобто

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i \left[1 - \omega(\varepsilon_i) \right] \quad (3.53)$$

Розглянемо, який вигляд має функція $\omega(\varepsilon_i)$ для різних видів діаграми $\sigma_i - \varepsilon_i$.

Для діаграми, що складається з двох прямолінійних ділянок (рис. 3.3, б), за межею текучості (ділянка ab) отримаємо

$$kc = kd - md - cm = E \cdot \varepsilon_i - E \cdot \varepsilon_T - E'(\varepsilon_i - \varepsilon_T) \quad (3.54)$$

або

$$kc = (E - E') \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_T), \quad (3.55)$$

Де $E' = \tan \beta$

Тепер функція зниження напружень набуде такого вигляду

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{(E - E') \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_T)}{E \cdot \varepsilon_i} = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right) \quad (3.56)$$

Де λ - відносне зниження модуля пружності при переході в пластичну область

деформування $\lambda = \frac{E - E'}{E}$.

Отже, функція $\omega(\varepsilon_i)$ для діаграми (рис. 3.3, б) буде такою

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T \\ \omega &= \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right) && \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T \end{aligned} \quad (3.57)$$

Для ідеального пружно-пластичного матеріалу, який підкоряється діаграмі Прандтля (рис. 3.4, а), співвідношення (3.57) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T \\ \omega &= \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} && \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T \end{aligned} \quad (3.58)$$

Для матеріалу, діаграма якого не має прямолінійних ділянок (рис. 3.4, б), залежність $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ можна прийняти у степеневому вигляді

$$\sigma_i = \sigma_T \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} \right)^m \quad (3.59)$$

Де $0 < m < 1$

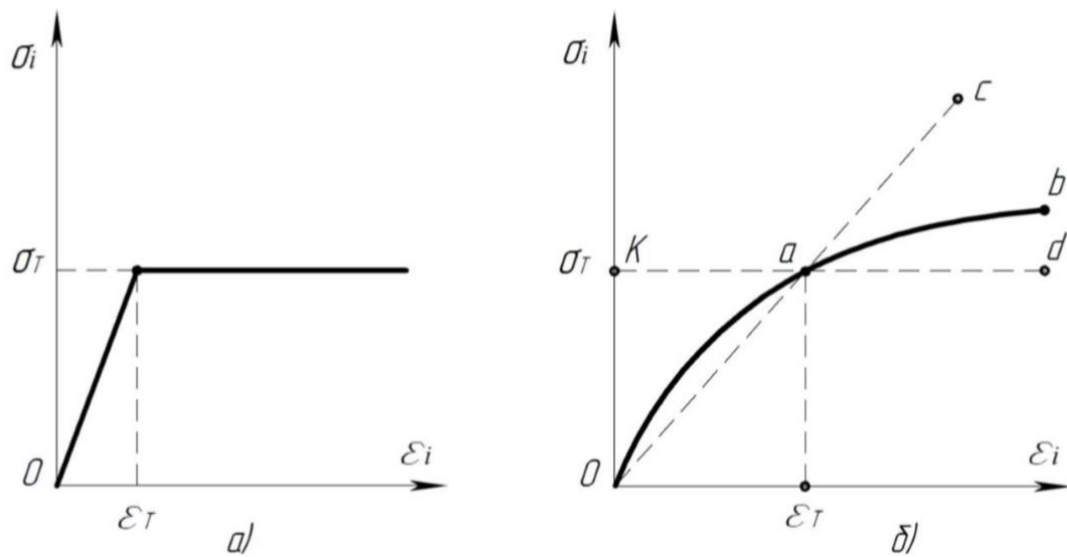


Рис. 3.4

При $m=1$ отримаємо закон деформування ідеально пружного тіла

$$\sigma_i = \sigma_T \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} = E \cdot \varepsilon_i \quad (3.60)$$

На рис. 3.4, б цьому закону відповідає штрихова лінія Oac.

При $m=0$ отримаємо закон деформування ідеально пластичного тіла

$$\sigma_i = \sigma_T \quad (3.61)$$

На рис. 3.4, б цьому закону відповідає штрихова лінія Kad

ЛЕКЦІЯ 4

Теорії пластичності

4. Основні визначення

Пластичність – це властивість матеріалу зазнавати залишкової деформації без порушень суцільності під дією навантаження. Теорія пластичності встановлює загальні закони утворення в твердих тілах пластичних деформацій і появу напружень, які діють на всіх стадіях пластичного деформування.

Теорія пластичності розглядає тіла, які не підкоряються властивостями пружності. Після усунення з таких тіл зовнішнього впливу вони не відновлюють первісну форму, тобто отримують залишкові деформації. Тіло, що не підкоряється законам пружності з самого початку навантаження, називають пластичним тілом. Діаграма розтягу такого тіла зображена на рис. 1.1а.

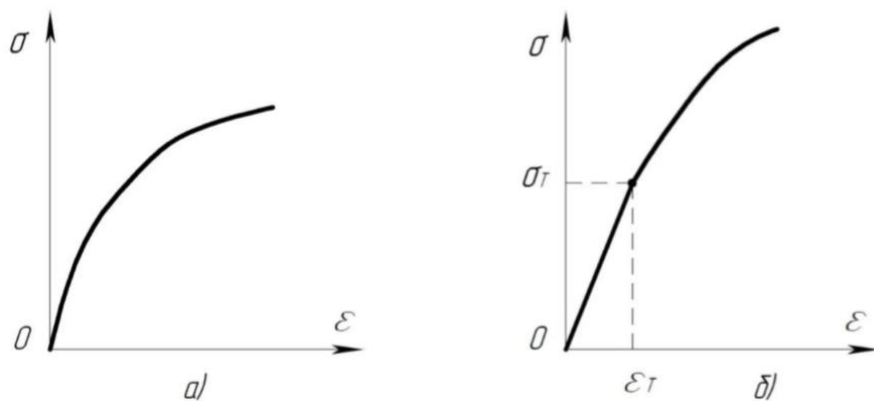


Рис. 3.1

Якщо ж тіло на початку навантаження має пружні властивості (ділянка Оа на рис 8.1б) і тільки з деякої стадії в ньому виникають залишкові деформації, то його називають пружно-пластичним тілом. У теорії пластичності розглядають два різні завдання: - вивчення процесу деформування тіл на всіх стадіях навантаження; - визначення тільки несучої здатності. Перше завдання відноситься до математичної теорії пластичності. У ній розглядають визначення напружень, деформацій і переміщень від заданого навантаження в будь-який момент навантаження, визначення границі між пружною і пластичною зонами, визначення залишкових напружень і деформацій при частковому і повному знятті навантаження.

Друге завдання відноситься до прикладної теорії пружності. У ній досліджують лише граничний стан тіла без вивчення проміжних стадій деформування. Закони пластичного деформування залежать від того, зростає або зменшується навантаження. Залежно від цього розрізняють два види деформації: активну і пасивну. Ці види деформування легко розмежувати при простому розтягустиску, чистому зсуві і чистому згині. Активною в цих випадках буде деформація, при якій напруження зростає за абсолютною величиною, а пасивною – при якій напруження зменшується за абсолютною величиною. При

складному напруженому стані активною називають деформацію, при якій в даний момент інтенсивність напружень σ_i

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (3.1)$$

має значення, що перевищує за абсолютною величиною всі попередні її значення. Пасивною в цьому випадку називають таку деформацію, при якій інтенсивність напружень за абсолютною величиною менша хоча б одного з попередніх її значень. При активній деформації пластична деформація зростає, при пасивній – залишається незмінною. Активну деформацію називають процесом навантаження, а пасивну – іноді розвантаженням. На закони пластичного деформування істотно впливає характер навантаження тіла. Розрізняють просте і складне навантаження. Простим називають такий процес навантаження, при якому зовнішні сили зростають пропорційно одному параметру. Така зміна навантажень забезпечує сталість напрямків головних напружень і деформацій в кожній точці тіла. Складним є таке навантаження, при якому зростання хоча б однієї з сил не відповідає пропорційне зростання інших сил.

4.1. Статичні, геометричні та фізичні рівняння

Як у теорії пружності, так і в теорії пластичності напружений стан у кожній точці тіла, що знаходиться під дією об'ємного і поверхневого навантаження, визначається шістьма складовими напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Ці напруження пов'язані трьома диференціальними рівняннями рівноваги Нав'є

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

а на поверхні тіла повинні задовольнятися умови

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k; \\ Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k; \\ Z_g &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Напружений стан у точці тіла також може бути охарактеризований трьома інваріантами

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ S_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

або

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ S_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ S_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Для дослідження напруженого стану використовують також такі інваріантні величини як інтенсивність дотичних напружень

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.6)$$

та інтенсивність нормальних напружень (3.1).

Деформований стан у точці тіла у теорії пластичності також визначають шістьма складовими деформацій, які пов'язані формулами Коші

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

з трьома складовими переміщень u , v , w .

Деформації повинні задовольняти шість рівнянь суцільності Сен-Венана

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогічно до головних напружень, що діють у теорії пружності, у теорії пластичності вводять поняття головних деформацій, тобто таких, у площині яких відсутні зсуви.

Кубічне рівняння, отримане для визначення головних деформацій $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ має коефіцієнти

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ E_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\ E_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Ці коефіцієнти є інваріантами деформованого стану.

Порівнюючи першу формулу залежностей (3.9) з виразом об'ємної деформації

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta \quad (3.10)$$

робимо висновок про те, що об'ємна деформація у теорії пластичності також є інваріантною величиною.

У теорії пластичності застосовують також інваріантну величину, яку називають – інтенсивність деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (3.11)$$

Інтенсивність деформацій – величина, пропорційна куту зсуву на октаедричній (рівнонахилений до координатних площин) площині.

Числовий коефіцієнт у (3.11) вибраний так, щоб при простому розтягу (стиску) та $\mu=0,5$ інтенсивність деформацій дорівнює лінійній деформації в напрямку розтягу (стиску). Фізичні рівняння, представлені в теорії пружності формулами закону Гука в прямій

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

і зворотній

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \nu \cdot \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \nu \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \nu \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

формі, для застосування в теорії пластичності необхідно перетворити. Віднімемо з обох частин першої формули (3.13) середнє напруження у точці σ_0

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1 \quad (3.14)$$

і отримаємо

$$\sigma_x - \sigma_0 = \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x - \sigma_0 \quad (3.15)$$

Постійні λ і ν

$$\lambda = \frac{\mu \cdot E}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu)}, \quad \nu = \frac{E}{2(1 + \mu)} = G, \quad (3.16)$$

які входять у рівняння (1.15), запишемо так

$$\lambda = \frac{2G \cdot \gamma}{1 - 2\mu}; \quad \nu = G. \quad (3.17)$$

З урахуванням постійних (3.17) і співвідношення $\Theta = 3\varepsilon_0$, підставимо (3.10) і модуль об'ємного розширення

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}, \quad (3.18)$$

та співвідношення між модулем зсуву, модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3.19)$$

у (3.15) і отримаємо

$$\sigma_x - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0). \quad (3.20)$$

Виконавши аналогічні перетворення з другою і третьою формулами закону Гука у зворотній формі для теорії пружності (3.13) приходимо до такої форми закону Гука для теорії пластичності

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= 2G \frac{\gamma_{xy}}{2}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= 2G \frac{\gamma_{yz}}{2}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= 2G \frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Складові деформацій $\varepsilon_x - \varepsilon_0, \varepsilon_y - \varepsilon_0, \varepsilon_z - \varepsilon_0, \frac{\gamma_{xy}}{2}, \frac{\gamma_{yz}}{2}, \frac{\gamma_{zx}}{2}$ відповідають зміні форми тіла, тому що зміна об'єму відсутня

$$\begin{aligned} \Theta' &= (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Отже, залежності (3.21) встановлюють зв'язок між напруженнями і деформаціями, які відповідають тільки зміні форми тіла. Формулами (3.21) відповідають еквівалентні їм співвідношення

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = 2G \quad (3.23)$$

які для головних напрямків мають такий вигляд

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = 2G \quad (3.24)$$

Якщо ввести поняття головних дотичних напружень і головних зсувів

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2};$$

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad (3.25)$$

то співвідношення (3.23) набуде вигляду

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = G. \quad (3.26)$$

Вираз (3.11) для інтенсивності деформацій перетворимо, замінюючи в ньому деформації напруженнями відповідно до (3.23)

$$\varepsilon_i = \frac{1}{3G\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.27)$$

Порівнюючи інтенсивність деформацій у теорії пластичності, описану залежністю (3.27), із залежністю для інтенсивності напружень у теорії пружності (3.1), отримаємо такі залежності

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{3G} \quad \text{або} \quad G = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \quad (3.28)$$

Враховуючи отримані співвідношення, закон Гука (3.21) у теорії пластичності можна записати у такому вигляді

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_0); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy};$$

$$\sigma_y - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_0); \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz};$$

$$\sigma_z - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_0); \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}. \quad (3.29)$$

Аналогічно можна перетворити формулу (3.26), тобто для головних дотичних напружень і головних зсувів

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \quad (3.30)$$

Співвідношення (3.29) і (3.30) є еквівалентними.

ЛЕКЦІЯ 5

5. Теорія течії

Умова пластичності – це умова можливості переходу матеріалу в даній точці тіла з пружного стану в пластичний.

Для лінійного напруженого стану $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, пластичні деформації виникають при

$$\sigma_1 = \sigma_T \quad (3.31)$$

Де σ_T - границя текучості (плинності) матеріалу – величина, яку встановлюють дослідним шляхом.

Умова для чистого зсуву має вигляд

$$\tau = \tau_T \quad (3.32)$$

Де τ_T - границя текучості (плинності) матеріалу при зсуві.

При плоскому і об'ємному напруженому стані умови пластичності встановлюють на основі гіпотез. Найчастіше використовують дві умови пластичності, які досить правильно визначають перехід матеріалу з пружного стану в пластичний.

Перша умова (умова пластичності Сен-Венана) ґрунтується на припущенні, що пластичні деформації виникають тоді, коли максимальні дотичні напруження досягають границі текучості при чистому зсуві

$$\tau_{\max} = \tau_T \quad (3.33)$$

З опору матеріалів відомо, що

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.34)$$

При лінійному напруженому стані маємо $\sigma_1 = \sigma_T$ і $\sigma_3 = 0$, тобто

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_T - 0}{2} = \frac{\sigma_T}{2} \quad (3.35)$$

Порівнюючи вираз (1.35) з (1.33), отримаємо

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2} \quad (3.36)$$

Відповідно першу умову пластичності отримують у такому вигляді

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T \quad (3.37)$$

Це співвідношення в опорі матеріалів відповідає третій теорії міцності – теорії найбільших дотичних напружень.

Друга умова (умова пластичності Губера-Мізеса-Генки) ґрунтується на припущенні, що пластичні деформації виникають тоді, коли інтенсивність дотичних напружень досягає деякої постійної для даного матеріалу величини

$$\tau_i = C \quad (3.38)$$

Постійну C знаходять за результатами випробувань при простому розтягу.

Початок пластичного деформування в цьому випадку буде при таких умовах

$$\sigma_1 = \sigma_T; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (3.39)$$

Підставляючи (1.39) у рівняння (1.6), отримаємо

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_T^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T \quad (3.40)$$

Порівнюючи (1.40) з (1.38), визначимо постійну

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_T \quad (3.41)$$

Підставляючи (3.6) і постійну C в (3.38), отримаємо другу умову пластичності в такому вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T \quad (3.42)$$

або відповідно до (3.1)

$$\sigma_i = \sigma_T \quad (3.43)$$

Ця умова відповідає четвертій теорії міцності опору матеріалів. Умови пластичності Сен-Венана і Губера-Мізеса-Генки дають близькі результати. Експерименти дещо краще підтверджують другу умову. Крім того, ця умова зручніша з математичної точки зору, тому що нормальні напруження і σ_i можна простіше записати через складові напружень, ніж максимальні дотичні напруження τ_{\max} . Тому в теорії пластичності частіше використовують умову Губера-Мізеса-Генки.

ЛЕКЦІЯ 6

6. Теорія малих пружно-пластичних деформацій

Існуючі теорії пластичності можна розділити на два види. До першого виду належать теорії пружно-пластичних деформацій, які ґрунтуються на рівняннях, що пов'язують напруження і деформації. Ці теорії, як правило, застосовують для розрахунку будівельних конструкцій.

До другого виду відносять теорії пластичної текучості, в основі яких лежать рівняння, що зв'язують напруження і швидкості деформацій. Теорії пластичної текучості застосовують у технологічній практиці.

Існує кілька суперечливих поглядів на механізм утворення пластичних деформацій. Дослідження О.А. Іллюшина дозволили усунути ці протиріччя. Він встановив, що при простому навантаженні і малих деформаціях всі відомі теорії пластичності є окремими випадками загальної теорії пластичності. Ця теорія – теорія малих пружнопластичних деформацій – досить достовірно описує деформування твердих тіл при малих пружних і пластичних деформаціях.

Теорія малих пружно-пластичних деформацій ґрунтується на таких законах, що випливають з експериментів.

Перший закон – закон зміни об'єму. При пружно-пластичних деформаціях твердого тіла, як активних, так і пасивних, об'ємна деформація завжди є пружною і підкоряється закону Гука

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta \quad (3.44)$$

У теорії пластичності зазвичай використовують припущення про нестискуваність матеріалу. В цьому випадку

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad (3.45)$$

тому що σ_0 при цьому не дорівнює нулю, відповідно модуль об'ємного розширення K має дорівнювати нескінченності

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \infty \quad (3.46)$$

Звідси випливає значення коефіцієнта Пуассона

$$\mu = 0,5 \quad (3.47)$$

Отже, між модулем зсуву G і модулем пружності E у теорії пластичності є таке співвідношення

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2(1+0,5)} = \frac{E}{3} \quad (3.48)$$

Другий закон – закон зміни форми. При активних пружнопластичних деформаціях, що виникають в умовах простого навантаження, головні осі напружень і деформацій співпадають і відношення головних дотичних напружень до відповідних зсувів для даного елемента тіла постійні, тобто справедливі співвідношення (3.30).

Ці співвідношення можуть бути замінені еквівалентними їм формулами (3.29). Тут необхідно врахувати, що шість формул (3.30) не є незалежними. Дійсно, складаючи перші три з них, отримаємо тотожність $0=0$. Отже, формули (3.29) дають систему п'яти рівнянь з шістьма невідомими.

Третій закон: інтенсивність напружень σ_i для даного матеріалу при активній деформації є функцією інтенсивності деформацій ε_i

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i) \quad (3.49)$$

Як показують експерименти, в умовах простого навантаження діаграма $\sigma_i - \varepsilon_i$ для будь-якого напруженого стану подібна діаграмі $\sigma - \varepsilon$ при розтягу (рис. 3.2). Отже, між σ_i та ε_i існує залежність, подібна залежності між σ і ε при розтягу

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (3.50)$$

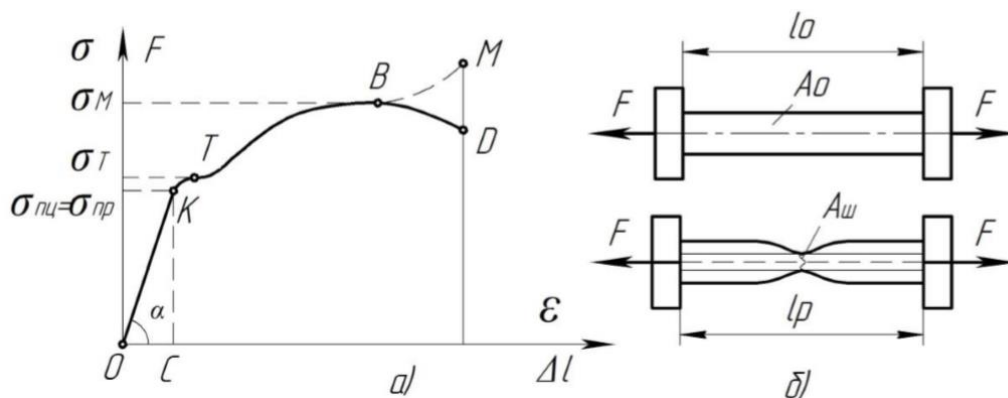


Рис. 3.2

Отже, залежність $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ для будь-якого напруженого стану можна встановити з дослідів при розтягу.

Аналіз експериментів і рішення часткових завдань теорії пластичності підтверджує, так звану, теорему О.А. Іллюшина про просте навантаження: теорія малих пружно-пластичних деформацій дає правильні (узгоджені з експериментом) результати у тому випадку, коли процес навантаження тіла є простим.

6.1. Теорема про розвантаження

Розвантаження всього тіла – це процес зміни зовнішніх сил, при якому у всіх областях тіла, де сталася пластична деформація, інтенсивність напружень починає спадати одночасно. Це означає, що тіло зі стадії активної деформації переходить в стадію пасивної деформації. О.А. Іллюшин сформулював і довів теорему про розвантаження: переміщення точки тіла в деякий момент стадії розвантаження відрізняються від їх значень у момент початку розвантаження на величини пружних переміщень, які виникли б у тілі, якби в природному (ненавантаженому) стані до нього були прикладені зовнішні сили, які дорівнюють різниці зовнішніх сил, що діють у зазначені моменти. Це твердження стосується також деформацій і напружень.

Завдяки цій теорії використовують такий порядок визначення напружень, деформацій і переміщень при розвантаженні:

- з рівнянь теорії пластичності визначають напруження, деформації та переміщення, які виникають при найбільшому навантаженні, що діє до початку розвантаження;

- з рівнянь теорії пружності визначають напруження, деформації та переміщення, що спричиняються навантаженнями, які дорівнюють різниці між найбільшими навантаженнями до початку розвантаження і навантаженнями, що залишилися після розвантаження;

- отримують напруження, деформації та переміщення у розглядуваний момент розвантаження як різницю між їх значеннями. Ці значення відповідають найбільшому навантаженню, і значенням, знайденими за величинами навантажень, на які відбулося розвантаження.

6.2. Постановка задачі теорії пластичності

У теорії пластичності маємо 17 невідомих, які є функціями координат x , y , z .

- шість складових напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- шість складових деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- три складових переміщень u, v, w
- інтенсивність напружень σ_i
- інтенсивність деформацій ε_i

Для визначення цих невідомих є 17 рівнянь

- три диференціальних рівняння рівноваги (3.2)
- шість фізичних рівнянь закону Гука (3.29), причому тільки п'ять з них є незалежними. Як шосте рівняння беруть закон зміни об'єму (3.44)
- шість формул Коші (3.7)
- залежність між інтенсивністю напружень і деформацій (3.49)
- вираз для інтенсивності деформацій (3.11)

Отже, при активній деформації і простому завантаженні завдання має математичне рішення. Однак, практично отримати його важко, тому що основні співвідношення виражені диференціальними рівняннями в частинних похідних, притому нелінійними.

Для матеріалу з слабо вираженим зміцненням дійсну діаграму деформування можна замінити діаграмою ідеального пружно-пластичного тіла (рис. 3.4, а). Тоді замість шести фізичних рівнянь (3.29) можна взяти одну з умов пластичності, наприклад (3.61). При такій заміні можна однозначно визначити деформації для тіла, яке повністю знаходиться в пластичному стані. Однозначне рішення в цьому випадку можна отримати тільки тоді, коли в тілі поряд з пластичними є і пружні зони.

При вирішенні задачі теорії пластичності можуть бути використані ті ж способи, що і в теорії пружності: рішення в напружених, рішення в переміщеннях і змішане рішення.

Математичне рішення задачі може бути отримано тими ж методами, що і в теорії пружності: прямим, зворотним і напівзворотним. Ефективним є наближений метод пружних рішень, запропонований О. А. Іллюшиним.

ЛЕКЦІЯ 7

7. Поняття повзучості і релаксації напружень

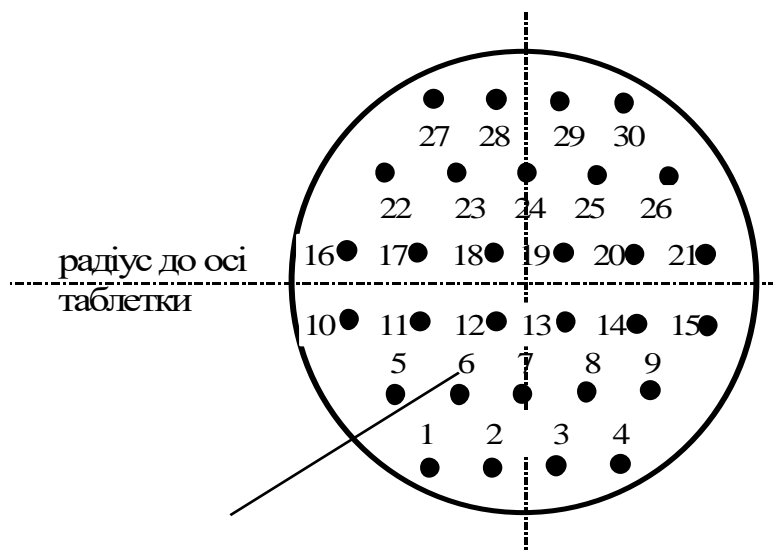
Для дослідження повзучості зразки вирізали із циліндрів-заготовок (див. рис. 5.3.). Вертикальні із заготовок 5, 2С, 3К; тангенціальні – із заготовок 2, 3С, 2К; радіальні – із заготовок 1, 4, 1С, 1К.

Вертикальні зразки вирізали із верхньої, центральної, а для заготовки 5 – із нижньої частини заготовок. При маркуванні зразків послідовно указані: позначення заготовки, місце вирізання (верх – в, низ – н, центр – ц), номер зразка в заготовці і індекс напрямлення (в – вертикальне). Розміщення вертикальних зразків при вирізанні, їх номерування і приклад маркування приведені на рис.5.13а. Тангенціальні і радіальні зразки вирізали з двох сторін заготовки (до 28 зразків з кожної сторони).

Зразки маркувалися наступним чином: назва заготовки, номер сторони, номер зразка і індекс напрямлення (р – радіальний, т – тангенціальний). Виняток складали радіальні зразки, вирізані із другої сторони заготовки 1С і заготовки 1К, які позначали наступним чином: 1-2С-номер зразка – р і 1-К-номер зразка-р відповідно. Розміщення тангенціальних і радіальних зразків в вирізках і їх позначення показані на рис. 5.13,б.

Випробування зразків проводили на машині АІМА-5-1. Стале навантаження на зразок створюється вагою вантажів, яка передається на зразок через систему важелів. Дослідження проводили на мінімально допустимому передаточному відношенні важеля 1:20 з метою зменшення впливу коливань в вазі вантажу. Навантаження для кожного зразка виставляли по динамометру стиску ДС-0.2 і ДОСМ-3-1 за допомогою реверсивного пристрою.

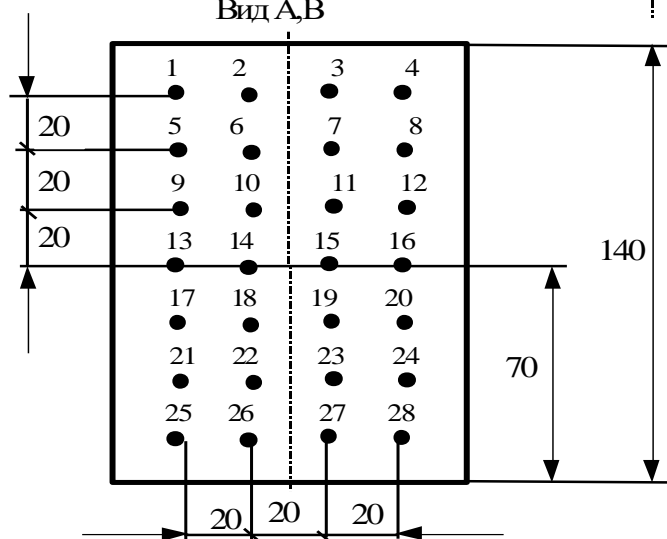
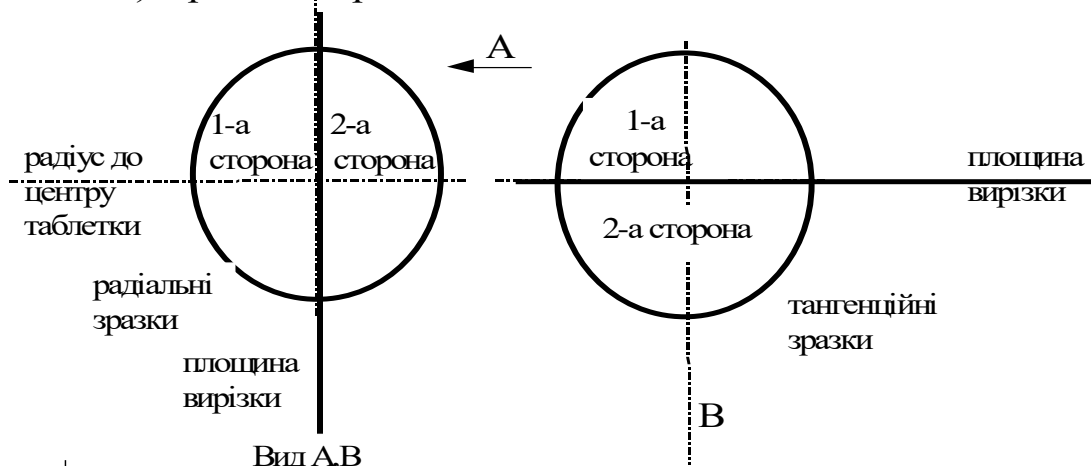
Вибір розмірів і геометрії зразка для досліджень визначали виходячи із того, щоб зразок був достатньо малим, щоб визначити характеристики повзучості в даній точці заготовки, крім того, зразок має задовольняти умовам закріплення в машині АІМА-5-1. Довжина його робочої частини повинна забезпечити необхідну точність вимірювань. Креслення зразка для випробувань приведено на рис.5.14. Довжина робочої частини зразка $l_0=17\text{мм}$, діаметр $d_0=5\text{мм}$. Проведені дослідження показали, що перевагу при виборі розмірів зразка необхідно було віддати вимогам забезпечення точності вимірювань. Так як зразок своїми посадочними місцями не відповідав конструкції захватів машини АІМА-5-1, то для його закріплення, виготовляли переходники із сталі Х18Н10Т. Фотографії зразків з переходниками приведені на рис.5.15. Діаметр переходника в найбільш вузькій частині дорівнює $d_{\min}=14\text{ мм}$. Тому деформацією повзучості переходника порівняно з деформацією зразка можна нехтувати.



Приклад: зразок вирізаний із заготовки 5, із центральної частини.

Маркіровка: 5-Ц-6в

а) вертикальні зразки



Приклад:
заготовка 1к, сторона 2,
радіальний зразок - 1к-2-4р;
заготовка 3с, сторона 1,
тангенційний зразок -
3с-1-4т.

б) радіальні і тангенційні зразки.

Рис.5.13. Розташування і маркіровка зразків для випробувань на повзучість

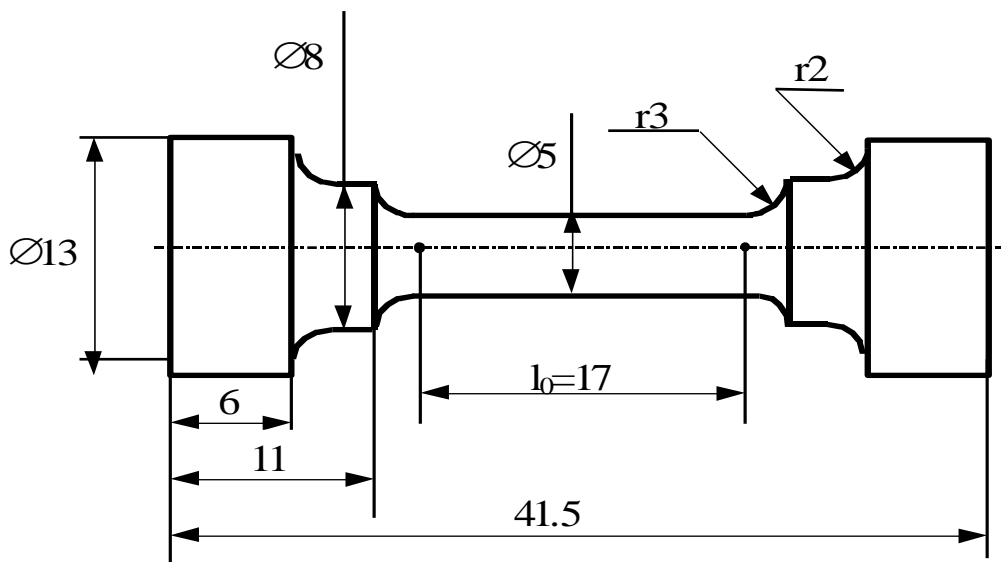


Рис.5.14. Зразок для випробувань на повзучість

Видовження зразка виміряли за допомогою екстензометра. На рис.5.16 показано зразок, установлений в одній із ячеек машини АІМА-5-1 (піч піднято) разом з екстензометром. Тензометр складається із тяг 4, які проходять усередині трубчатих тяг 5. Обі частини тензометра до їх установки на зразок можуть вільно переміщатися друг відносно друга.

При установленні тензометра внутрішні тяги 4 за допомогою з'єднаної з ними верхньої зажимної планки жорстко закріплювали болтами на різьбовій частині верхнього переходника 2. Зовнішні тяги таким же чином закріплювали на нижньому переходнику 3. Два індикатори часового типу 11ПГ з ціною поділки 1 мкм закріплювали на внутрішніх тягах. Таким чином індикатори реєстрували переміщення верхнього захвата відносно нижнього. Однак, при неоднорідному тепловому режимі через неоднакове нагрівання, і відповідно, різне термічне розширення внутрішніх і зовнішніх тяг покази індикаторів не відповідають видовженню зразка і можуть мати, в окремих випадках, протилежний знак. Для забезпечення зрівноваженого теплового стану печі нагрівання виконували повільно, за 5-6 годин. Після досягнення заданої температури для досягнення установившогося режиму робили витримку на протязі 2-4 годин, після чого зразки навантажували.

Температуру зразка контролювали двома термопарами хромель-алюмель (див.рис.5.16), гарячі спаї яких прикріплювали відповідно до верхнього та нижнього переходників за допомогою ніхромової проволочки. Різниця температур, яку визначали по показах двох термопар не перевищувала 3-5°. Температура печі підтримувалась сталою за допомогою релейного терморегулятора з дилатометричним чутливим елементом. Коливання температури відносно середнього значення складали $\pm 5^{\circ}\text{C}$.

Частота записів показів двох індикаторів змінювалась залежно від швидкості повзучості. Одразу після навантаження видовження реєстрували один раз за хвилину. По отриманих табличних залежностях видовження від часу будували криві повзучості.

Вибір температурного режиму досліджень і діапазону навантажень оказався обмеженим границями, в яких були можливі надійні вимірювання видовжень зразків на наявному обладнанні. Вимірювання були проведені при температурах 400°C, 450°C, 500°C, 550°C, 600°C. Границі зміни напружень змінювались в залежності від температури досліджень. В ряді випадків виконували дослідження при ступеневій зміні навантажень (з довантаженнями).

В деяких дослідженнях мала місце нестабільність температурного режиму через коливання напруги, тому оброблено експериментальні результати лише для 49 зразків. В таблиці 5.5 наведено основні параметри досліджень: назви і координати зразків, температура $t^{\circ}\text{C}$ і напруження σ досліджень, час досліджень, а для зразків які зруйнувалися – гранична деформація повзучості ϵ_c^p . Для досліджень з ступеневим навантаженням приведені границі зміни напружень.

Для того, щоб виявити залежність швидкості повзучості від напруження, температури, деформації повзучості, виключивши, по можливості, вплив неоднорідності і анізотропії якостей повзучості, дослідженням в більш широкому діапазоні температур і напружень підлягали вертикальні зразки, вирізані із центральної частини заготовки 2С. У всіх цих зразках координата $z = 0$, а радіус змінюється в границях $r = 60 \dots 250$ мм.

Для виявлення анізотропії повзучості були досліджені в діапазоні 450...600 °C радіальні та тангенціальні зразки, вирізані в центральній частині заготовок 1С ($r \approx 250$ мм, $z = \pm 20$ мм) і 3С ($r \approx 250 \pm 60$ мм, $z = \pm 20$ мм), відповідно. Результати цих досліджень були також використані для одержання додаткової інформації про залежність повзучості від температури і напруження.

Криві повзучості вертикальних, радіальних і тангенціальних зразків з координатами $r = 60 \dots 250$ мм для температур $t = 400 \dots 600$ °C приведені на рис.5.17...5.27. На цих же рисунках дані криві повзучості окремих зразків, вирізаних із інших частин циліндричної заготовки, дослідження яких були проведені для уточнення одержаних залежностей повзучості від температури і напруження.

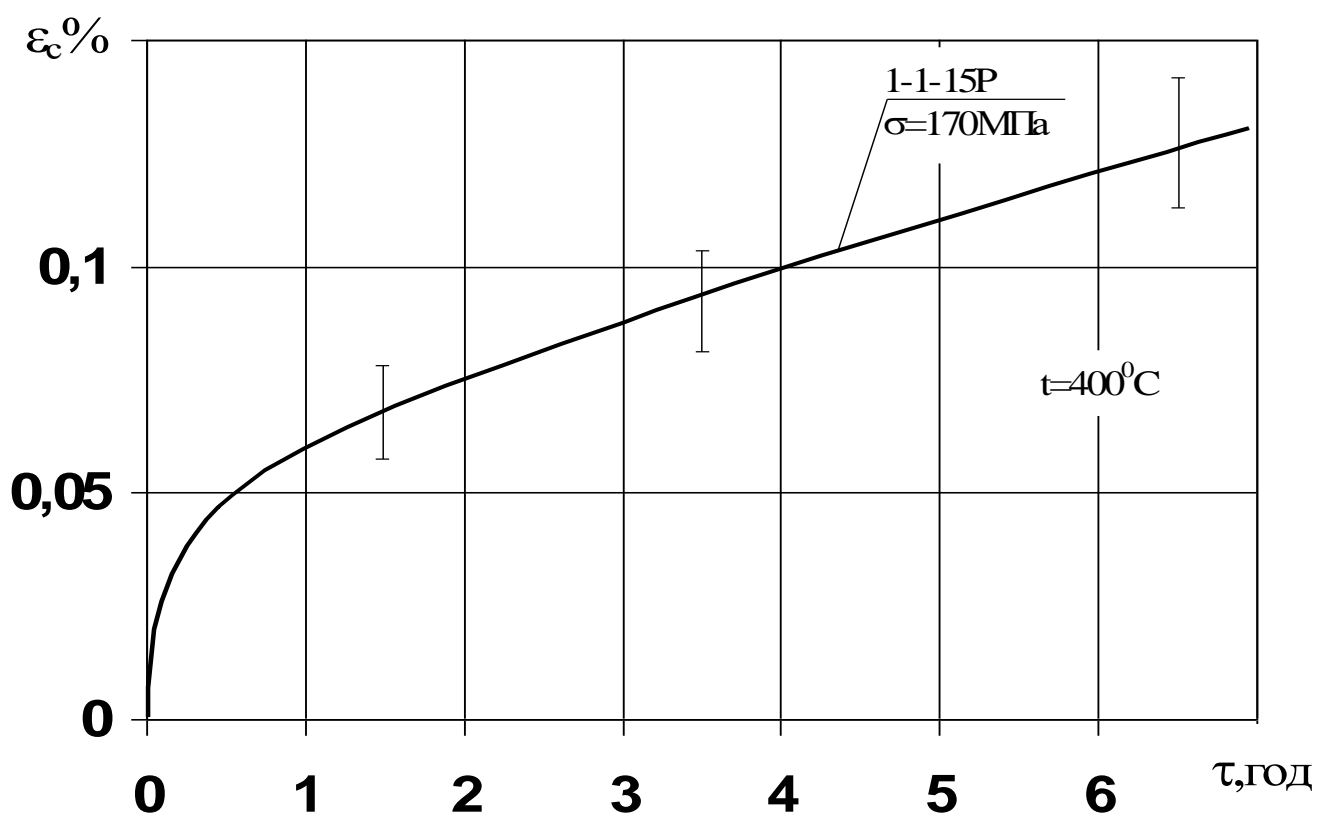


Рис.5.17. Крива повзучості радіального зразка при $t=400^\circ\text{C}$.

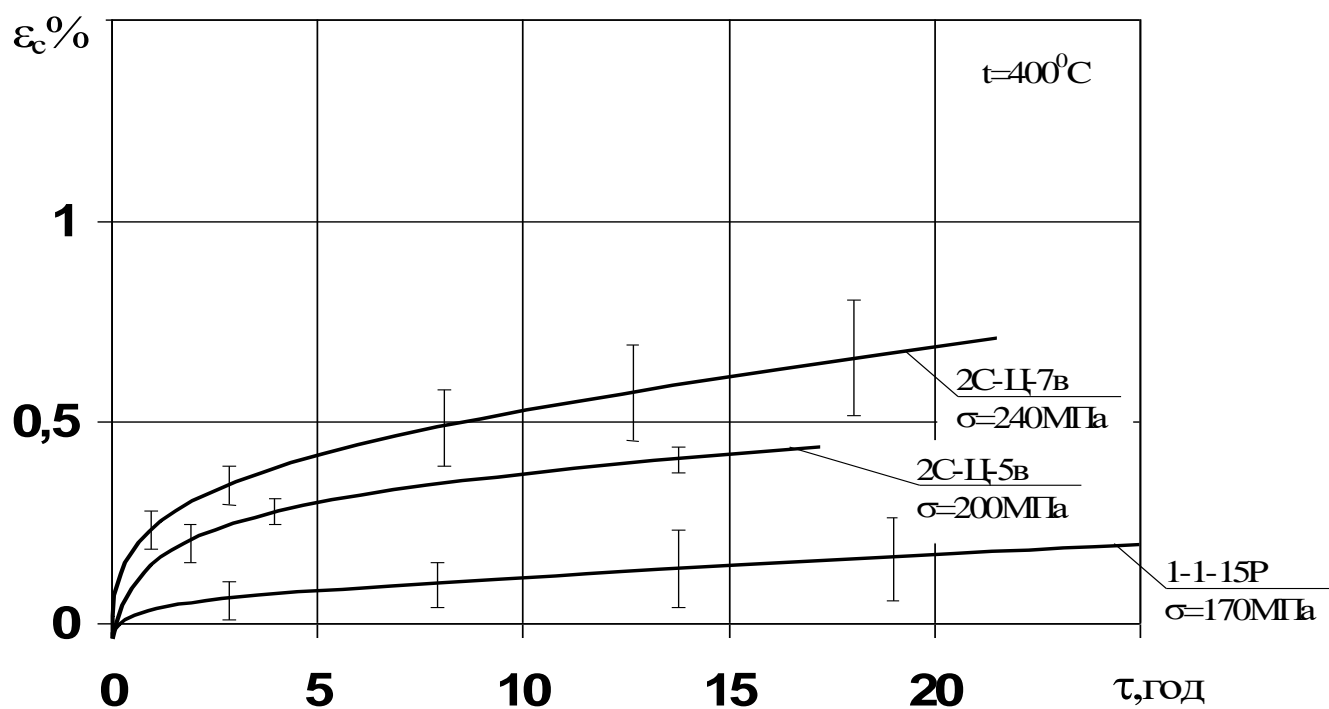


Рис.5.18. Криві повзучості при 400°C . (крива для зразка 2С-Ц-5В побудована по одному індикатору).

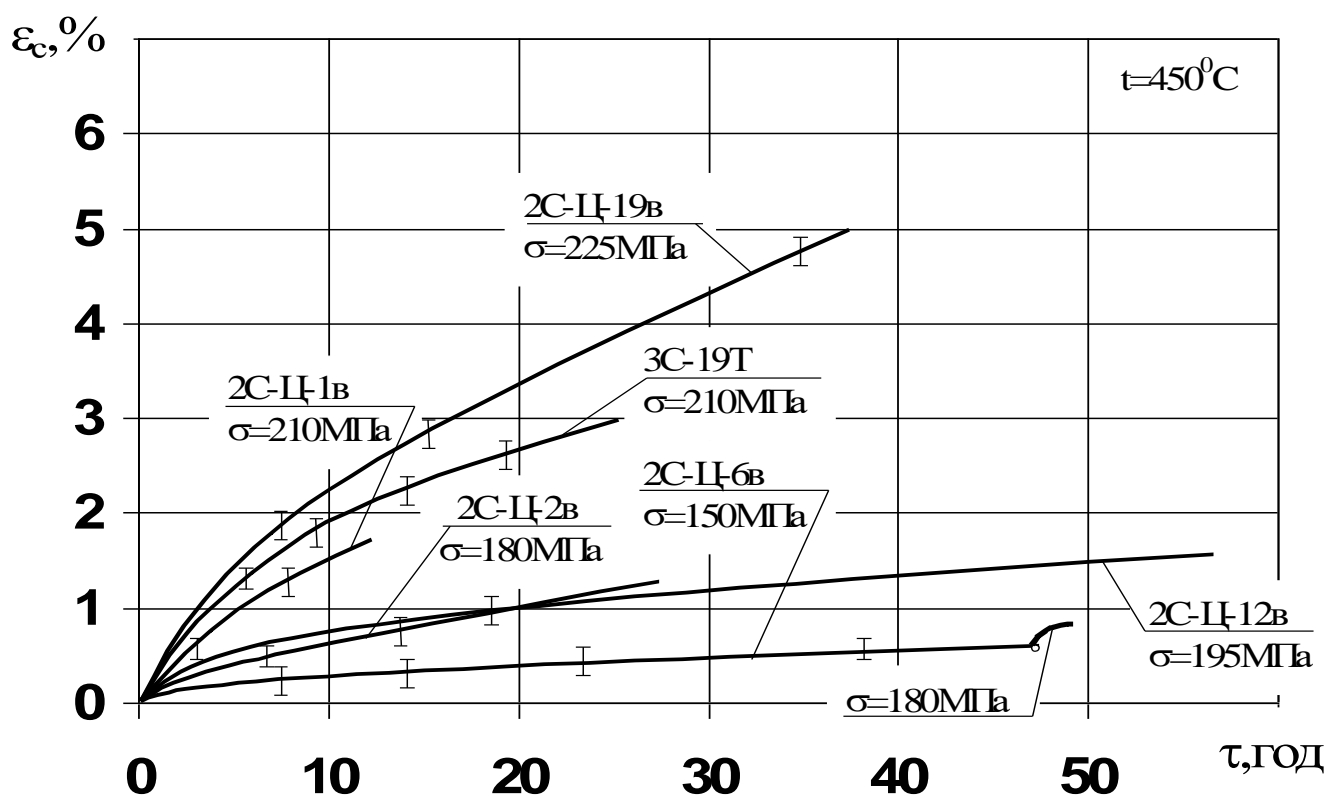


Рис.5.19. Криві повзучості при $t=450^\circ\text{C}$.

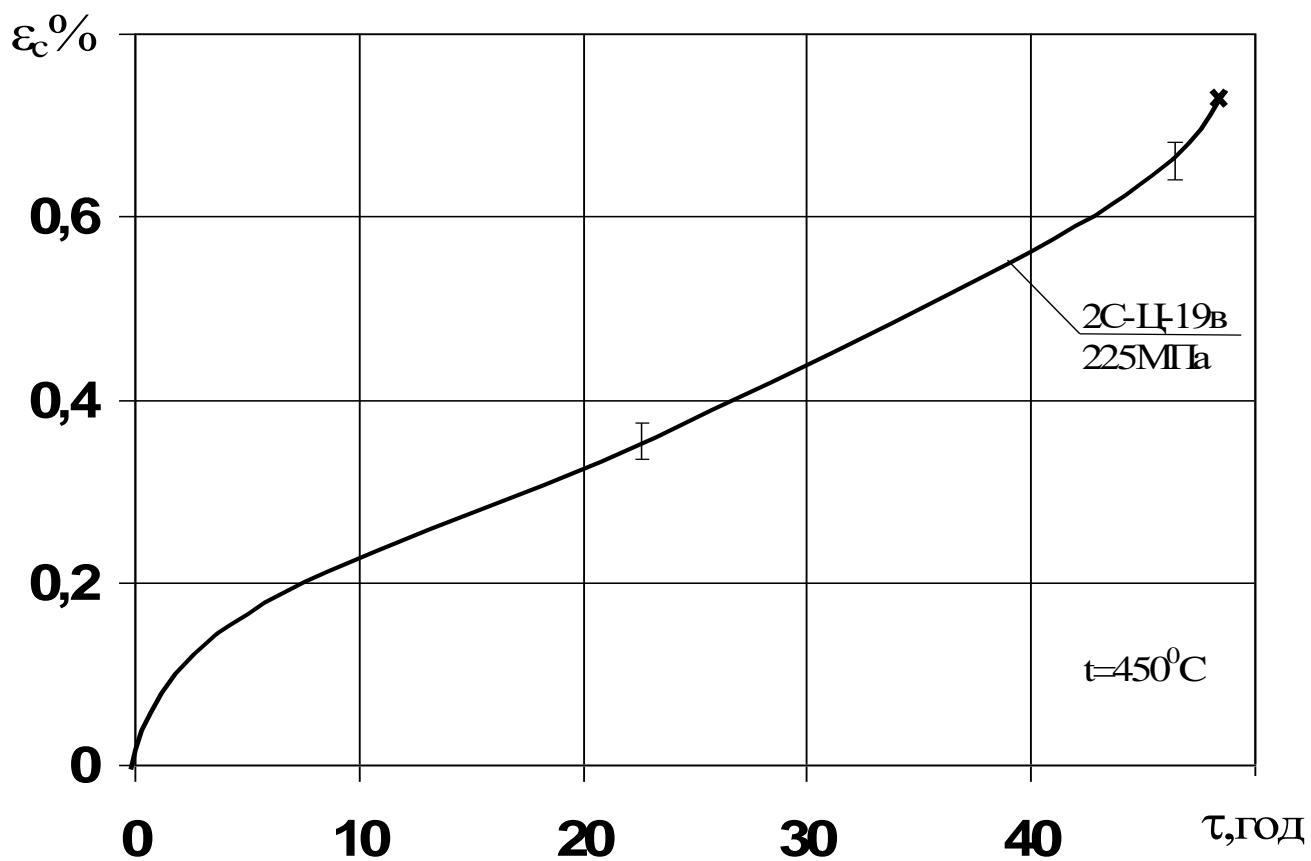


Рис.5.20. Криві повзучості при $t=450^\circ\text{C}$ (× - точка руйнування).

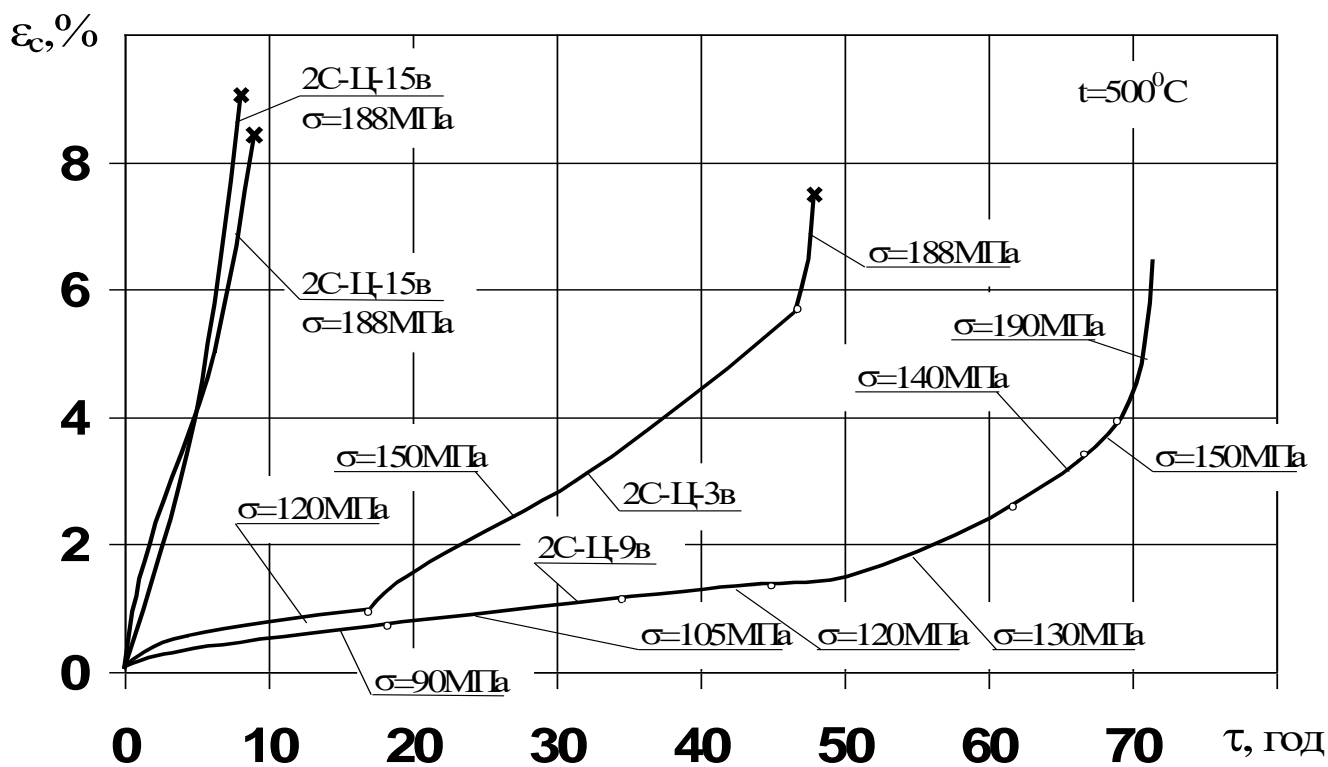


Рис.5.21. Криві повзучості зразків, вирізаних в осьовому напрямку із центра заготовки 2С ($t=500^\circ\text{C}$)
(\times - точка руйнування, o - точка довантаження).

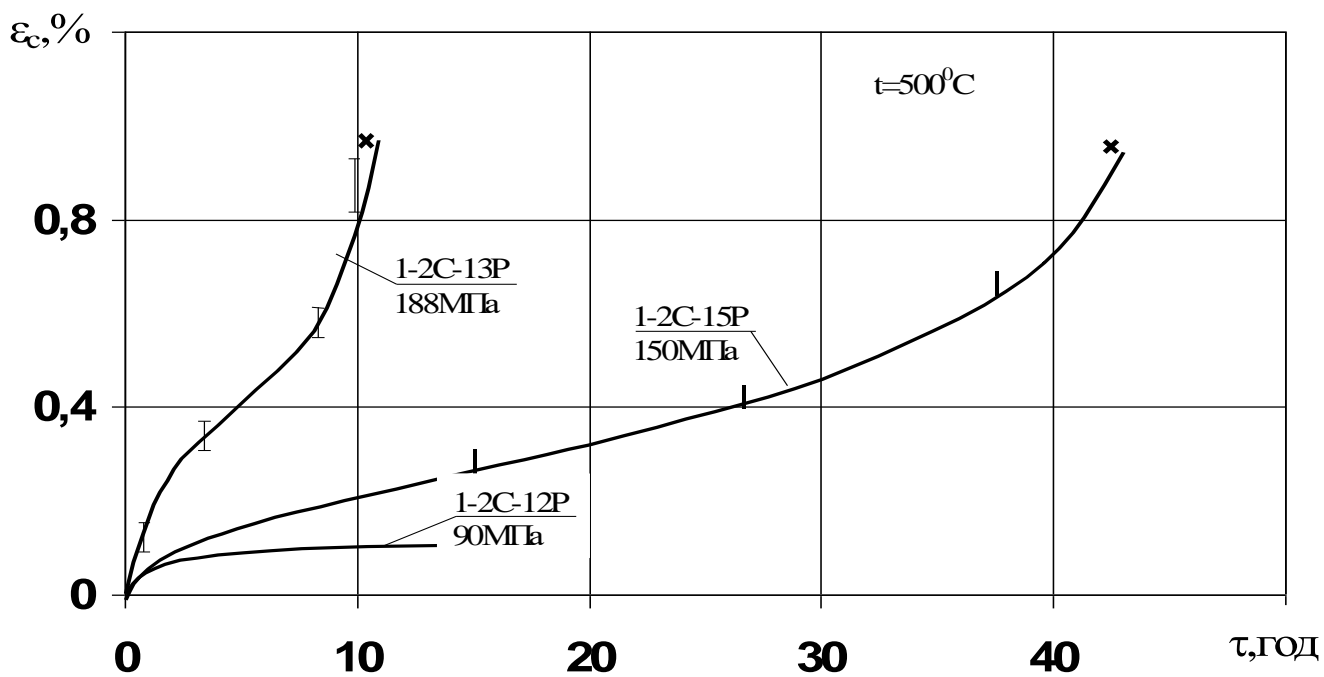


Рис.5.22. Криві повзучості радіальних зразків при $t=500^\circ\text{C}$
(\times - точка руйнування).

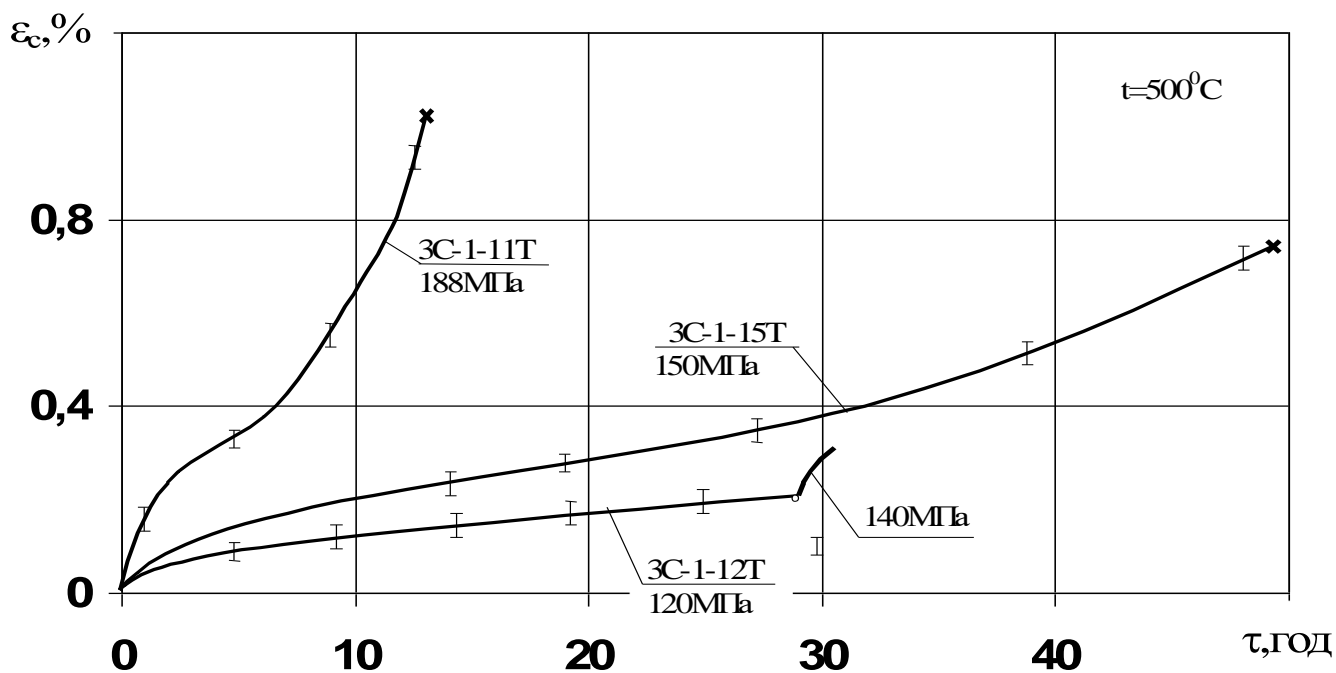


Рис.5.23. Криві повзучості тангенціальних зразків при $t=500^\circ\text{C}$ (заготовка 3С, центр) (\times - точка руйнування, o - точка довантаження).

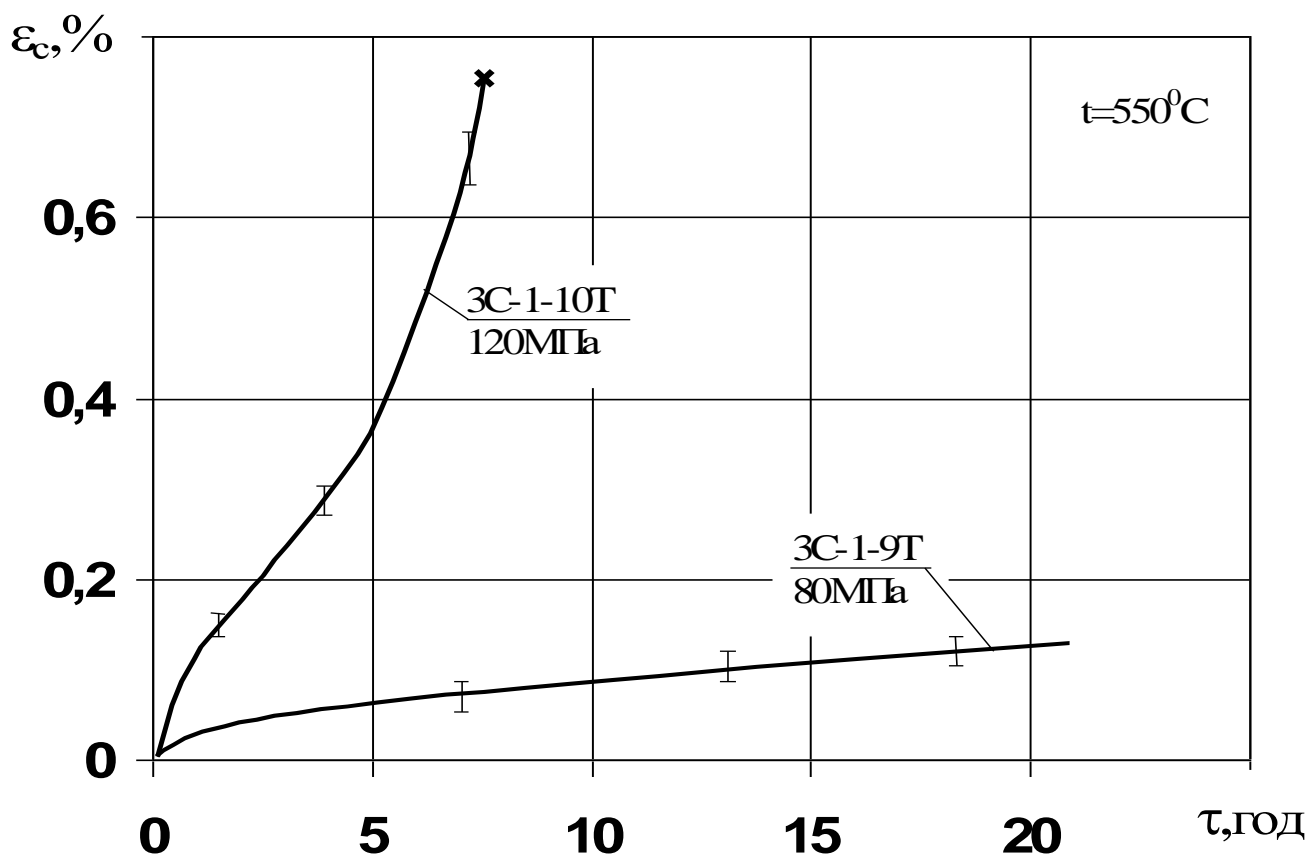


Рис.5.24. Криві повзучості при $t=550^\circ\text{C}$ (\times - точка розриву).

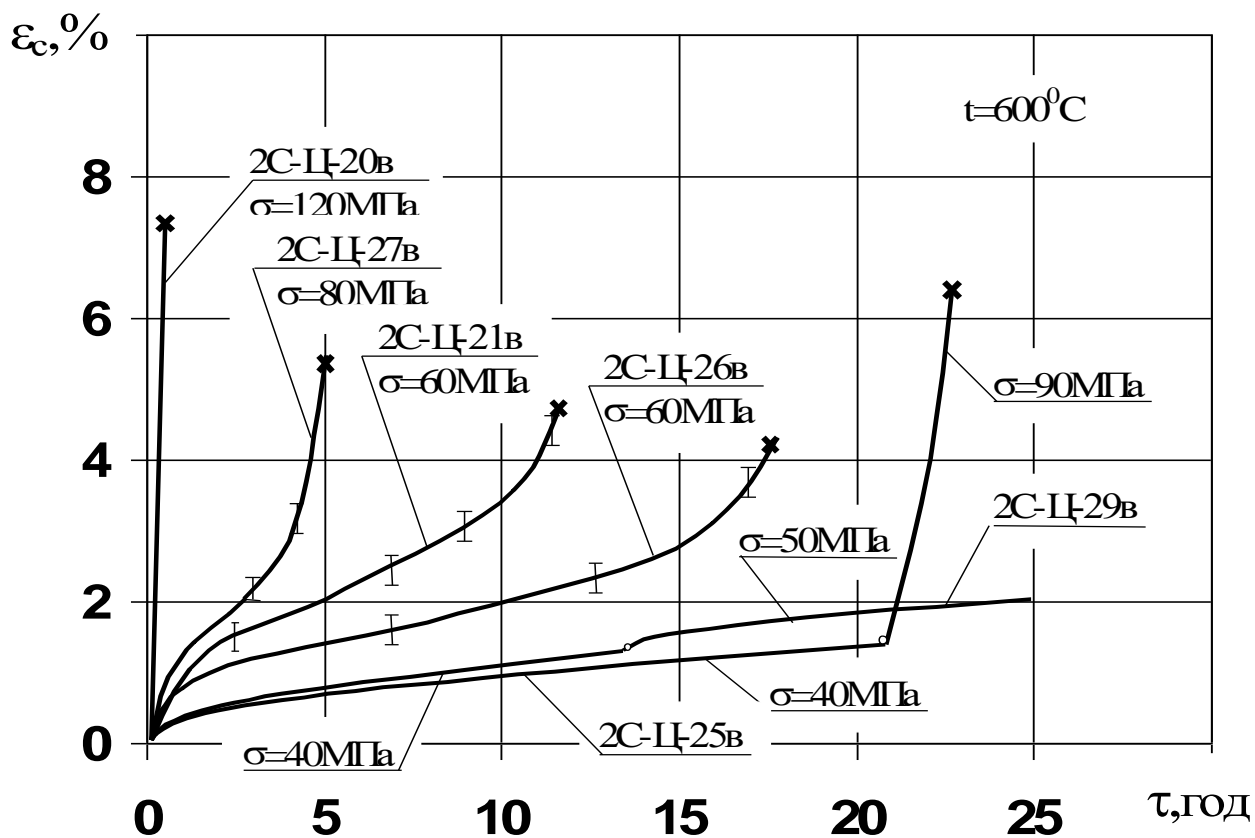


Рис.5.25. Криві повзучості вертикальних зразків при $t=600^\circ\text{C}$ (центр заготовки 2С, * - точка руйнування зразка; —o— - точка довантаження).

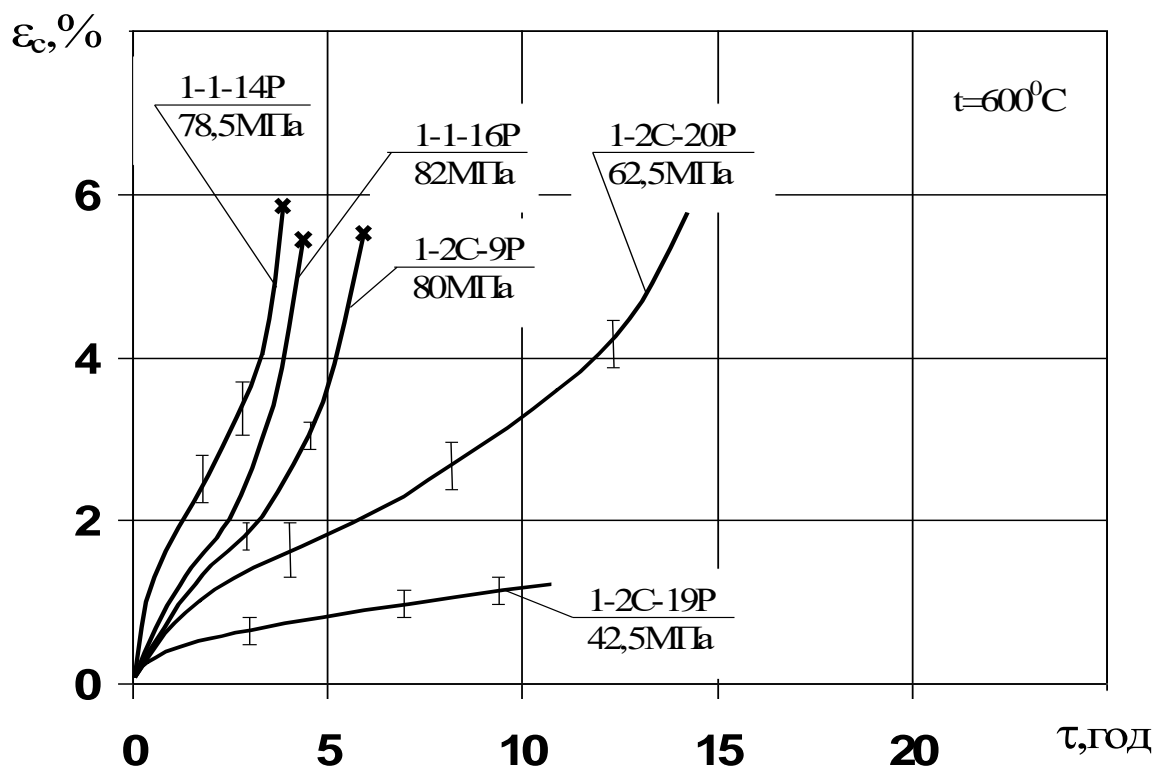


Рис.5.26. Криві повзучості радіальних зразків при $t=600^\circ\text{C}$

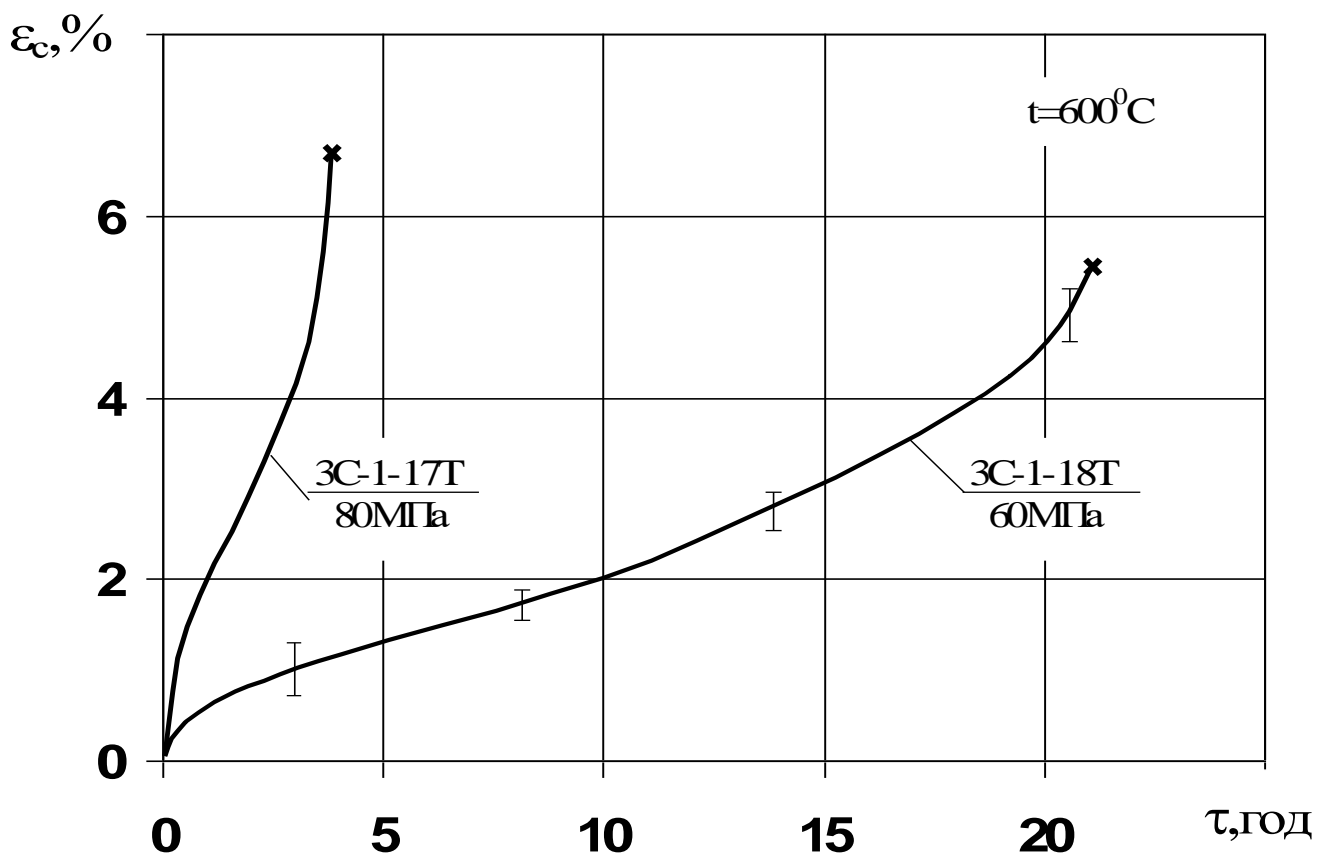


Рис.5.27. Криві повзучості тангенціальних зразків при $t=600^\circ\text{C}$. (× - точка руйнування).

Для того, щоб виконати оцінку неоднорідності властивостей повзучості з урахуванням її анізотропії, були виконані дослідження при одній і тій же температурі 500°C і напруженні 188 МПа зразків, вирізаних в різних місцях заготовки в різних напрямленнях. Відповідні криві повзучості з приведенням координат місць вирізки приведені на рис. 5.28...5.32.

Для побудови кривих повзучості використовували середні покази двох індикаторів. Відхилення показів індикаторів від середнього значення показані на рис.5.17...5.32.

Аналіз результатів досліджень показує, що криві повзучості берилію мають характер типовий для більшості металів і сплавів. На кривих повзучості зразків при температурі $t = 500^\circ\text{C}$ і $\sigma = 150\text{ МПа}$ можна чітко виділити три ділянки: неустановившоїся повзучості, установившоїся повзучості і руйнування (повзучість з зростаючою швидкістю).

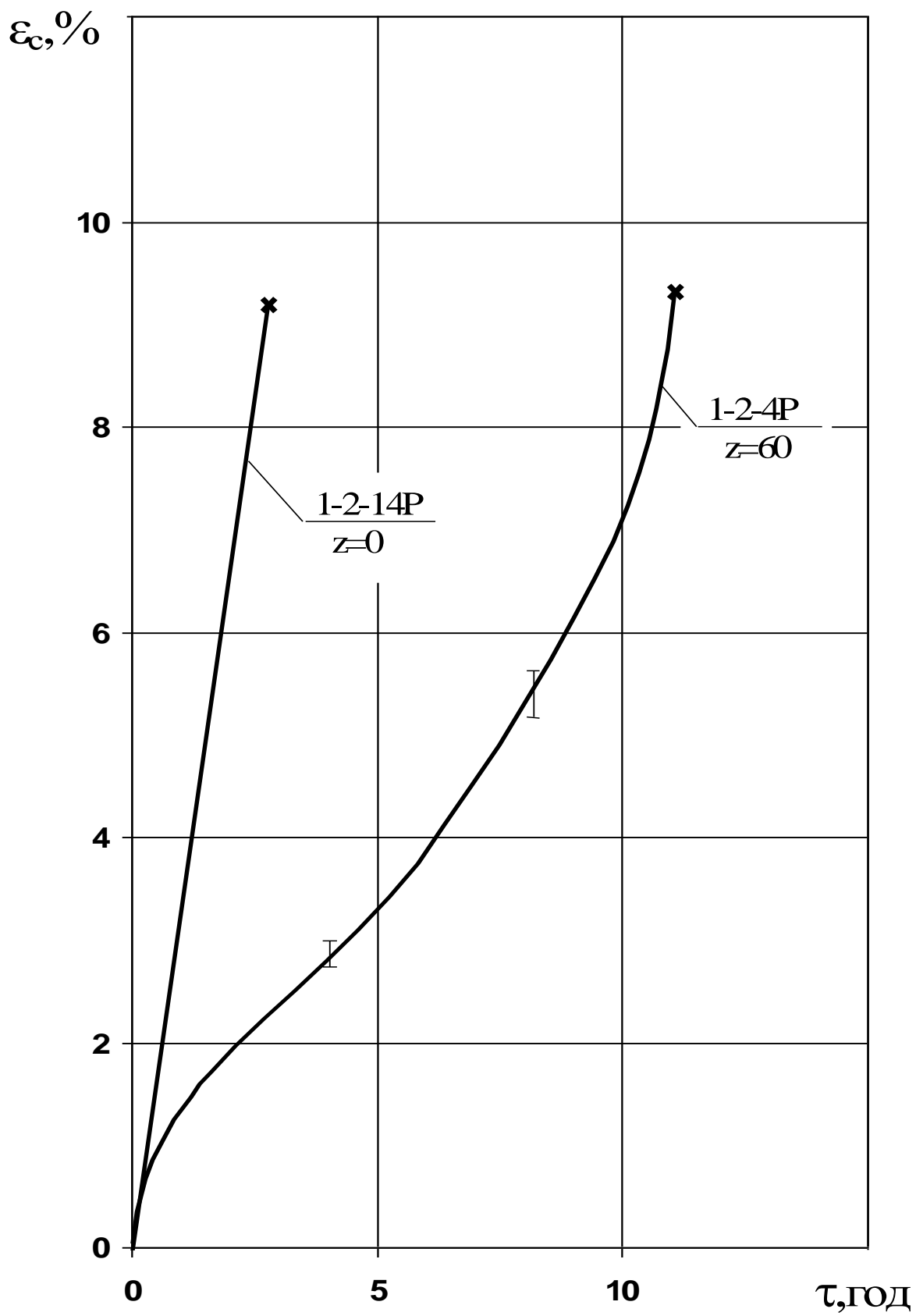


Рис.5.28. Криві повзучості при $t=500^\circ\text{C}$, $\sigma=188\text{ МПа}$ зразків, вирізаних із заготовки 1 ($R_{cp}=0$).

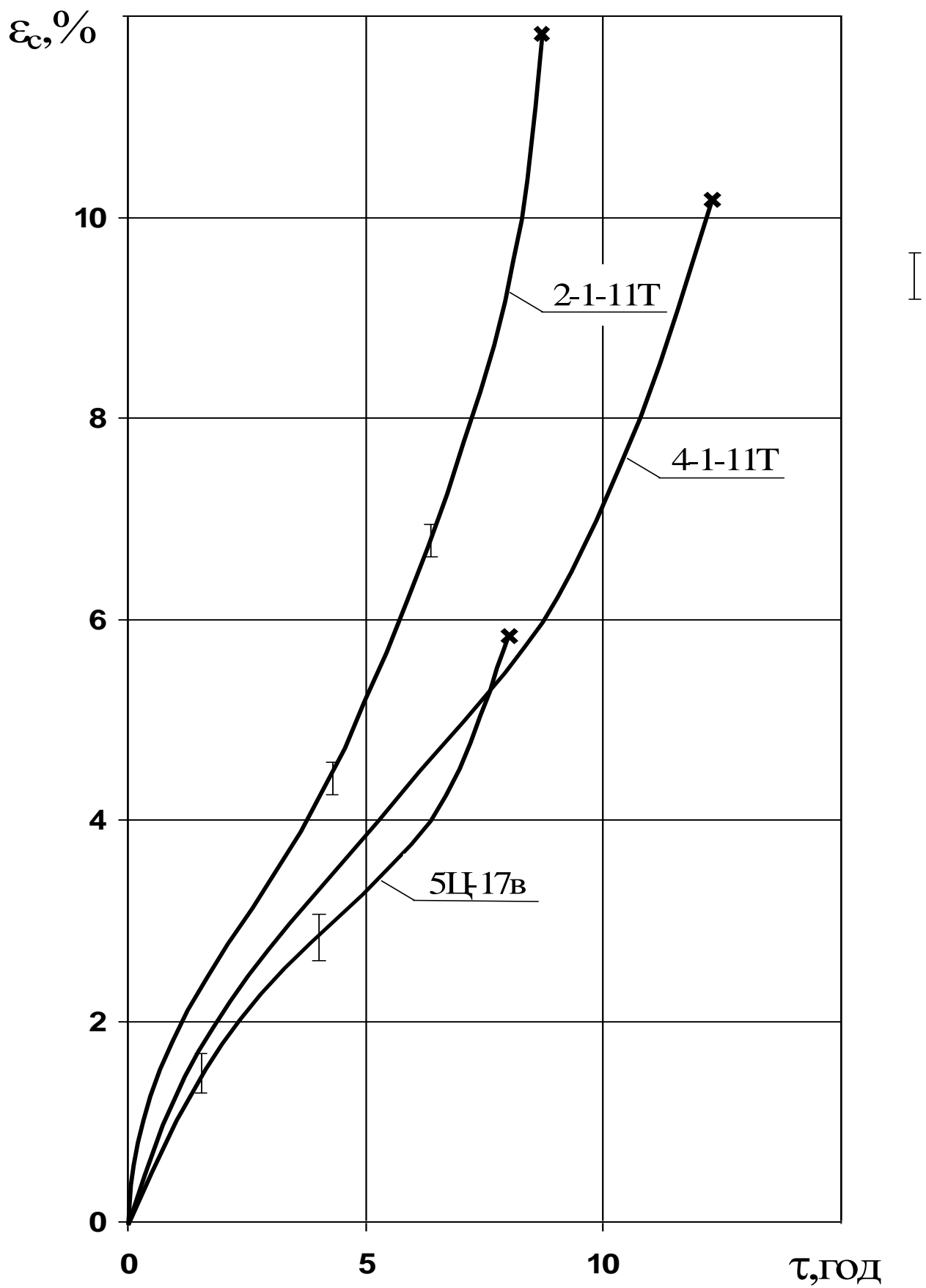


Рис.5.29. Криві повзучості при $t=500^{\circ}\text{C}$, $\sigma=188\text{МПа}$, ($R_{cp}=135\text{мм}$, $z=60\text{мм}$).

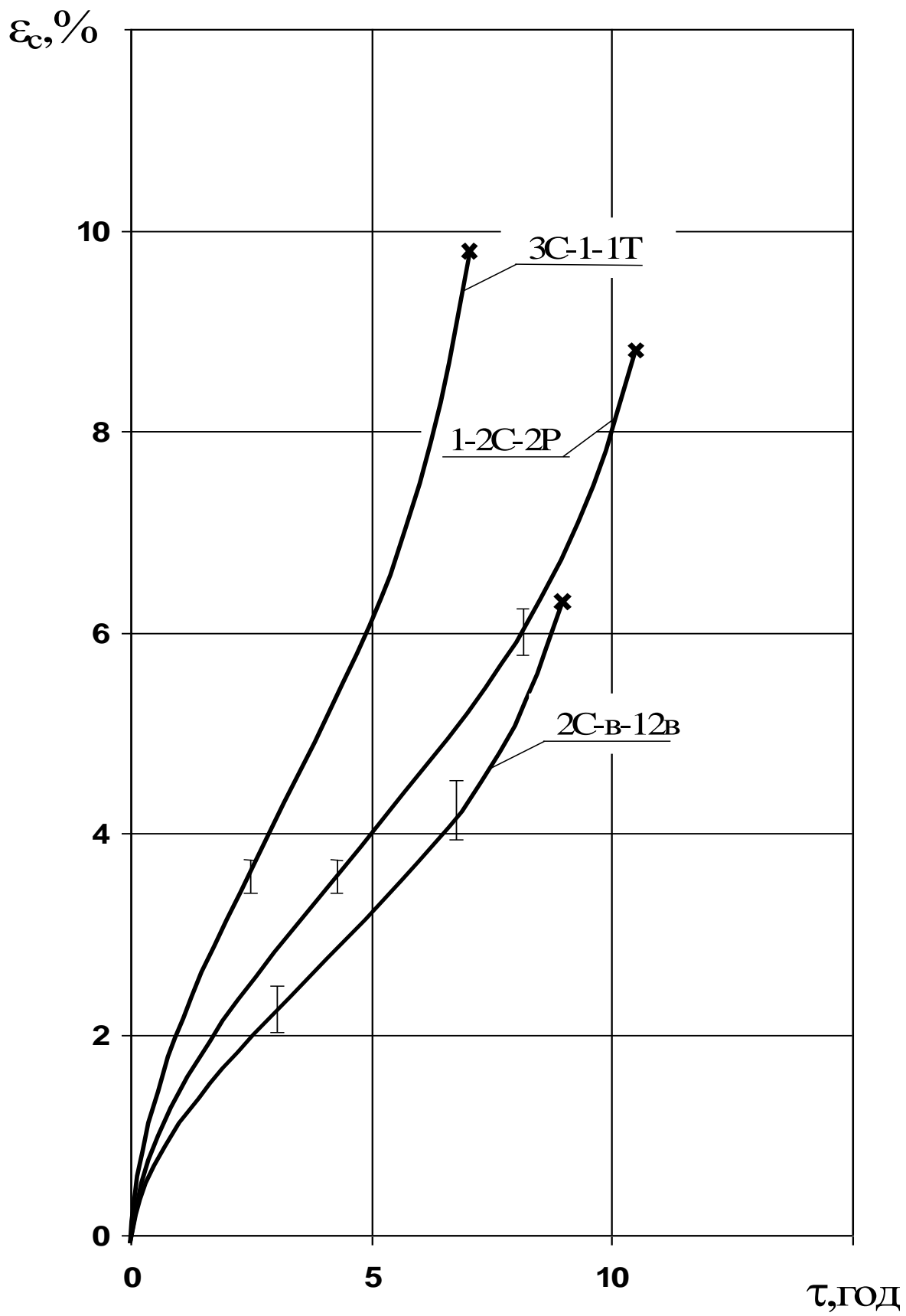


Рис.5.30. Криві повзучості при $t=500^{\circ}\text{C}$, $\sigma=188\text{МПа}$, ($R_{cp}\approx 250\text{мм}$, $z=60\text{мм}$).

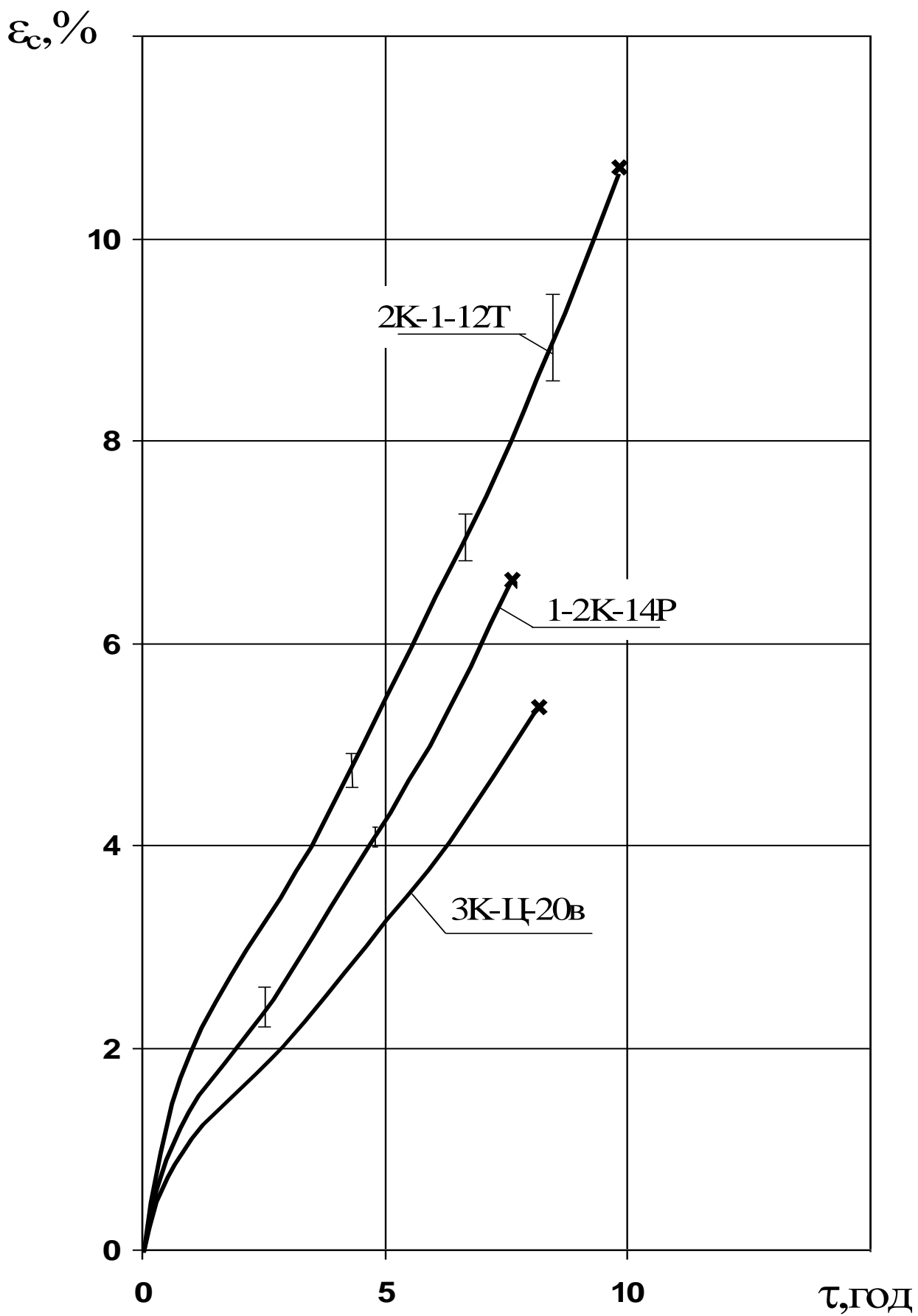


Рис.5.31. Криві повзучості при $t=500^{\circ}\text{C}$, $\sigma=188\text{МПа}$, ($R_{cp}\approx 460\text{мм}$, $z=0$)

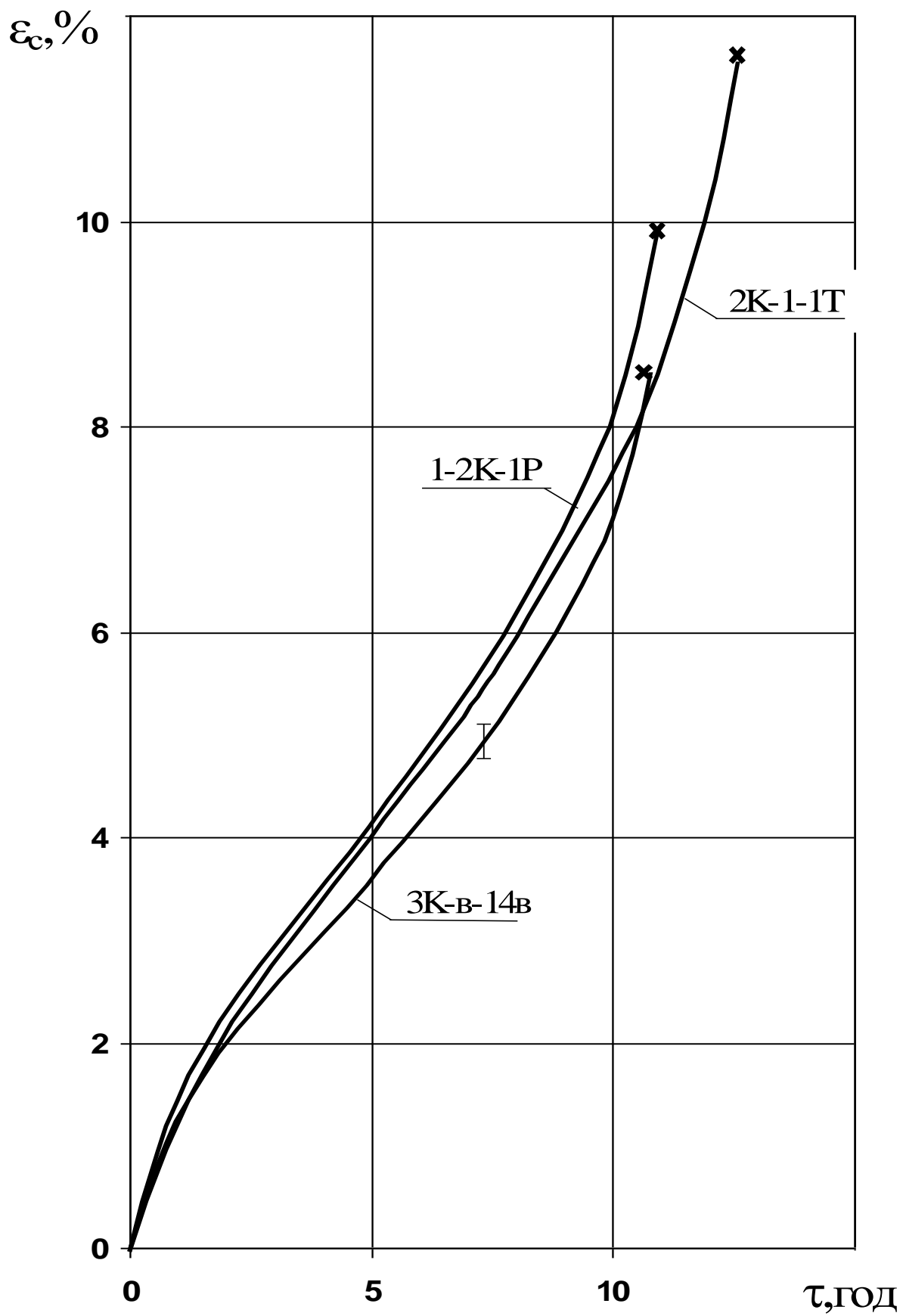


Рис.5.32. Криві повзучості при $t=500^{\circ}\text{C}$, $\sigma=188\text{МПа}$, ($R_{cp}=460\text{мм}$, $z=60\text{мм}$)

Для високих напружень і температур ділянка установившоїся повзучості може вироджуватись в точку перегину. Для низьких напружень і температур третя ділянка за час випробувань практично не досягалась.

Для всіх кривих характерна ділянка неуставившоїся повзучості з ярко вираженим зміцненням (зменшення швидкості повзучості з ростом деформації повзучості).

Криві повзучості (див.рис.5.17...5.27) свідчить про надзвичайно сильну залежність швидкості повзучості від температури в діапазоні 400...600°C. Дуже велика залежність повзучості від напружень.

При дослідженнях виявився досить великий розкид експериментальних даних. Що пов'язано як з невеликими відхиленнями від температурного режиму, так і неоднорідністю зразків. Взагалі, при дослідженнях повзучості розкид в 20% не вважається великим [235].

Оцінюючи анізотропію і неоднорідність властивостей повзучості по кривих (див.рис.5.17...5.32) можна зробити висновок, що врахування впливу місця і напрямлення вирізання зразка недоцільно, так як цей вплив не перевищує розкиду досліджень. Тому в подальшому проводилась сумісна обробка кривих повзучості для зразків, які мали різну орієнтацію і положення.

Досліди при ряді режимів закінчувались руйнуванням. Зразки руйнувались без помітної шийки. В деяких зразках при температурах 500...600 °C по довжині зруйнованого зразка відмічався ще ряд глибоких поперечних тріщин. Руйнування проходило по площадці, нормальній до осі зразка. Для одного зразка відмічено руйнування по площадці, нахиленій під кутом $\approx 45^\circ$ до осі зразка. Довготривала міцність в інтервалі 450...600 °C дуже сильно залежить від температури. Наприклад, якщо при напруженні $\sigma=120$ МПа при температурах 400-500 °C руйнування взагалі не було досягнуто за час досліджень біля 72 годин, то при температурі $t = 550^\circ\text{C}$ зразок руйнувався через 7.5 год., а при $t = 600^\circ\text{C}$ розрив мав місце за час $\tau = 0,42$ год.

Руйнування при повзучості зразків, вирізаних із заготовки, напевно має анізотропний характер. Середнє значення часу τ_p і руйнівної деформації повзучості при $t=500^\circ\text{C}$ і $\sigma=188$ МПа для зразків, вирізаних в вертикальному, тангенціальному і радіальному напрямках приведені в таблиці 5.6.

Таким чином, тангенціальні зразки мають найбільшу пластичність при повзучості, а вертикальні найменшу. Деформація руйнування при заданій температурі не сильно залежить від напруження (для однаково направлених зразків) і має тенденцію до зменшення з ростом часу випробувань. Середні значення деформацій руйнування по всіх зразках складають: при $t=500^\circ\text{C}$, $\varepsilon_c^p = 0.086$, при $t=600^\circ\text{C}$, $\varepsilon_c^p = 0.056$.

ЛЕКЦІЯ 8

8. Основи теорії деформовності

8.1. Технологічна деформовність металів

Методи оцінки деформовності металів в процесах обробки тиском базуються на феноменологічній теорії деформовності, перевага якої перед іншими теоріями руйнування полягає в тому, що вона враховує вплив історії навантаження на інтенсивність накопичення пошкоджень. Теорія деформовності дозволяє також одержати кількісну оцінку впливу параметрів технологічного процесу на ймовірність руйнування і, на основі цього, раціонально використати резерви пластичності.

В ряді випадків пластична деформація може приводити до заліковування дефектів. Досліди з мідними пористими зразками показали [1], що при гідростатичному стиску до 10000 МПа без пластичної деформації, дефекти в металі зберігаються. Після розтягу тих же зразків під гідростатичним тиском 400 МПа мало місце повне заліковування мікропор, а пластичність досягла рівня пластичності бездефектного матеріалу.

Інтенсивність пластичного розпушення металу може бути значно понижена, якщо змінювати характер навантаження, наприклад, при знакозмінній деформації [2-10]. Зменшення інтенсивності накопичення пошкоджень в цьому випадку може бути зумовлено виникненням нових смуг ковзання при зміні знака напружень.

Більш складним є механізм накопичення пошкоджень при пластичній деформації пористих тіл. В цьому випадку одночасно протікають як процеси пластичного розпушення, так і процеси заліковування пор. Крім того пори сповільнюють процеси створення небезпечних скупчень дислокацій, так як служать стоками для останніх. Тому пори, в деякій мірі, відіграють роль “каталізаторів” пластичної деформації. На користь наявності названих механізмів свідчать досить великі пластичні деформації пористих тіл.

Необхідно також відмітити, що пластичне розпушення супроводжує любую пластичну деформацію. І. Р. Крякін, І. Л. Міркін, Л. П. Трусов досліджували пластичне розрихлення при повзучості і установили, що критична густина пор, при якій настає руйнування, не залежить від того, яким шляхом така пористість досягнута. Однак і при повзучості інтенсивність накопичення і величина граничної деформації визначається історією навантаження тобто залежить від виду траєкторії навантаження.

В роботах [11-13] експериментально встановлено, що дефекти, які появляються при значеннях використаного ресурсу пластичності більших 0.3...0.4 не заліковуються при послідовному відпалі. Тому ці дефекти викликають погіршення фізико-механічних характеристик виробів, а також знижують їх експлуатаційні характеристики. Даний результат свідчить про актуальність проблеми визначення використаного ресурсу пластичності не тільки з точки зору отримання готових виробів шляхом пластичної деформації

без мікротріщин, а також з точки зору гарантії надійних експлуатаційних характеристик цих виробів. Важливим залишається також питання оптимізації технологічних процесів шляхом мінімізації величини використаного ресурсу пластичності і його раціонального розподілу по об'єму деформуємої заготовки. Надійний розв'язок цілого ряду таких задач дозволяє одержати феноменологічна теорія деформовності, яка лежить в основі відповідних критеріїв руйнування. Однак практика показує, що не завжди навіть досить поширені і відомі критерії дають задовільні результати. Тому залишається проблема як подальшого розвитку теорії деформовності і розробки на цій основі нових критеріїв, так і проблема установлення границь придатності відомих критеріїв і теорій. Розв'язок такої проблеми дасть можливість обґрунтовано вибрати найбільш надійні і прості для даного технологічного процесу методи оцінки використаного ресурсу пластичності.

Наукові основи теорії деформовності створені в роботах Г. А. Смірнова-Аляєва, В. Л. Колмогорова, Г. Д. Деля, В. А. Огороднікова. Подальший розвиток ця теорія одержала в роботах О. О. Богатова, Я. Є. Бейгельзімера, Ю. Г. Важенцева, В. М. Михалевича, Ю. Г. Калпіна, О. М. Лаптева, С. В. Смірнова, М. Б. Штерна.

Розвитку теорії деформовності сприяли роботи І. С. Алієва, Б. І. Береснева, С. І. Губкіна, О. А. Ганаго, К. А. Гогаєва, Г. Я. Гуна, А. П. Гетманського, О. А. Ільюшина, А. А. Костави, А. Г. Овчіннікова, Л. В. Прозорова, Є. А. Попова, Г. Л. Петросяна, О. О. Розенберга, І. П. Рене, О. В. Романа, В. В. Соколовського, Е. П. Ункова, Д. В. Хвана, М. Б. Штерна, а також роботи В. Джонсона, К. Зібеля, Ш. Кабояші, Х. Л. Пью, Р. Шілда, А. Шебейка та інші.

В основі сучасної теорії деформовності лежить гіпотеза про залежність пластичності від схеми напруженого стану, яка описується діаграмою пластичності. Діаграми пластичності в більшості теорій описують експериментальну залежність граничної деформації від показника жорсткості напруженого стану. Однак в останніх роботах В. А. Огороднікова, Ю. Г. Важенцева, А. А. Богатова, С. В. Смірнова [14, 15, 16] показано, що залежність пластичності від схеми напруженого стану характеризується, як мінімум, двома показниками напруженого стану. В. А. Огородніков вважає, що при об'ємному напруженому стані необхідно враховувати вплив на пластичність третього інваріанта тензора напружень. Такий підхід дозволив отримати позитивні результати при розробці ряду процесів обробки тиском, які реалізуються в умовах об'ємного напруженого стану. В роботах [15, 16] в якості показників напруженого стану також використовуються безрозмірні інваріантні характеристики. Однак, розглянуті підходи не завжди дозволяють перейти із простору безрозмірних показників в простір напружень.

Тому виникає необхідність обґрунтування вибору як кількості показників напруженого стану, для повного і однозначного описання залежності пластичності від схеми напруженого стану так і їх структури. Крім того, вибір показників напруженого стану повинен передбачати можливість перетворень, які дозволяли б виконувати однозначний перехід від траєкторій в просторі безрозмірних показників до траєкторій в просторі головних напружень, або

любих трьох інваріантів тензора напружень, а також дозволяли враховувати зміцнення металу при пластичній деформації.

Актуальною в даний час є проблема оцінки деформовності металів при немонотонному навантаженні. В цьому випадку пошкодження, як функціонал трьохвимірних тензорів напружень і деформацій, може бути тільки трьохвимірним тензором або сукупністю тензорів деяких порядків [17]. Г. Д. Дель [5] вперше використав підхід О. А. Ільюшина для практичних розрахунків деформовності металів при немонотонному навантаженні. Цей підхід отримав подальший розвиток в роботах В. А. Огороднікова [14], О. А. Мішуліна, В. М. Михалевича [6, 7], І.А.Кийко [20] і інших. Необхідно відмітити також роботи в цьому напрямку В. Л. Колмогорова, А. А. Богатова, С. В. Смірнова, О. І. Мижирицького [11], Н. С. Можаровського [21] і інших.

Фізична картина кінетики накопичення пошкоджень при немонотонному навантаженні практично не досліджена. Тому феноменологічна теорія, в основу якої покладена гіпотеза про тензорний характер пошкоджень є, на наш погляд, єдиною теорією, яка дозволяє оцінити використаний ресурс пластичності при немонотонному навантаженні. В роботах Г. Д. Деля, В. А. Огороднікова, В. М. Михалевича при визначенні компонент тензора пошкоджень використовують, в основному, діаграму пластичності. Дослідження, присвячені трьохвимірним траєкторіям навантаження при немонотонному деформуванні, практично відсутні.

Для оцінки деформовності заготовок і для технологічного забезпечення якості готових виробів необхідна інформація про історію деформування кожної матеріальної частинки в об'ємі заготовки. Достовірну інформацію про історію деформування можна отримати тільки після розв'язку крайової задачі теорії пластичності. Методи розрахунків напружено-деформованого стану в пластичній області отримали розвиток в роботах Г. Д. Деля, В. А. Огороднікова [14, 18, 23, 24], Г. Л. Петросяна [25,26], Г. А. Смірнова-Аляєва [27,], М. Б. Штерна [28, 29, 30, 31], В. В. Скорохода [32], О. А. Ільюшина [17, 33], М. М. Малініна [34], Г. С. Писаренко, А. А. Лебедева [35], Є. П. Унксова [36, 37], Л. М. Качанова [38], В. М. Сегала [40], Г. Я. Гуна [41,42], І. П. Ренне [46], Р. Хіла [56], В. Джонсона, Х. Кудо [57] і інших.

Одним із недоліків сучасних методів визначення використаного ресурсу пластичності при немонотонному навантаженні є те, що величину використаного ресурсу пластичності визначають по критеріях, які враховують тензорний характер пошкоджень, а напружено-деформований стан розраховують без врахування деформаційної анізотропії, яка має місце при немонотонній деформації.

Досить актуальним є дослідження деформовності пористих тіл. В даний час створені наукові основи механіки пластичної деформації пористих тіл в роботах М. Б. Штерна [28-31], В. В. Скорохода [32], Г. Л. Петросяна [25,26], О. М. Лаптева [48-54], а також методи оцінки ймовірності руйнування при пластичній деформації пористих тіл в роботах Г. Л. Петросяна [26], М. О. Шестакова [22], Я. Є. Бейгельзімера, А. П. Гетманського, В. З. Спусканюка [58], О. М. Лаптева, В. Д. Рудя [59, 60].

Однак проблема оцінки деформовності пористих тіл досить складна і далека від свого остаточного розв'язку. Так як при експериментальних дослідженнях залежності пластичності пористих тіл від схеми напруженого стану виникають проблеми уже при побудові діаграми пластичності. Це зумовлено тим, що при пластичній деформації пористих тіл практично неможливо забезпечити умови простого навантаження.

Недослідженими в даний час залишаються проблеми технологічної спадковості, яка має місце при гарячому штампуванні порошкових заготовок. В даному випадку крім технологічних параметрів процесу штампування, на кінцевий стан матеріалу заготовки суттєво впливає і процес охолодження. Тому при охолодженні штампованих крупногабаритних заготовок в них виникають залишкові напруження, які є причиною руйнування заготовок при їх зберіганні, або при механічній обробці, так як в цьому випадку має місце перерозподіл залишкових напружень. Крім того, досить часто має місце руйнування готових виробів при їх експлуатації, причиною якого є суперпозиція залишкових напружень з напруженнями від зовнішніх навантажень. Необхідно відмітити, що розподіл по об'єму і рівень залишкових напружень залежить як від параметрів процесу штампування, так і від послідовності і характеристик процесів кінцевої механічної обробки.

8.2. Міра пластичності

Сучасний рівень теорії пластичності дозволяє вирішувати практично всі задачі обробки металів тиском. Одна з цих задач - це визначення енергосилових параметрів. Однак в останній час, у зв'язку з підвищенням вимог до якості готових виробів, особливого значення набуває питання оцінки рівня пошкодженості металів, їх заліковування і зв'язана з ними проблема оцінки граничного формозмінення.

Теоретичні і експериментальні дослідження процесу пластичної деформації зводяться до розробки певних моделей, які в подальшому використовуються для оптимізації і управління процесом пластичного формозмінення. Математичні моделі повинні враховувати взаємодію металу заготовки, що деформується, з інструментом і базуватися на обґрунтованій фізико-механічній концепції, для забезпечення логічного взаємозв'язку і єдності математичної формалізації. Крім того, математична модель повинна описувати структурно-чутливі властивості матеріалів, від зміни яких залежить механізм зміцнювання і знеміцнювання металу, що деформується, процес накопичування і заліковування пошкоджень і, таким чином, ефективність процесу формозмінення і якість готового виробу.

Основним теоретичним напрямком, за допомогою якого розв'язується задача вибору оптимальних умов пластичної деформації, є технологічна механіка [14, 18, 23, 61]. Хоча останнім часом з'явилися роботи, в яких процес руйнування при пластичній деформації оцінюється з точки зору фізики твердого тіла [62-65]. Дислокаційні уявлення розкривають фізичну природу процесу руйнування, зумовленого пластичною деформацією, однак використовувати

результати досліджень фізики твердого тіла для кількісної оцінки ймовірності руйнування в реальних процесах обробки тиском поки що неможливо. Тому широке поширення в технологічній практиці отримали феноменологічні теорії, в основі яких лежить гіпотеза про залежність пластичності від історії навантаження, яка тим чи іншим способом задається в просторі напружень [2, 14, 18, 23, 27, 61, 66].

Під пластичністю будемо розуміти здатність металу змінювати свою форму без руйнування в вигляді макроскопічного порушення суцільності. В якості міри пластичності будемо використовувати накопичену до моменту руйнування пластичну деформацію:

$$e_p = \int_0^{t_p} \dot{\varepsilon}_u d\tau, \quad (4.1)$$

де $\dot{\varepsilon}_u$ - інтенсивність швидкостей деформацій;

t_p - час деформування до руйнування.

Величину e_p можна також розглядати як довжину траєкторії деформації в просторі вектору деформації.

По аналогії з величиною e_p пластичність пористих матеріалів будемо характеризувати накопиченою до моменту руйнування пластичною деформацією матеріалу основи:

$$\Gamma_{op} = \int_0^{t_p} \dot{\gamma}_0 d\tau, \quad (4.2)$$

де

$$\dot{\gamma}_0 = \sqrt{\frac{f_1(\theta)\dot{\gamma}^2}{1-\theta} + \frac{f_2(\theta)\dot{\varepsilon}^2}{1-\theta}} \quad (4.3)$$

- інтенсивність швидкостей деформацій матеріалу основи,

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\varepsilon}\right)\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}\delta_{ij}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\dot{\varepsilon}_u \quad (4.4)$$

- інтенсивність девіатора швидкостей деформацій,

θ - пористість,

$f_1(\theta), f_2(\theta)$ - функції пористості, які залежать від гранулометричного складу порошку, умов пресування, спікання та ін.;

$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ij}\delta_{ij}$ - швидкість відносної зміни об'єму;

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ - компоненти тензора швидкостей деформацій.

Вибір e_p та Γ_{op} в якості кількісної оцінки пластичності не є оптимальним. Цей недолік особливо вагомий при оцінці пластичності в процесах немонотонного навантаження, оскільки матеріал при такій деформації стає анізотропним. А в основі прийнятого нами визначення пластичності (формули (1.1), (1.3)) лежить припущення, що всі приращення деформацій рівноправні і

дають однаковий вклад в процес накопичення пошкоджень. Фізично більш обґрунтованим є вибір в якості міри пластичності роботи пластичної деформації:

$$A = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} . \quad (4.5)$$

Хоча такий підхід веде до значних ускладнень розрахунків, в окремих випадках в якості міри пластичності будемо використовувати також роботу пластичної деформації A .

8.3. Характеристики напруженого стану

Для характеристики напруженого стану і оцінки його впливу на пластичність доцільно використовувати інваріантні характеристики, які дозволяють досліджувати траєкторії навантажень не в просторі тензора напружень, а в просторі його інваріантів, або величин, від них залежних. Такий підхід спрощує використання математичної теорії пластичності і теорії руйнування при аналізі різних процесів обробки тиском.

Вперше фундаментальні дослідження впливу напруженого стану на пластичність металів були здійснені П. Бріджменом [67], Б. І. Бересневим [68,69], Х. Пью [70] та іншими на установках високого тиску. Однак, необхідно відзначити, що тиск рідини, в якій проводяться дослідження, не є повноцінним параметром напруженого стану металу в місті руйнування, а лише частково характеризує умови його навантаження. Тому використовувати залежність пластичності від тиску для дослідження пластичності в процесах обробки тиском без додаткового аналізу не можна.

Пізніше було запропоновано різні методики визначення залежності пластичності від напруженого стану. Найбільшу популярність в технологічній механіці отримали методики, в яких напружений стан характеризують безрозмірними показниками, які визначаються через інваріанти тензора, або девіатора напружень [2, 14, 18, 23, 27, 61, 66, 71, 72]. Частіше всього в розрахунковій практиці використовують показник жорсткості напруженого стану:

$$\eta = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sqrt{3I_2(D\sigma)}} = \frac{3\sigma}{\sigma_u} , \quad (4.6)$$

де $I_1(T_\sigma)$ - перший інваріант тензора напружень;

$I_2(D_\sigma)$ - другий інваріант девіатора напружень;

$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$ - середнє напруження;

σ_u - інтенсивність напружень.

Показник η введений в практику оцінки пластичності С. І. Губкіним [98], В. А. Бабічковим [74] і вперше використаний для побудови діаграм пластичності Г. А. Смірновим-Аляєвим [27]. Діаграми пластичності це експериментальні криві, які відтворюють залежність граничної деформації ε_p від показника жорсткості напруженого стану η . Останнім часом діаграми пластичності

використовуються практично всіма спеціалістами в області обробки тиском для оцінки граничного формозмінення. Однак в роботах В. А. Огороднікова [14, 18], В. Л. Колмогорова і його учнів [4, 11, 15, 72], Ю. Г. Важенцева [16, 75, 76] і ін. експериментально доказано, що однозначність залежності ϵ_p від η порушується при об'ємному напруженому стані.

В роботі [77] при дослідженні залежності умови пластичності від середнього головного напруження σ_2 введено величину (параметр Надаї-Лоде)

$$\mu_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \quad (4.7)$$

яку В. Лоде використовував для вираження σ_2 через величини обох крайніх головних напружень

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\mu_\sigma}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (4.8)$$

С. І. Губкін [73] ввів величину μ_σ для характеристики подібності девіаторів. Значення μ_σ характеризує положення точки σ_2 на діаграмі Мора і втрачає смисл тільки в випадку усебічного стиску. При фіксованому μ_σ характер напруженого стану визначається з точністю до гідростатичного тиску. Тому про μ_σ можна говорити як про величину, яка характеризує форму девіатора, або вид напруженого стану.

Крім показників η і μ_σ в практиці обробки металів тиском використовують багато інших безрозмірних показників або інваріантних характеристик напружено-деформованого стану. Однак показники η і μ_σ мають найбільше поширення і будуть, в основному, використовуватись в даній роботі для описання залежності пластичності від схеми напруженого стану.

8.4. Оцінка пластичності металів

Пластичність металів залежить від великої кількості факторів серед яких, крім природи самого металу, велику роль відіграють термомеханічні параметри процесу. При холодній пластичній деформації основним фактором, який впливає на пластичність, є напружений стан і закон його зміни в процесі навантаження. Для кількісної оцінки впливу напруженого стану на ймовірність руйнування використовують критерії руйнування. Під руйнуванням будемо розуміти появу макротріщини, яка приводить до непоправного браку виробу.

Для оцінки граничного стану використовують, в основному, два підходи. В класичних теоріях міцності набули поширення критерії руйнування, в яких накладаються обмеження на напруження. Таким є, наприклад, критерій Шлейхера-Надаї [78], згідно якому інтенсивність дотичних напружень T при руйнуванні є визначеною для даного матеріалу функцією середнього напруження σ

$$T = f(\sigma). \quad (4.9)$$

Якщо виходити із гіпотези єдиної кривої течії в координатах σ_u - ϵ_u , то із умови (4.9) витікає, що гранична деформація ϵ_p для даного матеріалу не залежить

від історії навантаження. З фізичної точки зору перевага критерію (4.9) в тому, що він враховує подвійний характер руйнування, оскільки одночасно враховується вплив інваріантів дотичних і нормальних напружень. В залежності від виду функції $f(\sigma)$ можна отримати різні формули граничних поверхонь [35, 79], які більш достовірно описують ймовірність руйнування.

Близьким є підхід Давіденкова-Фрідмана [80], в якому враховується експериментально установлений факт, що в залежності від умов навантаження один і той же матеріал може руйнуватися і шляхом відриву, і шляхом зсуву. Тобто при фіксованій температурі і швидкості навантаження руйнування має двоїстий характер. Самий простий спосіб врахування такої двоїстості полягає в одночасному врахуванні дотичних і нормальних напружень. Я. Б. Фрідман з цією метою вводить показник

$$\alpha_1 = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}^{\text{прив}}}, \quad (4.10)$$

де τ_{\max} - максимальне дотичне напруження,

$\sigma_{\max}^{\text{прив}}$ - максимальне значення приведенного нормального напруження розтягу, вирахованого по другій теорії міцності [80].

Тому формулу (1.10) можна переписати в вигляді

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sigma_1 - 2\mu(\sigma_2 + \sigma_3)},$$

де μ - коефіцієнт Пуасона.

Недоліком цього підходу є те, що показник α_1 неоднозначно описує напружений стан, крім того, теорія Я. Б. Фрідмана не враховує вплив історії навантаження на пластичність.

Останнім часом розвиваються критерії руйнування, в яких накладаються обмеження на деформації. Наприклад, в роботі [81] для формулювання умови локального руйнування у вершині тріщини використано двопараметричний критерій руйнування [35]. Згідно [81] умова локального руйнування у вершині тріщини має вид

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(r) = \left(\chi + \frac{1-\chi}{m} \right)^{\frac{1}{n}} = e_p \quad \text{при } r=r_c \quad (4.11)$$

де $m = \left[(1 + \alpha + \beta)^2 - 3(\alpha + \beta + \alpha\beta)^{\frac{1}{2}} \right]$

n - показник степені деформаційного зміцнення,

$\alpha = \sigma_2/\sigma_1$, $\beta = \sigma_3/\sigma_1$,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - головні напруження в межах пластичної зони перед тріщиною,

χ - стала, яка враховує величину крихкості матеріалу [35],

r_c - відстань від вершини тріщини.

Для крихкого матеріалу r_c може корелювати з розміром зерна, відстанню між ферітними прошарками, неметалевими включеннями і ін. При в'язкому

руйнуванні величина ρ_c може бути пов'язана з відстанню між порами або включеннями.

Таким чином критерій (4.11) враховує вид напруженого стану в вершині тріщини, інтенсивність зміцнення, крихкість матеріалу. В критерії (4.11) практично не враховується вплив законів зміни показників напруженого стану α і β на величину граничної деформації e_p .

Близьким до [35, 81] є підхід Г. А. Смірнова-Аляєва [27]

$$\psi = \frac{e_u}{e_p(\eta)}, \quad (4.12)$$

де ψ - використаний ресурс пластичності, який при деформуванні без руйнування менше одиниці. При руйнуванні $\psi=1$,

$$e_u = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u d\tau \quad - \text{ступінь деформації,}$$

$e_p(\eta)$ - діаграма пластичності.

При оцінці величини граничної деформації по (4.12) історія деформування не враховується, а граничну деформацію e_p , при якій має місце руйнування, визначають по діаграмі пластичності $e_p(\eta)$ по відомому значенню η . Такий підхід в окремих випадках може привести до значних похибок, до 30% і більше [18].

Критерій руйнування В. Л. Колмогорова [61] має більш фундаментальне фізичне обґрунтування. При його розробці використано гіпотезу про пропорціональну залежність між інтенсивністю накопичення пошкоджень і приростом ступені деформації. Дана гіпотеза запропонована В. В. Новожиловим [82] і отримала експериментальне підтвердження для монотонного навантаження в роботах [11, 83]. Умова руйнування по В. Л. Колмогорову записується в вигляді

$$\psi = \int_0^{t_p} B(\tau) \frac{\dot{\varepsilon}_u}{e_p(\eta(\tau))} d\tau = 1, \quad (4.13)$$

де $B(\tau)$ - величина, яка описує швидкість розвитку тріщин і їх заліковування при холодній пластичній деформації.

Використання критерію В. Л. Колмогорова в формі (4.13) практично неможливе, так як в літературі не приводяться дані про коефіцієнт $B(\tau)$. Тому цей коефіцієнт приймають рівним одиниці. Тоді при простому навантаженні ($\eta=\text{const}$) критерій (4.13) співпадає з (4.12). Необхідно також відмітити, що критерій (4.13) аналогічний критерію А. А. Ільюшина [84]

$$\int_0^{t_p} \frac{d\tau}{t_r(\sigma(\tau))} = 1, \quad (4.14)$$

де $t_r(\sigma)$ - час руйнування зразка в умовах повзучості (при сталому напруженні σ),

t_p - час деформування до руйнування.

Критерій (4.14) побудований на основі гіпотези про справедливість лінійного закону накопичення пошкоджень при повзучості і не враховує впливу історії навантаження на інтенсивність накопичення пошкоджень.

Г. Д. Дель, В. А. Огородніков і В. Г. Нахайчук, виходячи із гіпотези про нелінійний закон накопичення пошкоджень при пластичній деформації одержали критерій руйнування [66]

$$\psi = \int_0^{e_p} n \frac{e_u^{n-1}}{e_p(\eta)^n} de_u = 1, \quad (4.15)$$

де
$$n = 1 + a \frac{d\eta}{de_u}. \quad (4.16)$$

Константа а для досліджених в роботі [66] матеріалів виявилась рівною 0.2.

Експериментальна перевірка [18] показала, що для шляхів деформування середньої і великої кривизни критерій (4.15) практично непридатний. Тому залежність (4.16) була уточнена В. А. Огородніковим і рівняння (4.16) замінено наступним [18]

$$n = 1 + a \cdot \arctg \frac{d\eta}{de_u}. \quad (4.17)$$

Критерій (4.15) враховує вплив історії навантаження, а також нелінійність залежності між приростом ступені деформації e_u і густиною пошкоджень. При $\eta = \text{const}$ ($d\eta/de_u = 0$), критерій (4.15) співпадає з (4.13) і розрахунки граничних деформацій дають однакові результати. Для складних навантажень похибка при розрахунках по критерію (4.13) перевищує 20% [18,66]. Тому при складному монотонному навантаженні для оцінки ймовірності руйнування необхідно надати перевагу критерію (4.15) [214 - 216].

Теорія деформовності, в основу якої покладена модель накопичення пошкоджень (4.15), отримала подальший розвиток в роботах О. О. Розенберга [86, 87, 88], присвячених оптимізації процесів деформуючого протягування [88] та комбінованих процесів протяжки зі згином трубних заготовок. Використання гіпотез, покладених в основу критерію (4.15), в названих роботах оправдано, так як в більшості схем формозмінення має місце плоский напружений стан, тому вплив об'ємності напруженого стану незначний.

В випадку немонотонного навантаження механізм накопичення і заліковування дефектів суттєво міняється [12, 83, 89, 90, 91]. Розглянуті вище критерії не враховують особливостей процесу накопичення пошкоджень при немонотонній деформації і не можуть бути використані для оцінки пластичності в процесах з немонотонним навантаженням.

Для кількісної оцінки впливу немонотонної деформації на пластичність С. Менсон [92] виходячи із результатів експериментальних досліджень, запропонував рівняння, яке описує залежність між числом циклів N і розмахом (амплітудою) пластичної деформації в циклі Δe_u

$$\Delta e_u N^{\frac{1}{a}} = c, \quad (4.18)$$

де a, c - сталі, які залежать від властивостей матеріалу.

Вважаючи, що інтенсивність пластичного розпушення на будь-якому етапі знакозмінної деформації не залежить від попередньої деформації А. А. Богатов [13] запропонував використаний за n етапів знакозмінного деформування ресурс пластичності визначати підсумовуванням. При цьому на кожному i -му етапі використаний запас пластичності визначається формулою

$$\psi = \sum_{i=1}^n \int_0^{e_{ui}} \frac{ae_u^{a-1}}{e_p^a} de_u. \quad (4.19)$$

Підінтегральний вираз в (4.19) отримано раніше Г. Д. Делем та В. А. Огородніковим в роботі [66], виходячи із уявлень про степеневу залежність між накопиченою пластичною деформацією і пластичним розпушенням. Величина a залежить від фізико-механічних властивостей матеріалу і умов деформування. Для жорстких схем напруженого стану $a=3$, а при усебічному стиску a наближається до одиниці [13].

В умові (4.19) за межу пластичності прийнята скалярна величина, тому ця умова не враховує направленого характеру пошкоджень і не описує анізотропію пластичності деформованого металу, із умови не впливає здатність тіл, зруйнованих при одному напруженому стані (наприклад, при розтягу), підлягати послідовним значним деформаціям при іншому напруженому стані (наприклад, при стиску). Крім того, при знакозмінному навантаженні умова (4.19) не враховує впливу величин амплітуд деформацій, що безумовно приведе до помилок при розрахунках використаного ресурсу пластичності.

В зв'язку з цим, останнім часом набула розвитку тензорна модель накопичення пошкоджень при немонотонній деформації. Так як пошкодження є функціоналами трьохвимірних тензорів напружень, то вони можуть бути тільки трьохвимірними тензорами або сукупністю тензорів деяких порядків. Найпростіший варіант теорії накопичення пошкоджень макрочастинки будується в припущенні, що процес накопичення пошкоджень описується симетричним тензором другого рангу [84]. Ідея О. А. Ільюшина отримала розвиток в роботах Г. Д. Деля [5], І. А. Кийко [20], А. А. Мішуліна і В. М. Михалевича [6,7,8]. В якості міри пошкоджень в названих роботах прийнято другий інваріант девіатора пошкоджень ψ_{ij} , який будується як функціонал, що залежить від тензора приращень деформацій, схеми напруженого стану і фізико-механічних властивостей матеріалу.

Г. Д. Дель [5], вважає, що руйнування появляється тоді, коли деяка функція інваріантів тензора ψ_{ij} досягає визначеного значення. Перший інваріант цього тензора дорівнює нулю. Нехтуючи впливом третього інваріанта, Г. Д. Дель записав умову руйнування в вигляді

$$\psi_{ij}\psi_{ij}=1. \quad (4.20)$$

Г. Д. Дель розробив тензорно-лінійну модель накопичення пошкоджень, згідно якій компоненти тензора пошкоджень визначаються формулою

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_u^*} F(e_u, \eta, \mu) \beta_{ij} de_u, \quad (4.21)$$

де $\beta_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{de_u}$ - компоненти направляючого тензора прирощень деформацій,

$F(e_u, \eta, \mu)$ - позитивна функція, яка визначається механічними властивостями матеріалу, $F = \frac{d\varphi}{de_u}$, а функція φ вибрана в вигляді

$$\varphi = (1-a) \frac{e_u}{e_p} + a \left(\frac{e_u}{e_p} \right)^2, \quad (4.22)$$

де a коефіцієнт прийнятий рівним 0.5.

А. А. Мишуліним і В. М. Михалевичем [6] розроблена тензорно-нелінійна модель накопичення пошкоджень, яка являється узагальненням розглянутого вище варіанту лінійної моделі. Виходячи із загального зв'язку між двома тензорами, розглянутого О. А. Ільюшиним, в роботі [6] одержано наступний вираз для компонент девіатора пошкоджень

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_u^*} \left(A\beta_{ij} + B \left(\beta_{ik}\beta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \right) \right) de_u, \quad (4.23)$$

де A і B деякі функції.

Якщо в межах окремих етапів деформація являється простою ($\beta_{ij}=\text{const}$), вираз (4.23) перетворюється до виду

$$\psi_{ij} = a\beta_{ij} + b \left(\beta_{ik}\beta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \right), \quad (4.24)$$

де a і b - первісні функцій A і B , які виражаються через монотонно зростаючу функцію накопичення пошкоджень

$$\varphi = (1-c) \frac{e_u}{e_p} + c \left(\frac{e_u}{e_p} \right)^2. \quad (4.25)$$

В роботі [6] прийнято $A=da/de_u$, $B=db/de_u$, $a=(a_1-b_1)\varphi$, $b=b_1\varphi$, a_1 , b_1 - коефіцієнти.

Величина b_1 враховує вклад нелінійного члена в (4.23). Якщо прийняти $b_1=0$, то формула (4.23) переходить в (4.21).

На рис.1.1 пластичність металів при двохетапному деформуванні відмічена експериментальними точками і описана лінійною і нелінійною моделями накопичення пошкоджень [5, 6]. На цьому рисунку ψ_1 і ψ_2 використаний ресурс пластичності на першому і другому етапах деформування. Із аналізу приведених на рисунку результатів витікає, що при двохетапному деформуванні обидва підходи задовільно описують експериментальні результати.

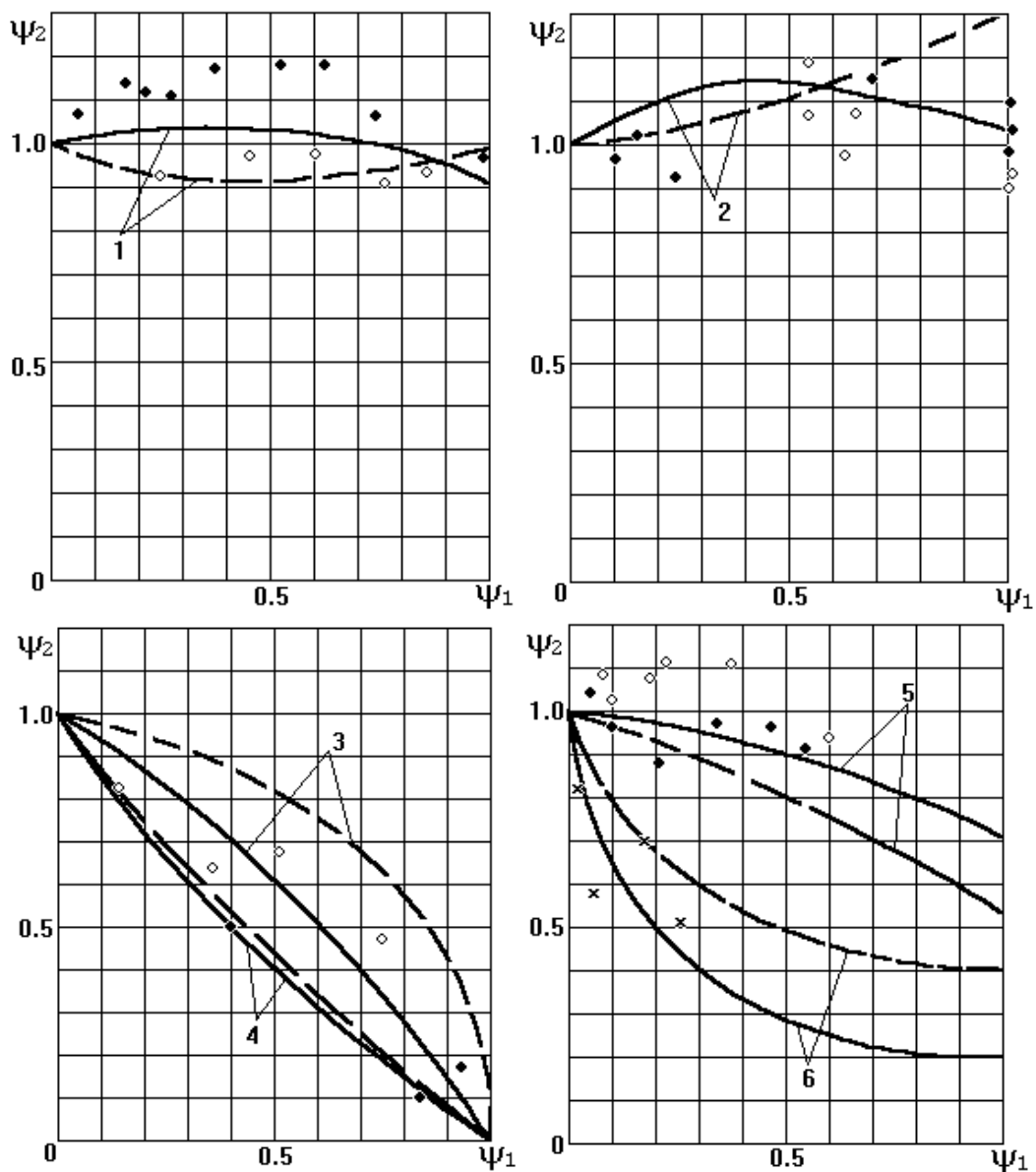


Рис. 4.1. Пластичність металів при двохетапному деформуванні
 – – – лінійна модель ($a=0.5$); ——— нелінійна модель. 1 - кручення-розкручування (о - 9ХС, • - 45); 2 - розтяг-стиск, $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=0.25$ (о - 9ХС, • - Р6М5); 3 - розтяг-кручення, $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=0.4$ (о - Р6М5); 4 - кручення-розтяг, $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=2.5$ (• - Р6М5); 5 - стиск вісевий-стиск поперечний, (о - 9ХС, • - Р6М5); 6 - стиск-розтяг, $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=4$ (× - 9ХС)

Особливістю розглянутих вище методів є те, що в основу критеріїв (4.12), (4.13), (4.15), (4.19) покладена гіпотеза про те, що залежність пластичності металів від схеми напруженого стану описується діаграмою пластичності $e_p(\eta)$.

Такий же недолік характерний і для критеріїв, які описують немонотонне деформування, так як для апроксимацій функцій пошкоджень, які є первісними підінтегральних виразів в критеріях (4.21), (4.23), також використана діаграма пластичності (4.22), (4.25).

Задовільне співпадання з експериментальними результатами розрахункової моделі в цьому випадку пояснюється тим, що розглянуті результати двохетапного деформування. На кожному етапі мав місце лінійний або плоский напружений стан. Однак із результатів досліджень останніх років витікає, що при об'ємному напруженому стані, а також в деяких випадках плоского напруженого стану, значення граничної деформації ϵ_p виявляються різними для схем, які характеризуються одним і тим же значенням показника напруженого стану η [15, 16, 75, 76, 93].

Більшість дослідників вважають, що для характеристики експериментальної залежності пластичності від напруженого стану необхідно використовувати не менше двох показників напруженого стану. В. А. Огородніков [93] вперше висунув гіпотезу про те, що на пластичність впливає третій інваріант тензора напружень $I_3(T_\sigma)$. Для кількісної оцінки цього впливу ним введено показник напруженого стану, який характеризує залежність пластичності від третього інваріанта тензора напружень і відрізняється від нуля тільки при об'ємному напруженому стані,

$$\chi = \frac{\sqrt{I_3(T_\sigma)}}{\sqrt{3I_2(D_\sigma)}}. \quad (4.26)$$

В роботах [15, 16, 75, 76] рекомендують в якості другого показника напруженого стану використовувати параметр Надаї-Лоде по напруженнях μ_σ . Експериментальні залежності ϵ_p від η при фіксованих значеннях μ_σ одержані А. А. Богатовим, С. В. Смірновим [15] (рис. 4.2), а також Ю. Б. Важенцевим, В. В. Ісаєвим [16, 75, 76] (рис. 1.3). Із приведених (див. рис. 1.2, 1.3) залежностей ϵ_p від η і μ_σ витікає, що гранична деформація ϵ_p при об'ємному напруженому стані залежить від двох показників η і μ_σ . Однак скористатись отриманими графічними залежностями для практичних розрахунків використаного ресурсу пластичності досить складно, а в загальних випадках складного навантаження в умовах об'ємного напруженого стану, практично неможливо.

Такий же недолік характерний і для критеріїв, які описують немонотонне навантаження (4.20), (4.23), так як апроксимуючі функції (первісні підінтегральних функціоналів в критеріях (4.21), (4.23) базуються на діаграмі пластичності. Це зумовлено тим, що явної залежності накопиченої до моменту руйнування деформації ϵ_p від показників η і μ_σ або інших еквівалентних їм безрозмірних характеристик напруженого стану в даний час не одержано.

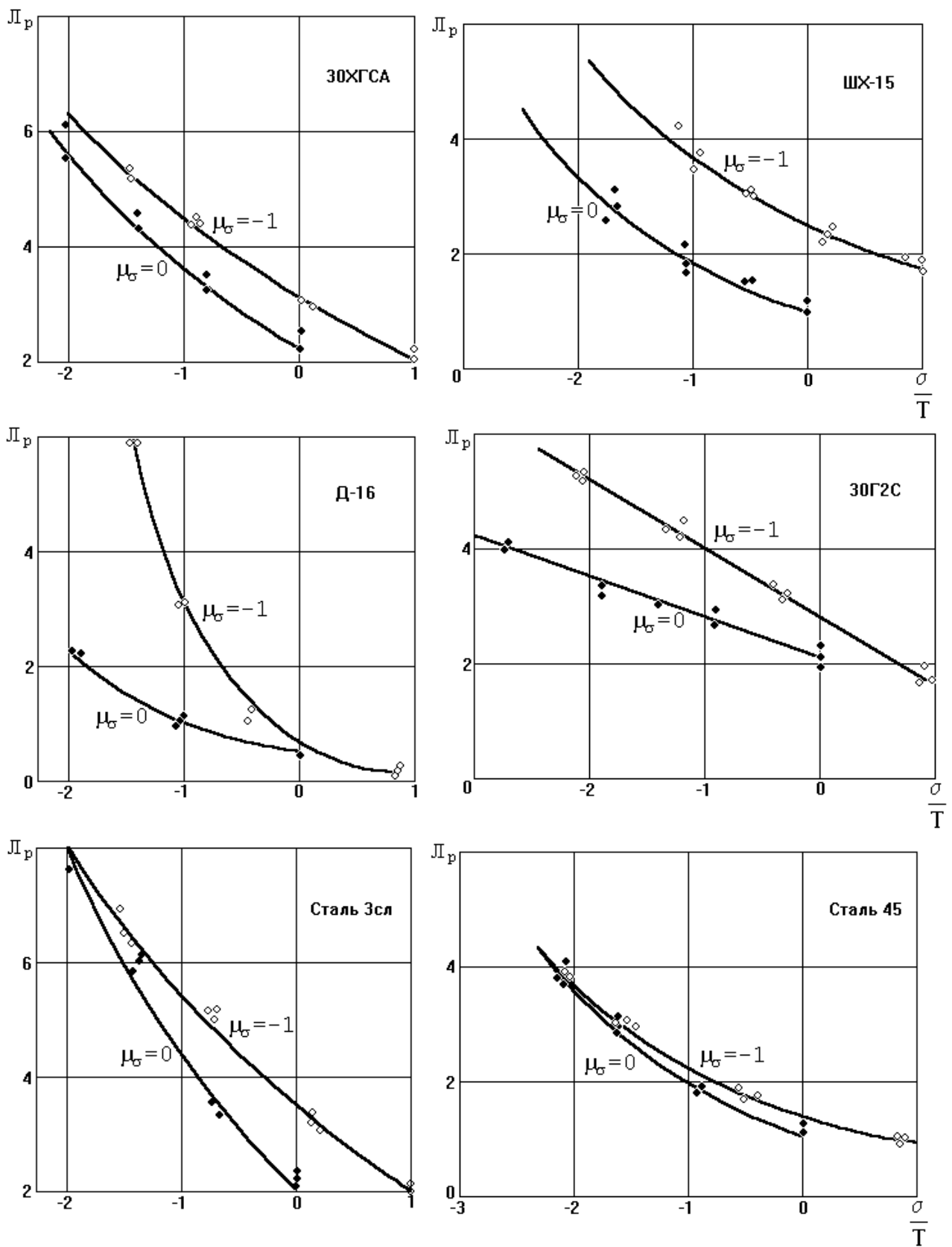


Рис. 4.2. Діаграми пластичності при $\mu_\sigma = \text{const}$ [19]

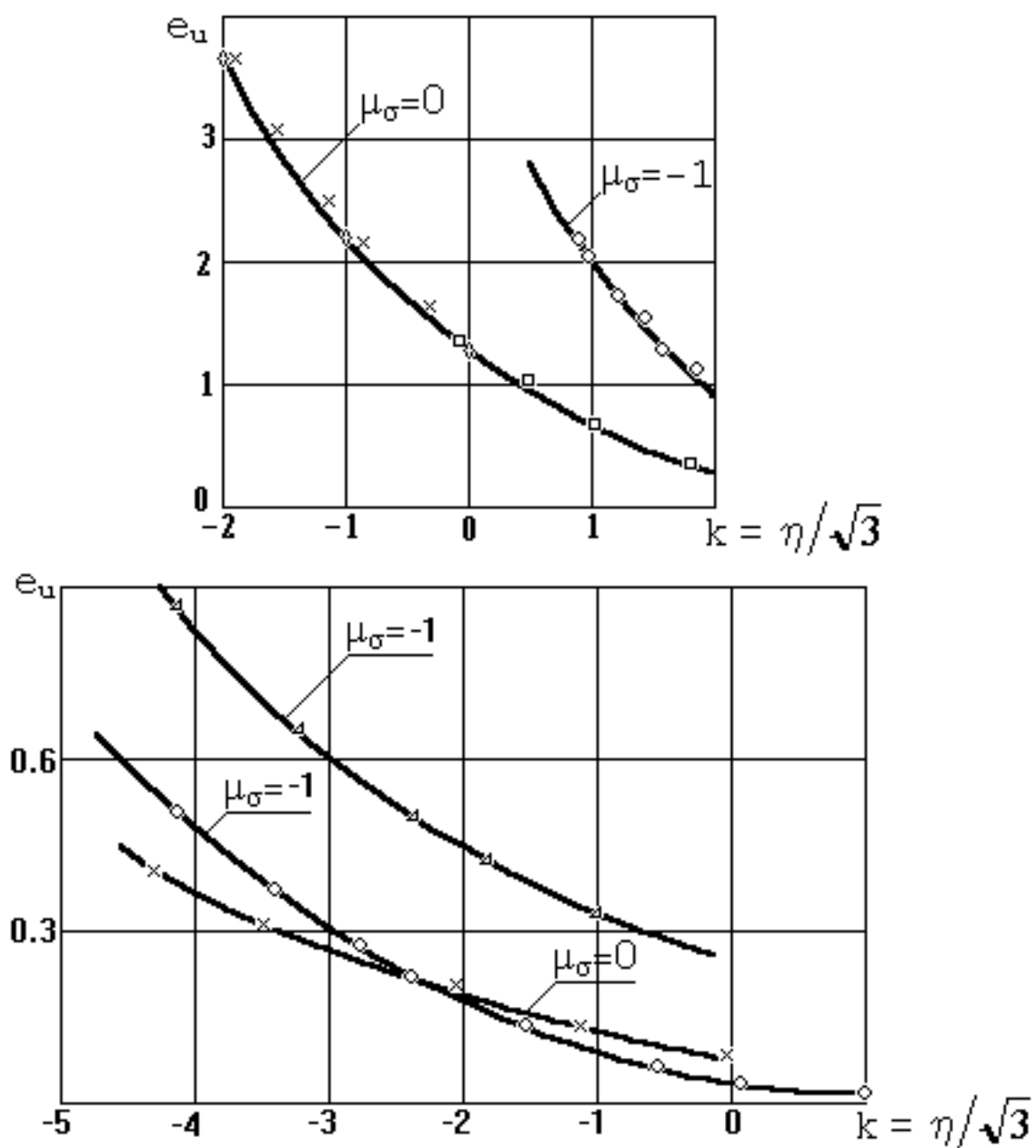


Рис. 4.3. Діаграми граничної пластичності

а - сталь 30Х, б - сплав АЛ15В; Δ , \times , o - дослідження суцільних зразків по програмах $q = \text{const}$; \diamond - кручення суцільних зразків по програмах $k = \text{const}$; \square - розтяг трубчатих зразків по програмах $q = \text{const}$.