

# Наукова теорія пластичності і деформовності металів

Методичні вказівки для практичних занять

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Вінницький національний аграрний університет

Кафедра загальнотехнічних дисциплін та охорони праці

## НАУКОВА ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ І ДЕФОРМОВНОСТІ МЕТАЛІВ

Методичні вказівки для практичних занять

для аспірантів

за напрямком підготовки

132 – «Матеріалознавство»

Затверджено

на засіданні навчально-методичної Ради

Вінницького національного аграрного

університету

протокол №6 від 7 грудня 2020 р.

Вінниця ВНАУ 2020

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни «Наукова теорія пластичності і деформовності металів» для аспірантів за напрямком підготовки 132 – «Матеріалознавство» / Укл.: Р. І. Сивк. – Вінниця: ВНАУ, 2020. - с.

Затверджено на засіданні кафедри  
загальнотехнічних дисциплін та охорони праці  
протокол №1 від 25 серпня 2020 р.

Укладач: Сивак Роман Іванович, д. т. н., доцент.

Відповідальний за випуск: Сивак Р. І., д. т. н., доцент

Навчально-методичне видання

© Р. І. Сивак

©Вінницький національний аграрний університет, 2020

# ЗМІСТ

## Вступ

### 1. Основи теорії пластичності

- 1.1. Основні визначення
- 1.2. Статичні, геометричні та фізичні рівняння
- 1.3. Умови пластичності
- 1.4. Теорія малих пружно-пластичних деформацій
- 1.5. Теорема про розвантаження
- 1.6. Залежності між інтенсивностями напружень і деформацій
- 1.7. Постановка задачі теорії пластичності

### 2. Основи теорії деформовності

- 2.1. Технологічна деформовність металів
- 2.2. Міра пластичності
- 2.3. Характеристики напруженого стану
- 2.4. Оцінка пластичності металів

## Список літератури

## ВСТУП

Прагнення до зменшення маси машин при покращенні їх якості викликає необхідність використання в процесі проектування найбільш удосконалених методів розрахунку, в яких по можливості повно відображені дійсні умови роботи конструкцій і механічних властивостей матеріалів.

При проектуванні конструкцій, споруд і машин часто приходиться розглядати деформацію виробів за межами пружності. Це дозволяє виявити додаткові ресурси міцності конструкцій. Так наприклад, у розповсюдженому методі розрахунку по допустимим напруженням за граничний стан приймають такий, при якому еквівалентне напруження в найбільш напруженій точці виробу, що виготовлений із пластичного матеріалу, досягає величини границі текучості.

В технологічних процесах виробництва певних деталей передбачені спеціальні операції, які дозволяють шляхом пластичного деформування підвищити несучу здатність деталей в межах пружності.

Для встановлення найбільш ефективних умов пластичного деформування, правильного визначення розмірів заготовок, визначення залишкових напружень, необхідних для розрахунку на міцність попередньо пластично деформованих деталей, потрібно вміти виконувати розрахунки за межами пружності.

Технологічні процеси обробки металів тиском ґрунтовані на здатності металу пластично деформуватися. Розрахунки таких процесів необхідні для правильного вибору потужності обладнання, в багатьох випадках вони дозволяють точно встановлювати розміри заготовок, вияснити оптимальні умови деформування, забезпечувати виготовлення виробів високої якості і оцінювати міцність заготовок в процесі деформування.

Методи оцінки деформовності металів в процесах обробки тиском базуються на феноменологічній теорії деформовності, перевага якої перед іншими теоріями руйнування полягає в тому, що вона враховує вплив історії навантаження на інтенсивність накопичення пошкоджень. Теорія деформовності дозволяє також одержати кількісну оцінку впливу параметрів технологічного процесу на ймовірність руйнування і, на основі цього, раціонально використати резерви пластичності

# 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ

## 1.1. Основні визначення

Пластичність – це властивість матеріалу зазнавати залишкової деформації без порушень суцільності під дією навантаження. Теорія пластичності встановлює загальні закони утворення в твердих тілах пластичних деформацій і появу напружень, які діють на всіх стадіях пластичного деформування.

Теорія пластичності розглядає тіла, які не підкоряються властивостями пружності. Після усунення з таких тіл зовнішнього впливу вони не відновлюють первісну форму, тобто отримують залишкові деформації. Тіло, що не підкоряється законам пружності з самого початку навантаження, називають пластичним тілом. Діаграма розтягу такого тіла зображена на рис. 1.1, а.

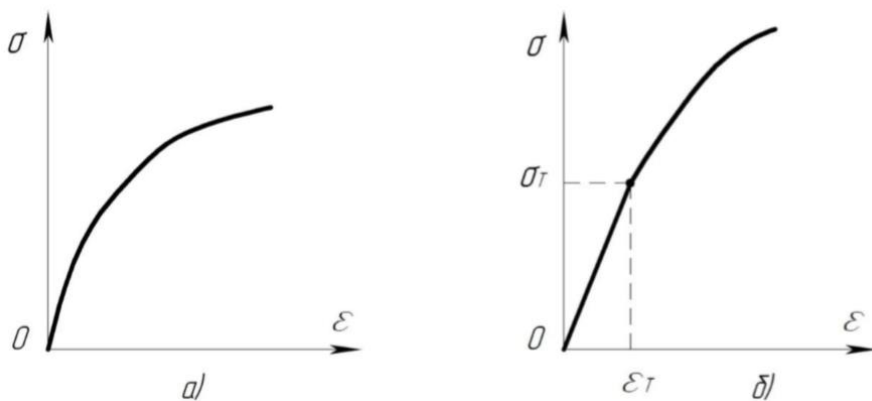


Рис. 1.1

Якщо ж тіло на початку навантаження має пружні властивості (ділянка Оа на рис 1.1, б) і тільки з деякої стадії в ньому виникають залишкові деформації, то його називають пружно-пластичним тілом. У теорії пластичності розглядають два різні завдання: - вивчення процесу деформування тіл на всіх стадіях навантаження; - визначення тільки несучої здатності. Перше завдання відноситься до математичної теорії пластичності. У ній розглядають визначення напружень, деформацій і переміщень від заданого навантаження в будь-який момент навантаження, визначення границі між пружною і пластичною зонами, визначення залишкових напружень і деформацій при частковому і повному знятті навантаження.

Друге завдання відноситься до прикладної теорії пружності. У ній досліджують лише граничний стан тіла без вивчення проміжних стадій деформування. Закони пластичного деформування залежать від того, зростає або зменшується навантаження. Залежно від цього розрізняють два види деформації: активну і пасивну. Ці види деформування легко розмежувати при простому розтягустиску, чистому зсуві і чистому згині. Активною в цих випадках буде деформація, при якій напруження зростає за абсолютною величиною, а пасивною – при якій напруження зменшується за абсолютною величиною. При

складному напруженому стані активною називають деформацію, при якій в даний момент інтенсивність напружень  $\sigma_i$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (1.1)$$

має значення, що перевищує за абсолютною величиною всі попередні її значення. Пасивною в цьому випадку називають таку деформацію, при якій інтенсивність напружень за абсолютною величиною менша хоча б одного з попередніх її значень. При активній деформації пластична деформація зростає, при пасивній – залишається незмінною. Активну деформацію називають процесом навантаження, а пасивну – іноді розвантаженням. На закони пластичного деформування істотно впливає характер навантаження тіла. Розрізняють просте і складне навантаження. Простим називають такий процес навантаження, при якому зовнішні сили зростають пропорційно одному параметру. Така зміна навантажень забезпечує сталість напрямків головних напружень і деформацій в кожній точці тіла. Складним є таке навантаження, при якому зростання хоча б однієї з сил не відповідає пропорційне зростання інших сил.

## 1.2. Статичні, геометричні та фізичні рівняння

Як у теорії пружності, так і в теорії пластичності напружений стан у кожній точці тіла, що знаходиться під дією об'ємного і поверхневого навантаження, визначається шістьма складовими напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Ці напруження пов'язані трьома диференціальними рівняннями рівноваги Нав'є

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

а на поверхні тіла повинні задовольнятися умови

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k; \\ Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k; \\ Z_g &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Напружений стан у точці тіла також може бути охарактеризований трьома інваріантами

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ S_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

або

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ S_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ S_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Для дослідження напруженого стану використовують також такі інваріантні величини як інтенсивність дотичних напружень

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.6)$$

та інтенсивність нормальних напружень (3.1).

Деформований стан у точці тіла у теорії пластичності також визначають шістьма складовими деформацій, які пов'язані формулами Коші

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

з трьома складовими переміщень  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Деформації повинні задовольняти шість рівнянь суцільності Сен-Венана

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.8)$$



Аналогічно до головних напружень, що діють у теорії пружності, у теорії пластичності вводять поняття головних деформацій, тобто таких, у площині яких відсутні зсуви.

Кубічне рівняння, отримане для визначення головних деформацій  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  має коефіцієнти

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ E_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\ E_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Ці коефіцієнти є інваріантами деформованого стану.

Порівнюючи першу формулу залежностей (1.9) з виразом об'ємної деформації

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta \quad (1.10)$$

робимо висновок про те, що об'ємна деформація у теорії пластичності також є інваріантною величиною.

У теорії пластичності застосовують також інваріантну величину, яку називають – інтенсивність деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (1.11)$$

Інтенсивність деформацій – величина, пропорційна куту зсуву на октаедричній (рівнонахилений до координатних площин) площині.

Числовий коефіцієнт у (1.11) вибраний так, щоб при простому розтягу (стиску) та  $\mu=0,5$  інтенсивність деформацій дорівнює лінійній деформації в напрямку розтягу (стиску). Фізичні рівняння, представлені в теорії пружності формулами закону Гука в прямій

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

і зворотній

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \nu \cdot \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \nu \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \nu \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

формі, для застосування в теорії пластичності необхідно перетворити. Віднімемо з обох частин першої формули (3.13) середнє напруження у точці  $\sigma_0$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1 \quad (1.14)$$

і отримаємо

$$\sigma_x - \sigma_0 = \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x - \sigma_0 \quad (1.15)$$

Постійні  $\lambda$  і  $\nu$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot E}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu)}, \quad \nu = \frac{E}{2(1 + \mu)} = G, \quad (1.16)$$

які входять у рівняння (1.15), запишемо так

$$\lambda = \frac{2G \cdot \gamma}{1 - 2\mu}; \quad \nu = G. \quad (1.17)$$

З урахуванням постійних (1.17) і співвідношення  $\Theta = 3\varepsilon_0$ , підставимо (1.10) і модуль об'ємного розширення

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}, \quad (1.18)$$

та співвідношення між модулем зсуву, модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (1.19)$$

у (1.15) і отримаємо

$$\sigma_x - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0). \quad (1.20)$$

Виконавши аналогічні перетворення з другою і третьою формулами закону Гука у зворотній формі для теорії пружності (1.13) приходимо до такої форми закону Гука для теорії пластичності

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= 2G \frac{\gamma_{xy}}{2}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= 2G \frac{\gamma_{yz}}{2}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= 2G \frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Складові деформацій  $\varepsilon_x - \varepsilon_0, \varepsilon_y - \varepsilon_0, \varepsilon_z - \varepsilon_0, \frac{\gamma_{xy}}{2}, \frac{\gamma_{yz}}{2}, \frac{\gamma_{zx}}{2}$  відповідають зміні форми тіла, тому що зміна об'єму відсутня

$$\begin{aligned} \Theta' &= (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Отже, залежності (1.21) встановлюють зв'язок між напруженнями і деформаціями, які відповідають тільки зміні форми тіла. Формулами (1.21) відповідають еквівалентні їм співвідношення

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = 2G \quad (1.23)$$

які для головних напрямків мають такий вигляд

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = 2G \quad (1.24)$$

Якщо ввести поняття головних дотичних напружень і головних зсувів

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2};$$

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad (1.25)$$

то співвідношення (1.23) набуде вигляду

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = G. \quad (1.26)$$

Вираз (1.11) для інтенсивності деформацій перетворимо, замінюючи в ньому деформації напруженнями відповідно до (1.23)

$$\varepsilon_i = \frac{1}{3G\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.27)$$

Порівнюючи інтенсивність деформацій у теорії пластичності, описану залежністю (1.27), із залежністю для інтенсивності напружень у теорії пружності (1.1), отримаємо такі залежності

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{3G} \quad \text{або} \quad G = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \quad (1.28)$$

Враховуючи отримані співвідношення, закон Гука (1.21) у теорії пластичності можна записати у такому вигляді

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_0); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy};$$

$$\sigma_y - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_0); \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz};$$

$$\sigma_z - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_0); \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}. \quad (1.29)$$

Аналогічно можна перетворити формулу (1.26), тобто для головних дотичних напружень і головних зсувів

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \quad (1.30)$$

Співвідношення (1.29) і (1.30) є еквівалентними.

### 1.3. Умови пластичності

Умова пластичності – це умова можливості переходу матеріалу в даній точці тіла з пружного стану в пластичний.

Для лінійного напруженого стану  $\sigma_2=\sigma_3=0$ , пластичні деформації виникають при

$$\sigma_1 = \sigma_T \quad (1.31)$$

Де  $\sigma_T$  - границя текучості (плинності) матеріалу – величина, яку встановлюють дослідним шляхом.

Умова для чистого зсуву має вигляд

$$\tau = \tau_T \quad (1.32)$$

Де  $\tau_T$  - границя текучості (плинності) матеріалу при зсуві.

При плоскому і об'ємному напруженому стані умови пластичності встановлюють на основі гіпотез. Найчастіше використовують дві умови пластичності, які досить правильно визначають перехід матеріалу з пружного стану в пластичний.

Перша умова (умова пластичності Сен-Венана) ґрунтується на припущенні, що пластичні деформації виникають тоді, коли максимальні дотичні напруження досягають границі текучості при чистому зсуві

$$\tau_{\max} = \tau_T \quad (1.33)$$

З опору матеріалів відомо, що

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.34)$$

При лінійному напруженому стані маємо  $\sigma_1 = \sigma_T$  і  $\sigma_3=0$ , тобто

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_T - 0}{2} = \frac{\sigma_T}{2} \quad (1.35)$$

Порівнюючи вираз (1.35) з (1.33), отримаємо

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2} \quad (1.36)$$

Відповідно першу умову пластичності отримують у такому вигляді

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T \quad (1.37)$$

Це співвідношення в опорі матеріалів відповідає третій теорії міцності – теорії найбільших дотичних напружень.

Друга умова (умова пластичності Губера-Мізеса-Генки) ґрунтується на припущенні, що пластичні деформації виникають тоді, коли інтенсивність дотичних напружень досягає деякої постійної для даного матеріалу величини

$$\tau_i = C \quad (1.38)$$

Постійну  $C$  знаходять за результатами випробувань при простому розтягу.

Початок пластичного деформування в цьому випадку буде при таких умовах

$$\sigma_1 = \sigma_T; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (1.39)$$

Підставляючи (1.39) у рівняння (1.6), отримаємо

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_T^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T \quad (1.40)$$

Порівнюючи (1.40) з (1.38), визначимо постійну

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_T \quad (1.41)$$

Підставляючи (1.6) і постійну  $C$  в (1.38), отримаємо другу умову пластичності в такому вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T \quad (1.42)$$

або відповідно до (1.1)

$$\sigma_i = \sigma_T \quad (1.43)$$

Ця умова відповідає четвертій теорії міцності опору матеріалів. Умови пластичності Сен-Венана і Губера-Мізеса-Генки дають близькі результати. Експерименти дещо краще підтверджують другу умову. Крім того, ця умова зручніша з математичної точки зору, тому що нормальні напруження і  $\sigma_i$  можна простіше записати через складові напружень, ніж максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$ . Тому в теорії пластичності частіше використовують умову Губера-Мізеса-Генки.

#### 1.4. Теорія малих пружно-пластичних деформацій

Існуючі теорії пластичності можна розділити на два види. До першого виду належать теорії пружно-пластичних деформацій, які ґрунтуються на рівняннях, що пов'язують напруження і деформації. Ці теорії, як правило, застосовують для розрахунку будівельних конструкцій.

До другого виду відносять теорії пластичної текучості, в основі яких лежать рівняння, що зв'язують напруження і швидкості деформацій. Теорії пластичної текучості застосовують у технологічній практиці.

Існує кілька суперечливих поглядів на механізм утворення пластичних деформацій. Дослідження О.А. Іллюшина дозволили усунути ці протиріччя. Він встановив, що при простому навантаженні і малих деформаціях всі відомі теорії пластичності є окремими випадками загальної теорії пластичності. Ця теорія – теорія малих пружнопластичних деформацій – досить достовірно описує деформування твердих тіл при малих пружних і пластичних деформаціях.

Теорія малих пружно-пластичних деформацій ґрунтується на таких законах, що впливають з експериментів.

Перший закон – закон зміни об'єму. При пружно-пластичних деформаціях твердого тіла, як активних, так і пасивних, об'ємна деформація завжди є пружною і підкоряється закону Гука

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta \quad (1.44)$$

У теорії пластичності зазвичай використовують припущення про нестискуваність матеріалу. В цьому випадку

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad (1.45)$$

тому що  $\sigma_0$  при цьому не дорівнює нулю, відповідно модуль об'ємного розширення  $K$  має дорівнювати нескінченності

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \infty \quad (1.46)$$

Звідси випливає значення коефіцієнта Пуассона

$$\mu = 0,5 \quad (1.47)$$

Отже, між модулем зсуву  $G$  і модулем пружності  $E$  у теорії пластичності є таке співвідношення

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2(1+0,5)} = \frac{E}{3} \quad (1.48)$$

Другий закон – закон зміни форми. При активних пружнопластичних деформаціях, що виникають в умовах простого навантаження, головні осі напружень і деформацій співпадають і відношення головних дотичних напружень до відповідних зсувів для даного елемента тіла постійні, тобто справедливі співвідношення (1.30).

Ці співвідношення можуть бути замінені еквівалентними їм формулами (1.29). Тут необхідно врахувати, що шість формул (1.30) не є незалежними. Дійсно, складаючи перші три з них, отримаємо тотожність  $0=0$ . Отже, формули (1.29) дають систему п'яти рівнянь з шістьма невідомими.

Третій закон: інтенсивність напружень  $\sigma_i$  для даного матеріалу при активній деформації є функцією інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i$

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i) \quad (1.49)$$

Як показують експерименти, в умовах простого навантаження діаграма  $\sigma_i - \varepsilon_i$  для будь-якого напруженого стану подібна діаграмі  $\sigma - \varepsilon$  при розтягу (рис. 3.2). Отже, між  $\sigma_i$  та  $\varepsilon_i$  існує залежність, подібна залежності між  $\sigma$  і  $\varepsilon$  при розтягу

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (1.50)$$

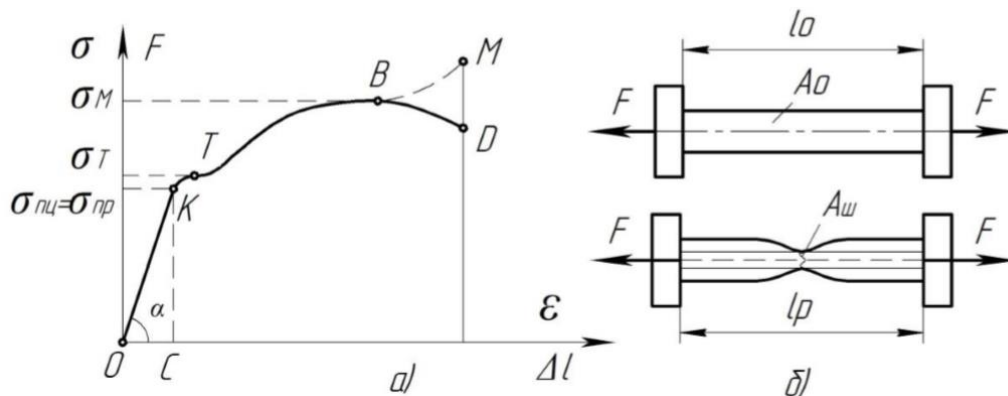


Рис. 1.2

Отже, залежність  $\sigma_i=f(\varepsilon_i)$  для будь-якого напруженого стану можна встановити з дослідів при розтягу.

Аналіз експериментів і рішення часткових завдань теорії пластичності підтверджує, так звану, теорему О. А. Іллюшина про просте навантаження: теорія

малих пружно-пластичних деформацій дає правильні (узгоджені з експериментом) результати у тому випадку, коли процес навантаження тіла є простим.

### **1.5. Теорема про розвантаження**

Розвантаження всього тіла – це процес зміни зовнішніх сил, при якому у всіх областях тіла, де сталася пластична деформація, інтенсивність напружень починає спадати одночасно. Це означає, що тіло зі стадії активної деформації переходить в стадію пасивної деформації. О.А. Іллюшин сформулював і довів теорему про розвантаження: переміщення точки тіла в деякий момент стадії розвантаження відрізняються від їх значень у момент початку розвантаження на величини пружних переміщень, які виникли б у тілі, якби в природному (ненавантаженому) стані до нього були прикладені зовнішні сили, які дорівнюють різниці зовнішніх сил, що діють у зазначені моменти. Це твердження стосується також деформацій і напружень.

Завдяки цій теорії використовують такий порядок визначення напружень, деформацій і переміщень при розвантаженні:

- з рівнянь теорії пластичності визначають напруження, деформації та переміщення, які виникають при найбільшому навантаженні, що діє до початку розвантаження;

- з рівнянь теорії пружності визначають напруження, деформації та переміщення, що спричиняються навантаженнями, які дорівнюють різниці між найбільшими навантаженнями до початку розвантаження і навантаженнями, що залишилися після розвантаження;

- отримують напруження, деформації та переміщення у розглядуваний момент розвантаження як різницю між їх значеннями. Ці значення відповідають найбільшому навантаженню, і значенням, знайденими за величинами навантажень, на які відбулося розвантаження.

### **1.6. Залежності між інтенсивностями напружень і деформацій**

Вид залежності (1.49) між інтенсивністю напружень та інтенсивністю деформацій можна встановити за діаграмою розтягу матеріалу. Розглянемо діаграму (рис. 1.3, а), що складається з прямолінійної Оа і криволінійної аб ділянок.

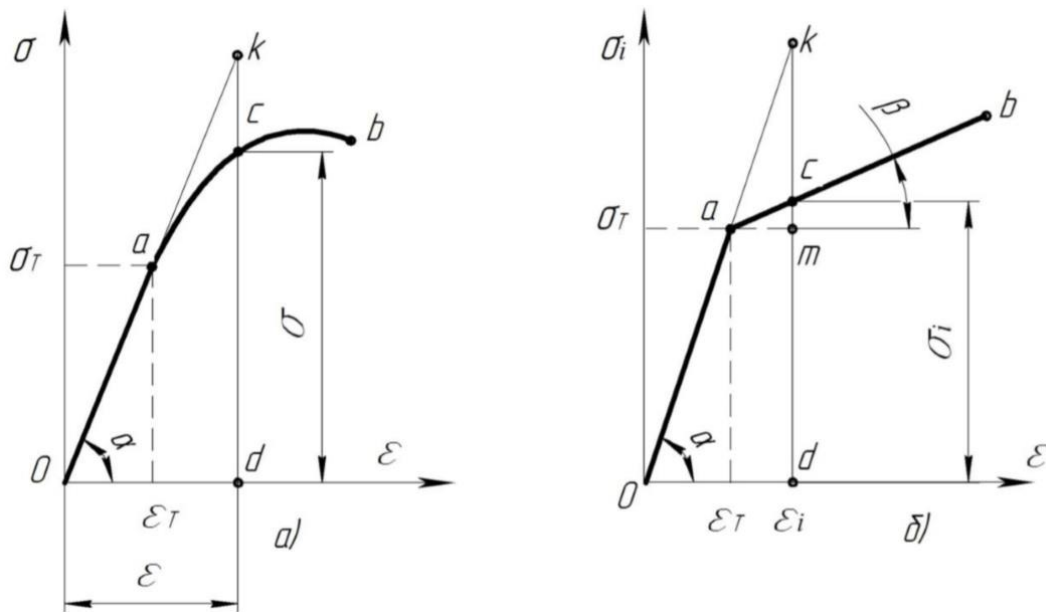


Рис. 1.3

Напруження в довільній точці с можна визначити як різницю відрізків

$$\sigma = kd - kc = \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha - kc. \quad (1.50)$$

Оскільки на діаграмі  $\operatorname{tg} \alpha$  чисельно дорівнює модулю пружності  $E$ , то отримаємо

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - kc = E \cdot \varepsilon \left( 1 - \frac{kc}{E \cdot \varepsilon} \right) = E \cdot \varepsilon \left[ 1 - \omega(\varepsilon) \right] \quad (1.51)$$

Де  $\omega(\varepsilon)$  - функція зниження напруження за межею текучості (плинності) порівняно з напруженнями, отриманими в припущенні, що деформування відбувається за пружним законом

$$\omega(\varepsilon) = \frac{kc}{E \cdot \varepsilon} \quad (1.52)$$

Відповідно до третього закону теорії малих пружно-пластичних деформацій залежність (1.49) повинна мати такий же вигляд як при простому розтягу, тобто

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i \left[ 1 - \omega(\varepsilon_i) \right] \quad (1.53)$$

Розглянемо, який вигляд має функція  $\omega(\varepsilon_i)$  для різних видів діаграми  $\sigma_i - \varepsilon_i$ .

Для діаграми, що складається з двох прямолінійних ділянок (рис. 1.3, б), за межею текучості (ділянка ab) отримаємо

$$kc = kd - md - cm = E \cdot \varepsilon_i - E \cdot \varepsilon_T - E' (\varepsilon_i - \varepsilon_T) \quad (1.54)$$

або

$$kc = (E - E') \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_T), \quad (1.55)$$

Де  $E' = \operatorname{tg} \beta$



Тепер функція зниження напружень набуде такого вигляду

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{(E - E') \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_T)}{E \cdot \varepsilon_i} = \lambda \left( 1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right) \quad (1.56)$$

Де  $\lambda$  - відносне зниження модуля пружності при переході в пластичну область

деформування  $\lambda = \frac{E - E'}{E}$ .

Отже, функція  $\omega(\varepsilon_i)$  для діаграми (рис. 1.3, б) буде такою

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T \\ \omega &= \lambda \left( 1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right) && \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T \end{aligned} \quad (1.57)$$

Для ідеального пружно-пластичного матеріалу, який підкоряється діаграмі Прандтля (рис. 1.4, а), співвідношення (1.57) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T \\ \omega &= \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} && \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T \end{aligned} \quad (1.58)$$

Для матеріалу, діаграма якого не має прямолінійних ділянок (рис. 1.4, б), залежність  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  можна прийняти у степеневому вигляді

$$\sigma_i = \sigma_T \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} \right)^m \quad (1.59)$$

Де  $0 < m < 1$

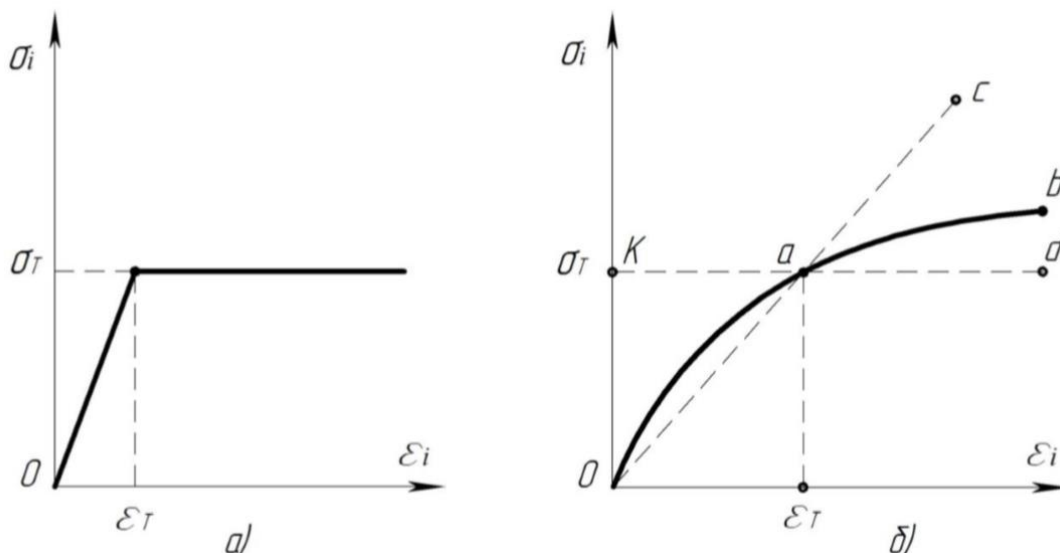


Рис. 1.4

При  $m=1$  отримаємо закон деформування ідеально пружного тіла

$$\sigma_i = \sigma_T \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} = E \cdot \varepsilon_i \quad (1.60)$$

На рис. 1.4, б цьому закону відповідає штрихова лінія Оас.

При  $m=0$  отримаємо закон деформування ідеально пластичного тіла

$$\sigma_i = \sigma_T \quad (1.61)$$

На рис. 1.4, б цьому закону відповідає штрихова лінія Kad

### 1.7. Постановка задачі теорії пластичності

У теорії пластичності маємо 17 невідомих, які є функціями координат  $x, y, z$ .

- шість складових напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- шість складових деформацій  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- три складових переміщень  $u, v, w$
- інтенсивність напружень  $\sigma_i$
- інтенсивність деформацій  $\varepsilon_i$

Для визначення цих невідомих є 17 рівнянь

- три диференціальних рівняння рівноваги (1.2)
- шість фізичних рівнянь закону Гука (1.29), причому тільки п'ять з них є незалежними. Як шосте рівняння беруть закон зміни об'єму (1.44)
- шість формул Коші (1.7)
- залежність між інтенсивністю напружень і деформацій (1.49)
- вираз для інтенсивності деформацій (1.11)

Отже, при активній деформації і простому завантаженні завдання має математичне рішення. Однак, практично отримати його важко, тому що основні співвідношення виражені диференціальними рівняннями в частинних похідних, притому нелінійними.

Для матеріалу з слабо вираженим зміцненням дійсну діаграму деформування можна замінити діаграмою ідеального пружно-пластичного тіла (рис. 1.4, а). Тоді замість шести фізичних рівнянь (1.29) можна взяти одну з умов пластичності, наприклад (1.61). При такій заміні можна однозначно визначити деформації для тіла, яке повністю знаходиться в пластичному стані. Однозначне рішення в цьому випадку можна отримати тільки тоді, коли в тілі поряд з пластичними є і пружні зони.

При вирішенні задачі теорії пластичності можуть бути використані ті ж способи, що і в теорії пружності: рішення в напружених, рішення в переміщеннях і змішане рішення.

Математичне рішення задачі може бути отримано тими ж методами, що і в теорії пружності: прямим, зворотним і напівзворотним. Ефективним є наближений метод пружних рішень, запропонований О. А. Іллюшиним.

## **2. Основи теорії деформовності**

### **2.1. Технологічна деформовність металів**

Методи оцінки деформовності металів в процесах обробки тиском базуються на феноменологічній теорії деформовності, перевага якої перед іншими теоріями руйнування полягає в тому, що вона враховує вплив історії навантаження на інтенсивність накопичення пошкоджень. Теорія деформовності дозволяє також одержати кількісну оцінку впливу параметрів технологічного процесу на ймовірність руйнування і, на основі цього, раціонально використати резерви пластичності.

В ряді випадків пластична деформація може приводити до заліковування дефектів. Досліди з мідними пористими зразками показали [1], що при гідростатичному стиску до 10000 МПа без пластичної деформації, дефекти в металі зберігаються. Після розтягу тих же зразків під гідростатичним тиском 400 МПа мало місце повне заліковування мікропор, а пластичність досягла рівня пластичності бездефектного матеріалу.

Інтенсивність пластичного розпушення металу може бути значно понижена, якщо змінювати характер навантаження, наприклад, при знакозмінній деформації [2-10]. Зменшення інтенсивності накопичення пошкоджень в цьому випадку може бути зумовлено виникненням нових смуг ковзання при зміні знака напружень.

Більш складним є механізм накопичення пошкоджень при пластичній деформації пористих тіл. В цьому випадку одночасно протікають як процеси пластичного розпушення, так і процеси заліковування пор. Крім того пори сповільнюють процеси створення небезпечних скупчень дислокацій, так як служать стоками для останніх. Тому пори, в деякій мірі, відіграють роль “каталізаторів” пластичної деформації. На користь наявності названих механізмів свідчать досить великі пластичні деформації пористих тіл.

Необхідно також відмітити, що пластичне розпушення супроводжує любую пластичну деформацію. І. Р. Крякін, І. Л. Міркін, Л. П. Трусов досліджували пластичне розрихлення при повзучості і установили, що критична густина пор, при якій настає руйнування, не залежить від того, яким шляхом така пористість досягнута. Однак і при повзучості інтенсивність накопичення і величина граничної деформації визначається історією навантаження тобто залежить від виду траєкторії навантаження.

В роботах [11-13] експериментально встановлено, що дефекти, які появляються при значеннях використаного ресурсу пластичності більших 0.3...0.4 не заліковуються при послідовному відпалі. Тому ці дефекти викликають погіршення фізико-механічних характеристик виробів, а також знижують їх експлуатаційні характеристики. Даний результат свідчить про

актуальність проблеми визначення використаного ресурсу пластичності не тільки з точки зору отримання готових виробів шляхом пластичної деформації без мікротріщин, а також з точки зору гарантії надійних експлуатаційних характеристик цих виробів. Важливим залишається також питання оптимізації технологічних процесів шляхом мінімізації величини використаного ресурсу пластичності і його раціонального розподілу по об'єму деформуємої заготовки. Надійний розв'язок цілого ряду таких задач дозволяє одержати феноменологічна теорія деформовності, яка лежить в основі відповідних критеріїв руйнування. Однак практика показує, що не завжди навіть досить поширені і відомі критерії дають задовільні результати. Тому залишається проблема як подальшого розвитку теорії деформовності і розробки на цій основі нових критеріїв, так і проблема встановлення границь придатності відомих критеріїв і теорій. Розв'язок такої проблеми дасть можливість обґрунтовано вибрати найбільш надійні і прості для даного технологічного процесу методи оцінки використаного ресурсу пластичності.

Наукові основи теорії деформовності створені в роботах Г. А. Смірнова-Аляєва, В. Л. Колмогорова, Г. Д. Деля, В. А. Огороднікова. Подальший розвиток ця теорія одержала в роботах О. О. Богатова, Я. Є. Бейгельзімера, Ю. Г. Важенцева, В. М. Михалевича, В. А. Матвійчука, Ю. Г. Калпіна, О. М. Лаптева, С. В. Смірнова, М. Б. Штерна.

Розвитку теорії деформовності сприяли роботи І. С. Алієва, Б. І. Береснева, С. І. Губкіна, О. А. Ганаго, К. А. Гогаєва, Г. Я. Гуна, А. П. Гетманського, О. А. Ільюшина, А. А. Костави, А. Г. Овчіннікова, Л. В. Прозорова, Є. А. Попова, Г. Л. Петросяна, О. О. Розенберга, І. П. Рене, О. В. Романа, В. В. Соколовського, Е. П. Ункова, Д. В. Хвана, М. Б. Штерна, а також роботи В. Джонсона, К. Зібеля, Ш. Кабояші, Х. Л. Пью, Р. Шілда, А. Шебейка та інші.

В основі сучасної теорії деформовності лежить гіпотеза про залежність пластичності від схеми напруженого стану, яка описується діаграмою пластичності. Діаграми пластичності в більшості теорій описують експериментальну залежність граничної деформації від показника жорсткості напруженого стану. Однак в останніх роботах В. А. Огороднікова, Ю. Г. Важенцева, А. А. Богатова, С. В. Смірнова [14, 15, 16] показано, що залежність пластичності від схеми напруженого стану характеризується, як мінімум, двома показниками напруженого стану. В. А. Огородніков вважає, що при об'ємному напруженому стані необхідно враховувати вплив на пластичність третього інваріанта тензора напружень. Такий підхід дозволив отримати позитивні результати при розробці ряду процесів обробки тиском, які реалізуються в умовах об'ємного напруженого стану. В роботах [15, 16] в якості показників напруженого стану також використовуються безрозмірні інваріантні характеристики. Однак, розглянуті підходи не завжди дозволяють перейти із простору безрозмірних показників в простір напружень.

Тому виникає необхідність обґрунтування вибору як кількості показників напруженого стану, для повного і однозначного описання залежності

пластичності від схеми напруженого стану так і їх структури. Крім того, вибір показників напруженого стану повинен передбачати можливість перетворень, які дозволяли б виконувати однозначний перехід від траєкторій в просторі безрозмірних показників до траєкторій в просторі головних напружень, або любых трьох інваріантів тензора напружень, а також дозволяли враховувати зміцнення металу при пластичній деформації.

Актуальною в даний час є проблема оцінки деформовності металів при немонотонному навантаженні. В цьому випадку пошкодження, як функціонал трьохвимірних тензорів напружень і деформацій, може бути тільки трьохвимірним тензором або сукупністю тензорів деяких порядків [17]. Г. Д. Дель [5] вперше використав підхід О. А. Ільюшина для практичних розрахунків деформовності металів при немонотонному навантаженні. Цей підхід отримав подальший розвиток в роботах В. А. Огороднікова [14], О. А. Мішуліна, В. М. Михалевича [6, 7], І.А.Кийко [20] і інших. Необхідно відмітити також роботи в цьому напрямку В. Л. Колмогорова, А. А. Богатова, С. В. Смірнова, О. І. Мижирицького [11], Н. С. Можаровського [21] і інших.

Фізична картина кінетики накопичення пошкоджень при немонотонному навантаженні практично не досліджена. Тому феноменологічна теорія, в основу якої покладена гіпотеза про тензорний характер пошкоджень є, на наш погляд, єдиною теорією, яка дозволяє оцінити використаний ресурс пластичності при немонотонному навантаженні. В роботах Г. Д. Деля, В. А. Огороднікова, В. М. Михалевича при визначенні компонент тензора пошкоджень використовують, в основному, діаграму пластичності. Дослідження, присвячені трьохвимірним траєкторіям навантаження при немонотонному деформуванні, практично відсутні.

Для оцінки деформовності заготовок і для технологічного забезпечення якості готових виробів необхідна інформація про історію деформування кожної матеріальної частинки в об'ємі заготовки. Достовірну інформацію про історію деформування можна отримати тільки після розв'язку крайової задачі теорії пластичності. Методи розрахунків напружено-деформованого стану в пластичній області отримали розвиток в роботах Г. Д. Деля, В. А. Огороднікова [14, 18, 23, 24], Г. Л. Петросяна [25,26], Г. А. Смірнова-Аляєва [27,], М. Б. Штерна [28, 29, 30], О. А. Ільюшина [17].

Одним із недоліків сучасних методів визначення використаного ресурсу пластичності при немонотонному навантаженні є те, що величину використаного ресурсу пластичності визначають по критеріях, які враховують тензорний характер пошкоджень, а напружено-деформований стан розраховують без врахування деформаційної анізотропії, яка має місце при немонотонній деформації.

Досить актуальним є дослідження деформовності пористих тіл. В даний час створені наукові основи механіки пластичної деформації пористих тіл в роботах М. Б. Штерна [28-30], Г. Л. Петросяна [25,26], а також методи оцінки

ймовірності руйнування при пластичній деформації пористих тіл в роботах Г. Л. Петросяна [26], М. О. Шестакова [22].

Однак проблема оцінки деформовності пористих тіл досить складна і далека від свого остаточного розв'язку. Так як при експериментальних дослідженнях залежності пластичності пористих тіл від схеми напруженого стану виникають проблеми уже при побудові діаграми пластичності. Це зумовлено тим, що при пластичній деформації пористих тіл практично неможливо забезпечити умови простого навантаження.

Недослідженими в даний час залишаються проблеми технологічної спадковості, яка має місце при гарячому штампуванні порошкових заготовок. В даному випадку крім технологічних параметрів процесу штампування, на кінцевий стан матеріалу заготовки суттєво впливає і процес охолодження. Тому при охолодженні штампованих крупногабаритних заготовок в них виникають залишкові напруження, які є причиною руйнування заготовок при їх зберіганні, або при механічній обробці, так як в цьому випадку має місце перерозподіл залишкових напружень. Крім того, досить часто має місце руйнування готових виробів при їх експлуатації, причиною якого є суперпозиція залишкових напружень з напруженнями від зовнішніх навантажень. Необхідно відмітити, що розподіл по об'єму і рівень залишкових напружень залежить як від параметрів процесу штампування, так і від послідовності і характеристик процесів кінцевої механічної обробки.

## **2.2. Міра пластичності**

Сучасний рівень теорії пластичності дозволяє вирішувати практично всі задачі обробки металів тиском. Одна з цих задач - це визначення енергосилових параметрів. Однак в останній час, у зв'язку з підвищенням вимог до якості готових виробів, особливого значення набуває питання оцінки рівня пошкодженості металів, їх заліковування і зв'язана з ними проблема оцінки граничного формозмінення.

Теоретичні і експериментальні дослідження процесу пластичної деформації зводяться до розробки певних моделей, які в подальшому використовуються для оптимізації і управління процесом пластичного формозмінення. Математичні моделі повинні враховувати взаємодію металу заготовки, що деформується, з інструментом і базуватися на обґрунтованій фізико-механічній концепції, для забезпечення логічного взаємозв'язку і єдності математичної формалізації. Крім того, математична модель повинна описувати структурно-чутливі властивості матеріалів, від зміни яких залежить механізм зміцнювання і знеміцнювання металу, що деформується, процес накопичування і заліковування пошкоджень і, таким чином, ефективність процесу формозмінення і якість готового виробу.

Основним теоретичним напрямком, за допомогою якого розв'язується задача вибору оптимальних умов пластичної деформації, є технологічна механіка [14, 18, 23]. Хоча останнім часом з'явилися роботи, в яких процес руйнування при пластичній деформації оцінюється з точки зору фізики твердого тіла. Дислокаційні уявлення розкривають фізичну природу процесу руйнування, зумовленого пластичною деформацією, однак використовувати результати досліджень фізики твердого тіла для кількісної оцінки ймовірності руйнування в реальних процесах обробки тиском поки що неможливо. Тому широке поширення в технологічній практиці отримали феноменологічні теорії, в основі яких лежить гіпотеза про залежність пластичності від історії навантаження, яка тим чи іншим способом задається в просторі напружень [2, 14, 18, 23, 27].

Під пластичністю будемо розуміти здатність металу змінювати свою форму без руйнування в вигляді макроскопічного порушення суцільності. В якості міри пластичності будемо використовувати накопичену до моменту руйнування пластичну деформацію:

$$e_p = \int_0^{t_p} \dot{\epsilon}_u d\tau, \quad (2.1)$$

де  $\dot{\epsilon}_u$  - інтенсивність швидкостей деформацій;

$t_p$  - час деформування до руйнування.

Величину  $e_p$  можна також розглядати як довжину траєкторії деформації в просторі вектору деформації.

По аналогії з величиною  $e_p$  пластичність пористих матеріалів будемо характеризувати накопиченою до моменту руйнування пластичною деформацією матеріалу основи:

$$\Gamma_{op} = \int_0^{t_p} \dot{\gamma}_0 d\tau, \quad (2.2)$$

де

$$\dot{\gamma}_0 = \sqrt{\frac{f_1(\theta)\dot{\gamma}^2}{1-\theta} + \frac{f_2(\theta)\dot{\epsilon}^2}{1-\theta}} \quad (2.3)$$

- інтенсивність швидкостей деформацій матеріалу основи,

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\dot{\epsilon}\right)\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\epsilon}\delta_{ij}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\dot{\epsilon}_u \quad (2.4)$$

- інтенсивність девіатора швидкостей деформацій,

$\theta$  - пористість,

$f_1(\theta), f_2(\theta)$  - функції пористості, які залежать від гранулометричного складу порошку, умов пресування, спікання та ін.;

$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij}$  - швидкість відносної зміни об'єму;

$\dot{\epsilon}_{ij}$  - компоненти тензора швидкостей деформацій.

Вибір  $\epsilon_p$  та  $\Gamma_{op}$  в якості кількісної оцінки пластичності не є оптимальним. Цей недолік особливо вагомий при оцінці пластичності в процесах немонотонного навантаження, оскільки матеріал при такій деформації стає анізотропним. А в основі прийнятого нами визначення пластичності (формули (2.1), (2.3)) лежить припущення, що всі приращення деформацій рівноправні і дають однаковий вклад в процес накопичення пошкоджень. Фізично більш обґрунтованим є вибір в якості міри пластичності роботи пластичної деформації:

$$A = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} . \quad (2.5)$$

Хоча такий підхід веде до значних ускладнень розрахунків, в окремих випадках в якості міри пластичності будемо використовувати також роботу пластичної деформації  $A$ .

### 2.3. Характеристики напруженого стану

Для характеристики напруженого стану і оцінки його впливу на пластичність доцільно використовувати інваріантні характеристики, які дозволяють досліджувати траєкторії навантажень не в просторі тензора напружень, а в просторі його інваріантів, або величин, від них залежних. Такий підхід спрощує використання математичної теорії пластичності і теорії руйнування при аналізі різних процесів обробки тиском.

Вперше фундаментальні дослідження впливу напруженого стану на пластичність металів були здійснені П. Бріджменом, Б. І. Бересневим, Х. Пью та іншими на установках високого тиску. Однак, необхідно відзначити, що тиск рідини, в якій проводяться дослідження, не є повноцінним параметром напруженого стану металу в місті руйнування, а лише частково характеризує умови його навантаження. Тому використовувати залежність пластичності від тиску для дослідження пластичності в процесах обробки тиском без додаткового аналізу не можна.

Пізніше було запропоновано різні методики визначення залежності пластичності від напруженого стану. Найбільшу популярність в технологічній механіці отримали методики, в яких напружений стан характеризують



безрозмірними показниками, які визначаються через інваріанти тензора, або девіатора напружень [2, 14, 18, 23, 27]. Частіше всього в розрахунковій практиці використовують показник жорсткості напруженого стану:

$$\eta = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sqrt{3I_2(D\sigma)}} = \frac{3\sigma}{\sigma_u}, \quad (2.6)$$

де  $I_1(T_\sigma)$  - перший інваріант тензора напружень;

$I_2(D_\sigma)$  - другий інваріант девіатора напружень;

$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$  - середнє напруження;

$\sigma_u$  - інтенсивність напружень.

Показник  $\eta$  введений в практику оцінки пластичності С. І. Губкіним, В. А. Бабічковим і вперше використаний для побудови діаграм пластичності Г. А. Смірновим-Аляєвим [27]. Діаграми пластичності це експериментальні криві, які відтворюють залежність граничної деформації  $\epsilon_p$  від показника жорсткості напруженого стану  $\eta$ . Останнім часом діаграми пластичності використовуються практично всіма спеціалістами в області обробки тиском для оцінки граничного формозмінення. Однак в роботах В. А. Огороднікова [14, 18], В. Л. Колмогорова і його учнів [4, 11, 15], Ю. Г. Важенцева [16] і ін. експериментально доказано, що однозначність залежності  $\epsilon_p$  від  $\eta$  порушується при об'ємному напруженому стані.

При дослідженні залежності умови пластичності від середнього головного напруження  $\sigma_2$  введено величину (параметр Надаї-Лоде)

$$\mu_\sigma = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1, \quad (2.7)$$

яку В. Лоде використовував для вираження  $\sigma_2$  через величини обох крайніх головних напружень

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\mu_\sigma}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (2.8)$$

С. І. Губкін ввів величину  $\mu_\sigma$  для характеристики подібності девіаторів. Значення  $\mu_\sigma$  характеризує положення точки  $\sigma_2$  на діаграмі Мора і втрачає смисл тільки в випадку усебічного стиску. При фіксованому  $\mu_\sigma$  характер напруженого стану визначається з точністю до гідростатичного тиску. Тому про  $\mu_\sigma$  можна говорити як про величину, яка характеризує форму девіатора, або вид напруженого стану.

Крім показників  $\eta$  і  $\mu_\sigma$  в практиці обробки металів тиском використовують багато інших безрозмірних показників або інваріантних характеристик

напружено-деформованого стану. Однак показники  $\eta$  і  $\mu_\sigma$  мають найбільше поширення і будуть, в основному, використовуватись в даній роботі для описання залежності пластичності від схеми напруженого стану.

## 2.4. Оцінка пластичності металів

Пластичність металів залежить від великої кількості факторів серед яких, крім природи самого металу, велику роль відіграють термомеханічні параметри процесу. При холодній пластичній деформації основним фактором, який впливає на пластичність, є напружений стан і закон його зміни в процесі навантаження. Для кількісної оцінки впливу напруженого стану на ймовірність руйнування використовують критерії руйнування. Під руйнуванням будемо розуміти появу макротріщини, яка приводить до непоправного браку виробу.

Для оцінки граничного стану використовують, в основному, два підходи. В класичних теоріях міцності набули поширення критерії руйнування, в яких накладаються обмеження на напруження. Таким є, наприклад, критерій Шлейхера-Надаї, згідно якому інтенсивність дотичних напружень  $T$  при руйнуванні є визначеною для даного матеріалу функцією середнього напруження  $\sigma$

$$T=f(\sigma). \quad (2.9)$$

Якщо виходити із гіпотези єдиної кривої течії в координатах  $\sigma_u$ - $\epsilon_u$ , то із умови (2.9) витікає, що гранична деформація  $\epsilon_p$  для даного матеріалу не залежить від історії навантаження. З фізичної точки зору перевага критерію (2.9) в тому, що він враховує подвійний характер руйнування, оскільки одночасно враховується вплив інваріантів дотичних і нормальних напружень. В залежності від виду функції  $f(\sigma)$  можна отримати різні формули граничних поверхонь [35], які більш достовірно описують ймовірність руйнування.

Близьким є підхід Давіденкова-Фрідмана, в якому враховується експериментально установлений факт, що в залежності від умов навантаження один і той же матеріал може руйнуватися і шляхом відриву, і шляхом зсуву. Тобто при фіксованій температурі і швидкості навантаження руйнування має двоїстий характер. Самий простий спосіб врахування такої двоїстості полягає в одночасному врахуванні дотичних і нормальних напружень. Я. Б. Фрідман з цією метою вводить показник

$$\alpha_1 = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}^{\text{прив}}}, \quad (2.10)$$

де  $\tau_{\max}$  - максимальне дотичне напруження,

$\sigma_{\max}^{прив}$  - максимальне значення приведенного нормального напруження розтягу, вирахованого по другій теорії міцності.

Тому формулу (2.10) можна переписати в вигляді

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2\sigma_1 - 2\mu(\sigma_2 + \sigma_3)},$$

де  $\mu$  - коефіцієнт Пуасона.

Недоліком цього підходу є те, що показник  $\alpha_1$  неоднозначно описує напружений стан, крім того, теорія Я. Б. Фрідмана не враховує вплив історії навантаження на пластичність.

Останнім часом розвиваються критерії руйнування, в яких накладаються обмеження на деформації. Для формулювання умови локального руйнування у вершині тріщини використано двопараметричний критерій руйнування. Умова локального руйнування у вершині тріщини має вид

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(r) = \left( \chi + \frac{1-\chi}{m} \right)^{\frac{1}{n}} = e_p \quad \text{при } r=r_c \quad (2.11)$$

де 
$$m = \left[ (1 + \alpha + \beta)^2 - 3(\alpha + \beta + \alpha\beta)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$n$  - показник степені деформаційного зміцнення,

$$\alpha = \sigma_2 / \sigma_1, \quad \beta = \sigma_3 / \sigma_1,$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - головні напруження в межах пластичної зони перед тріщиною,

$\chi$  - стала, яка враховує величину крихкості матеріалу,

$r_c$  - відстань від вершини тріщини.

Для крихкого матеріалу  $r_c$  може корелювати з розміром зерна, відстанню між ферітними прошарками, неметалевими включеннями і ін. При в'язкому руйнуванні величина  $r_c$  може бути пов'язана з відстанню між порами або включеннями.

Таким чином критерій (2.11) враховує вид напруженого стану в вершині тріщини, інтенсивність зміцнення, крихкість матеріалу. В критерії (2.11) практично не враховується вплив законів зміни показників напруженого стану  $\alpha$  і  $\beta$  на величину граничної деформації  $e_p$ .

Близьким до [35] є підхід Г. А. Смірнова-Аляєва [27]

$$\psi = \frac{e_u}{e_p(\eta)}, \quad (2.12)$$

де  $\psi$  - використаний ресурс пластичності, який при деформуванні без руйнування менше одиниці. При руйнуванні  $\psi=1$ ,

$$e_u = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u d\tau \text{ - ступінь деформації,}$$

$e_p(\eta)$  - діаграма пластичності.

При оцінці величини граничної деформації по (2.12) історія деформування не враховується, а граничну деформацію  $e_p$ , при якій має місце руйнування, визначають по діаграмі пластичності  $e_p(\eta)$  по відомому значенню  $\eta$ . Такий підхід в окремих випадках може привести до значних похибок, до 30% і більше [18].

Критерій руйнування В. Л. Колмогорова має більш фундаментальне фізичне обґрунтування. При його розробці використано гіпотезу про пропорціональну залежність між інтенсивністю накопичення пошкоджень і приростом ступені деформації. Дана гіпотеза запропонована В. В. Новожиловим і отримала експериментальне підтвердження для монотонного навантаження в роботах [11]. Умова руйнування по В. Л. Колмогорову записується в вигляді

$$\psi = \int_0^{t_p} B(\tau) \frac{\dot{\varepsilon}_u}{e_p(\eta(\tau))} d\tau = 1, \quad (2.13)$$

де  $B(\tau)$  - величина, яка описує швидкість розвитку тріщин і їх заліковування при холодній пластичній деформації.

Використання критерію В. Л. Колмогорова в формі (2.13) практично неможливе, так як в літературі не приводяться дані про коефіцієнт  $B(\tau)$ . Тому цей коефіцієнт приймають рівним одиниці. Тоді при простому навантаженні ( $\eta=\text{const}$ ) критерій (2.13) співпадає з (2.12). Необхідно також відмітити, що критерій (2.13) аналогічний критерію О. А. Ільюшина

$$\int_0^{t_p} \frac{d\tau}{t_r(\sigma(\tau))} = 1, \quad (2.14)$$

де  $t_r(\sigma)$  - час руйнування зразка в умовах повзучості (при сталому напруженні  $\sigma$ ),

$t_p$  - час деформування до руйнування.

Критерій (2.14) побудований на основі гіпотези про справедливність лінійного закону накопичення пошкоджень при повзучості і не враховує впливу історії навантаження на інтенсивність накопичення пошкоджень.

Г. Д. Дель, В. А. Огородніков і В. Г. Нахайчук, виходячи із гіпотези про нелінійний закон накопичення пошкоджень при пластичній деформації одержали критерій руйнування

$$\psi = \int_0^{e_p} n \frac{e_u^{n-1}}{e_p(\eta)^n} de_u = 1, \quad (2.15)$$

де 
$$n = 1 + a \frac{d\eta}{de_u}. \quad (2.16)$$

Константа а для досліджених в роботі [66] матеріалів виявилась рівною 0.2.

Експериментальна перевірка [18] показала, що для шляхів деформування середньої і великої кривизни критерій (2.15) практично непридатний. Тому залежність (2.16) була уточнена В. А. Огородніковим і рівняння (2.16) замінено наступним [18]

$$n = 1 + a \cdot \arctg \frac{d\eta}{de_u}. \quad (2.17)$$

Критерій (2.15) враховує вплив історії навантаження, а також нелінійність залежності між приростом ступені деформації  $e_u$  і густиною пошкоджень. При  $\eta = \text{const}$  ( $d\eta/de_u = 0$ ), критерій (2.15) співпадає з (2.13) і розрахунки граничних деформацій дають однакові результати. Для складних навантажень похибка при розрахунках по критерію (2.13) перевищує 20% [18]. Тому при складному монотонному навантаженні для оцінки ймовірності руйнування необхідно надати перевагу критерію (2.15).

Теорія деформовності, в основу якої покладена модель накопичення пошкоджень (2.15), отримала подальший розвиток в роботах О. О. Розенберга, присвячених оптимізації процесів деформуючого протягування [88] та комбінованих процесів протяжки зі згином трубних заготовок. Використання гіпотез, покладених в основу критерію (2.15), в названих роботах оправдано, так як в більшості схем формозмінення має місце плоский напружений стан, тому вплив об'ємності напруженого стану незначний.

В випадку немонотонного навантаження механізм накопичення і заліковування дефектів суттєво міняється [12]. Розглянуті вище критерії не враховують особливостей процесу накопичення пошкоджень при немонотонній деформації і не можуть бути використані для оцінки пластичності в процесах з немонотонним навантаженням.

Для кількісної оцінки впливу немонотонної деформації на пластичність С. Менсон виходячи із результатів експериментальних досліджень, запропонував рівняння, яке описує залежність між числом циклів  $N$  і розмахом (амплітудою) пластичної деформації в циклі  $\Delta e_u$

$$\Delta e_u N^{\frac{1}{a}} = c, \quad (2.18)$$

де  $a, c$  - сталі, які залежать від властивостей матеріалу.

Вважаючи, що інтенсивність пластичного розпушення на будь-якому етапі знакозмінної деформації не залежить від попередньої деформації А. А. Богатов [13] запропонував використаний за  $n$  етапів знакозмінного деформування ресурс пластичності визначати підсумовуванням. При цьому на кожному  $i$ -му етапі використаний запас пластичності визначається формулою

$$\psi = \sum_{i=1}^n \int_0^{e_{u_i}} \frac{ae_u^{a-1}}{e_p^a} de_u. \quad (2.19)$$

Підінтегральний вираз в (2.19) отримано раніше Г. Д. Делем та В. А. Огородніковим, виходячи із уявлень про степеневу залежність між накопиченою пластичною деформацією і пластичним розпушенням. Величина  $a$  залежить від фізико-механічних властивостей матеріалу і умов деформування. Для жорстких схем напруженого стану  $a=3$ , а при усебічному стиску  $a$  наближається до одиниці [13].

В умові (2.19) за межу пластичності прийнята скалярна величина, тому ця умова не враховує направленого характеру пошкоджень і не описує анізотропію пластичності деформованого металу, із умови не впливає здатність тіл, зруйнованих при одному напруженому стані (наприклад, при розтягу), підлягати послідовним значним деформаціям при іншому напруженому стані (наприклад, при стиску). Крім того, при знакозмінному навантаженні умова (2.19) не враховує впливу величин амплітуд деформацій, що безумовно приведе до помилок при розрахунках використаного ресурсу пластичності.

В зв'язку з цим, останнім часом набула розвитку тензорна модель накопичення пошкоджень при немонотонній деформації. Так як пошкодження є функціоналами трьохвимірних тензорів напружень, то вони можуть бути тільки трьохвимірними тензорами або сукупністю тензорів деяких порядків. Найпростіший варіант теорії накопичення пошкоджень макрочастинки будується в припущенні, що процес накопичення пошкоджень описується симетричним тензором другого рангу. Ідея О. А. Ільющина отримала розвиток в роботах Г. Д. Деля [5], І. А. Кийко [20], А. А. Мішуліна і В. М. Михалевича [6, 7, 8]. В якості міри пошкоджень в названих роботах прийнято другий інваріант девіатора пошкоджень  $\psi_{ij}$ , який будується як функціонал, що залежить від тензора прирощень деформацій, схеми напруженого стану і фізико-механічних властивостей матеріалу.

Г. Д. Дель [5], вважає, що руйнування появляється тоді, коли деяка функція інваріантів тензора  $\psi_{ij}$  досягає визначеного значення. Перший інваріант цього тензора дорівнює нулю. Нехтуючи впливом третього інваріанта, Г. Д. Дель записав умову руйнування в вигляді

$$\psi_{ij}\psi_{ij}=1. \quad (2.20)$$

Г. Д. Дель розробив тензорно-лінійну модель накопичення пошкоджень, згідно якій компоненти тензора пошкоджень визначаються формулою

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_u^*} F(e_u, \eta, \mu) \beta_{ij} de_u, \quad (2.21)$$

де  $\beta_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{de_u}$  - компоненти направляючого тензора прирощень деформацій,

$F(e_u, \eta, \mu)$  - позитивна функція, яка визначається механічними властивостями матеріалу,  $F = \frac{d\varphi}{de_u}$ , а функція  $\varphi$  вибрана в вигляді

$$\varphi = (1-a) \frac{e_u}{e_p} + a \left( \frac{e_u}{e_p} \right)^2, \quad (2.22)$$

де  $a$  коефіцієнт прийнятий рівним 0.5.

А. А. Мишуліним і В. М. Михалевичем [6] розроблена тензорно-нелінійна модель накопичення пошкоджень, яка являється узагальненням розглянутого вище варіанту лінійної моделі. Виходячи із загального зв'язку між двома тензорами, розглянутого О. А. Ільюшиным, в роботі [6] одержано наступний вираз для компонент девіатора пошкоджень

$$\psi_{ij} = \int_0^{e_u^*} \left( A\beta_{ij} + B \left( \beta_{ik}\beta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \right) \right) de_u, \quad (2.23)$$

де  $A$  і  $B$  деякі функції.

Якщо в межах окремих етапів деформація являється простою ( $\beta_{ij} = \text{const}$ ), вираз (2.23) перетворюється до виду

$$\psi_{ij} = a\beta_{ij} + b \left( \beta_{ik}\beta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \right), \quad (2.24)$$

де  $a$  і  $b$  - первісні функцій  $A$  і  $B$ , які виражаються через монотонно зростаючу функцію накопичення пошкоджень

$$\varphi = (1-c) \frac{e_u}{e_p} + c \left( \frac{e_u}{e_p} \right)^2. \quad (2.25)$$

В роботі [6] прийнято  $A = da/de_u$ ,  $B = db/de_u$ ,  $a = (a_1 - b_1)\varphi$ ,  $b = b_1\varphi$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  - коефіцієнти.

Величина  $b_1$  враховує вклад нелінійного члена в (2.23). Якщо прийняти  $b_1=0$ , то формула (2.23) переходить в (2.21).

На рис.1.1 пластичність металів при двоетапному деформуванні відмічена експериментальними точками і описана лінійною і нелінійною моделями накопичення пошкоджень [5, 6]. На цьому рисунку  $\psi_1$  і  $\psi_2$  використаний ресурс пластичності на першому і другому етапах деформування. Із аналізу приведених на рисунку результатів витікає, що при двоетапному деформуванні обидва підходи задовільно описують експериментальні результати.

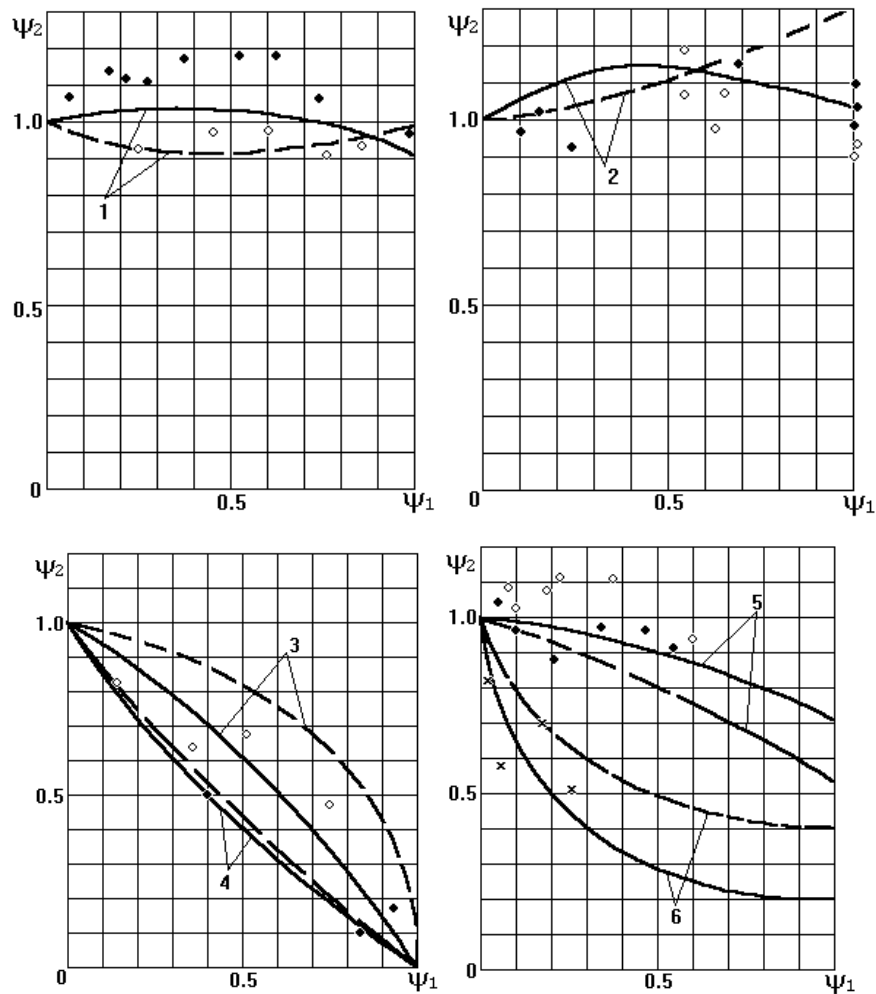


Рис. 4.1. Пластичність металів при двоетапному деформуванні

— — — лінійна модель ( $a=0.5$ ); ——— нелінійна модель. 1 - кручення-розкручування (о - 9ХС, • - 45); 2 - розтяг-стиск,  $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=0.25$  (о - 9ХС, • - Р6М5); 3 - розтяг-кручення,  $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=0.4$  (о - Р6М5); 4 - кручення-розтяг,  $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=2.5$  (• - Р6М5); 5 - стиск вісевий-стиск поперечний, (о - 9ХС, • - Р6М5); 6 - стиск-розтяг,  $\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_{p2}}=4$  (× - 9ХС)



Особливістю розглянутих вище методів є те, що в основу критеріїв (2.12), (2.13), (2.15), (2.19) покладена гіпотеза про те, що залежність пластичності металів від схеми напруженого стану описується діаграмою пластичності  $e_p(\eta)$ . Такий же недолік характерний і для критеріїв, які описують немонотонне деформування, так як для апроксимацій функцій пошкоджень, які є первісними підінтегральних виразів в критеріях (2.21), (2.23), також використана діаграма пластичності (2.22), (2.25).

Задовільне співпадання з експериментальними результатами розрахункової моделі в цьому випадку пояснюється тим, що розглянуті результати двохетапного деформування. На кожному етапі мав місце лінійний або плоский напружений стан. Однак із результатів досліджень останніх років витікає, що при об'ємному напруженому стані, а також в деяких випадках плоского напруженого стану, значення граничної деформації  $e_p$  виявляються різними для схем, які характеризуються одним і тим же значенням показника напруженого стану  $\eta$  [15, 16].

Більшість дослідників вважають, що для характеристики експериментальної залежності пластичності від напруженого стану необхідно використовувати не менше двох показників напруженого стану. В. А. Огородніков вперше висунув гіпотезу про те, що на пластичність впливає третій інваріант тензора напружень  $I_3(T_\sigma)$ . Для кількісної оцінки цього впливу ним введено показник напруженого стану, який характеризує залежність пластичності від третього інваріанта тензора напружень і відрізняється від нуля тільки при об'ємному напруженому стані,

$$\chi = \frac{\sqrt{I_3(T_\sigma)}}{\sqrt{3I_2(D_\sigma)}}. \quad (2.26)$$

В роботах [15, 16] рекомендують в якості другого показника напруженого стану використовувати параметр Надаї-Лоде по напруженнях  $\mu_\sigma$ . Експериментальні залежності  $e_p$  від  $\eta$  при фіксованих значеннях  $\mu_\sigma$  одержані А. А. Богатовим, С. В. Смірновим [15] (рис. 2.2), а також Ю. Б. Важенцевим, В. В. Ісаєвим [16] (рис. 2.3). Із приведених (див. рис. 2.2, 2.3) залежностей  $e_p$  від  $\eta$  і  $\mu_\sigma$  витікає, що гранична деформація  $e_p$  при об'ємному напруженому стані залежить від двох показників  $\eta$  і  $\mu_\sigma$ . Однак скористатись отриманими графічними залежностями для практичних розрахунків використаного ресурсу пластичності досить складно, а в загальних випадках складного навантаження в умовах об'ємного напруженого стану, практично неможливо.

Такий же недолік характерний і для критеріїв, які описують немонотонне навантаження (2.20), (2.23), так як апроксимуючі функції (первісні підінтегральних функціоналів в критеріях (2.21), (2.23) базуються на діаграмі пластичності. Це зумовлено тим, що явної залежності накопиченої до моменту

руйнування деформації  $\epsilon_p$  від показників  $\eta$  і  $\mu_\sigma$  або інших еквівалентних їм безрозмірних характеристик напруженого стану в даний час не одержано.

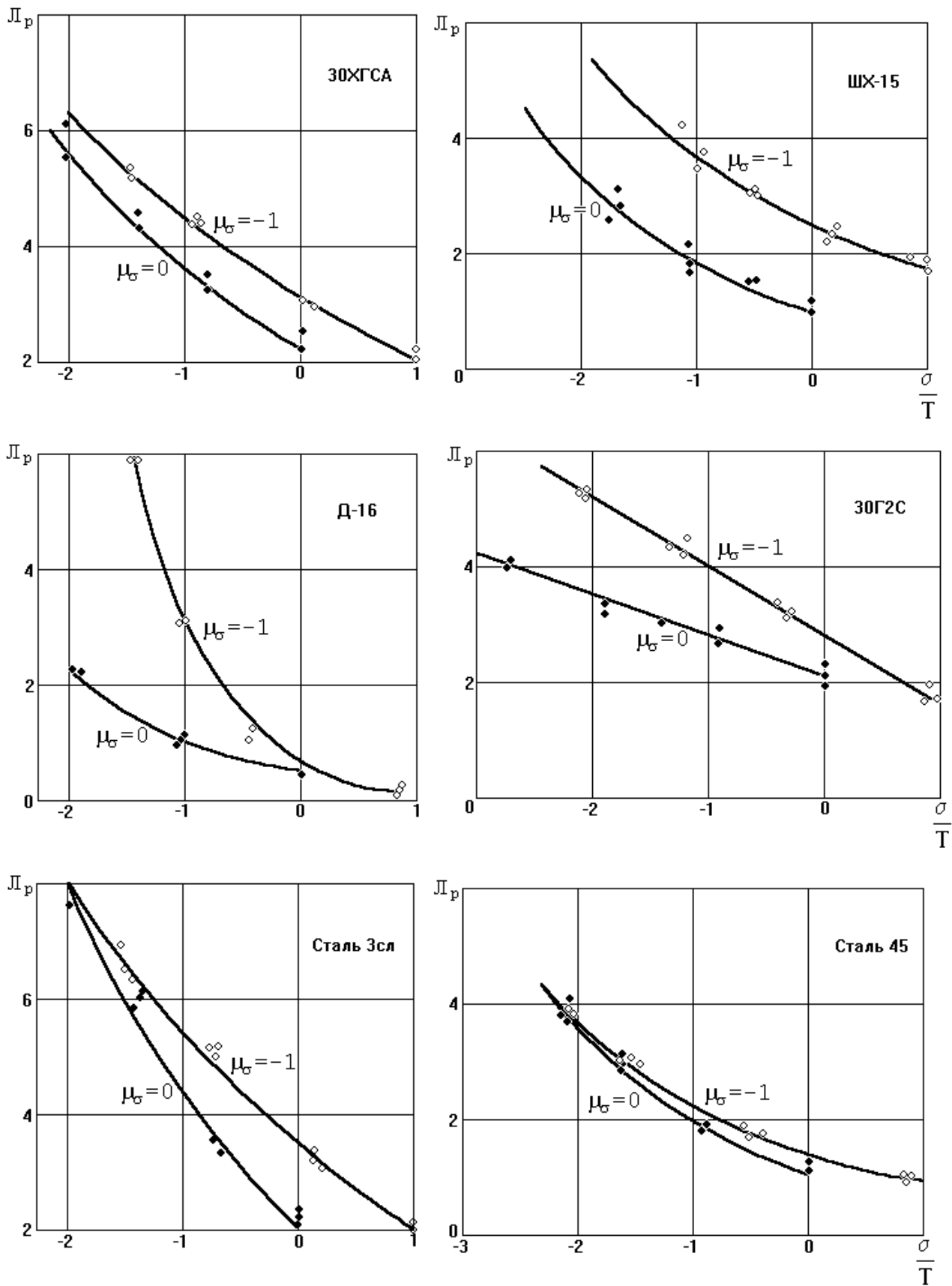


Рис. 2.2. Діаграми пластичності при  $\mu_\sigma = \text{const}$  [19]

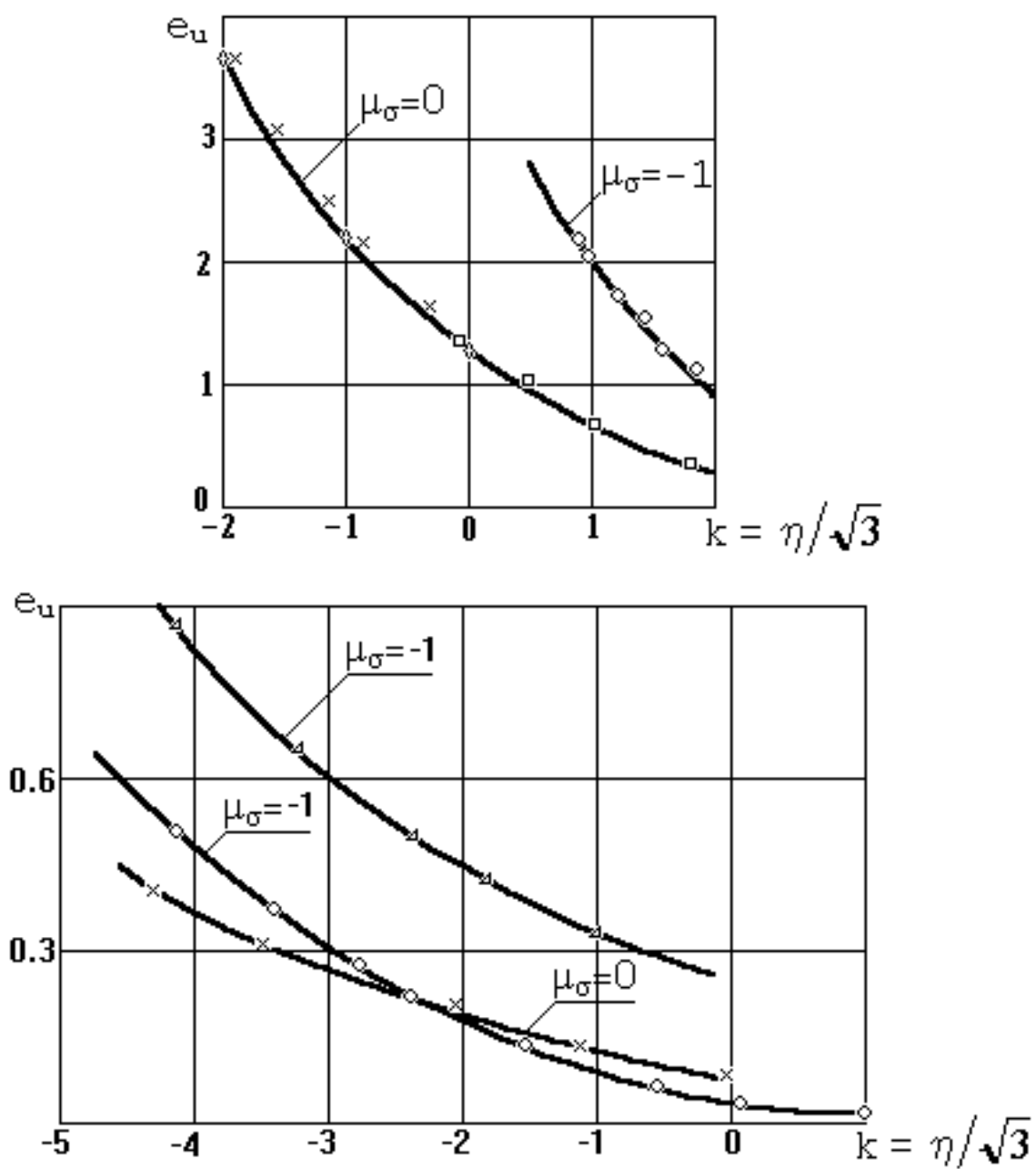


Рис. 2.3. Діаграми граничної пластичності

а - сталь 30Х, б - сплав АЛ15В;  $\Delta$ ,  $\times$ ,  $o$  - дослідження суцільних зразків по програмах  $q=\text{const}$ ;  $\diamond$  - кручення суцільних зразків по програмах  $k=\text{const}$ ;  $\square$  - розтяг трубчатих зразків по програмах  $q=\text{const}$ .

## Список літератури

1. Ильющин А. А. Пластичность / А. А. Ильющин - М.: Гостехиздат. 1948. – 376 с.
2. Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильющин - М.: Изд-во АН СССР. 1963. – 271 с.
3. Ильющин А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильющин - М.: Изд-во МГУ. 1963. – 310 с.
4. Ильющин А. А. Сопротивление материалов / А. А. Ильющин, В. С. Ленский - М.: Физматгиз. 1959. – 372 с.
5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов - М.: Наука. 1969. – 420 с.
6. Качанов Л. М. Основы механики разрушения / Л. М. Качанов - М.: Наука. 1974. – 312 с.
7. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин - М.: Машиностроение. 1975. – 400 с.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский - М.: Высшая школа. 1969. – 608 с.
9. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье - М.: Наука. - 1970. -939 с.
10. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря - М.: Изд-во МГУ. 1981. - 344 с.
11. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл - М.: Мир. - 1975. - 592 с.
12. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / В. А. Огородников. - Киев: Выща школа, 1983.-175 с.
13. Огородников В. А. Деформируемость и разрушение металлов при пластическом формоизменении / В. А. Огородников. - Киев: УМК ВО, 1989.-152 с.
14. Дель Г. Д. Критерий деформируемости металлов при обработке давлением / Г. Д. Дель, В. А. Огородников, В. Г. Нахайчук // Изв. вузов. Машиностроение. - 1975. - №4. - С.135 - 140.
15. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень. - Вінниця: "УНІВЕРСУМ - Вінниця", 1998. - 195 с.
16. Дель Г. Д. Пластичность деформированного металла / Г. Д. Дель // Физика и техника высоких давлений. - 1982. - №11 - С.28 - 32.
17. Дель Г. Д. Метод делительных сеток / Г. Д. Дель, Н. А. Новиков. – М.: Машиностроение, 1979. – 144с.
18. Дель Г. Д. Экспериментальное исследование неустойчившейся стадии холодного выдавливания / Г. Д. Дель, Н. А. Соколов // Известия вузов. Машиностроение. - 1974. - №5. - С.132-136.
19. Алиев И. С. Технологические процессы холодного поперечного выдавливания / И. С. Алиев // Кузнечно-штамповочное производство. - 1988. - №6. - С. 1-4.

- 20.Алиев И. С. Повышение качества процессов холодного поперечного выдавливания / И. С. Алиев, Л. И. Девиченко, К. Д. Махмудов // Повышение точности в холодноштамповочном производстве. - Л.: ЛДНТП, 1981. - С. 50-55.
21. Сивак И. О. Ресурс пластичности заготовок при последовательных операциях пластического формоизменения / И. О. Сивак, В. А. Огородников, Р. И. Сивак, А. Я. Мысловский // Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні. – Краматорськ: Донбаська державна машинобудівна академія. - 2000. – С. 29-33.
- 22.Бейгельзимер Я. Е. Винтовая экструзия – процесс накопления деформаций / Я. Е. Бейгельзимер, В. Н. Варюхин, Д. В. Орлов, С. Г. Сынков. – Донецк: Фирма ТЕАН, 2003. – 87 с.
- 23.Сивак И .О. Влияние геометрии траектории деформации на пластичность / И. О. Сивак, В. А. Огородников, Р. И. Сивак, В. Т. Ивацко // Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні та металургії. - Краматорськ: Донбаська державна машинобудівна академія. - 1999. - С. 5-8.
- 24.Тітов В. А. Витягування з потоншенням біметалевих трубчастих елементів з різномірних металів і сплавів / В. А. Тітов, Р. С. Борис. – Київ: Центр учбової літератури, 2014. – 180 с.
- 25.Сивак И. О. Деформируемость заготовок при радиальном выдавливании с контурной осадкой / И. О. Сивак, Р. И. Сивак, И. С. Алиев // Механика деформируемого твёрдого тела и обработка металлов давлением. – Тула: Тульский государственный университет. – 2000. – С. 278-284.
- 26.Матвийчук В. А. Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов: монография / В. А. Матвийчук, И. С. Алиев. - Краматорск: ДГМА, 2009. - 268 с.
- 27.Огородников В. А. Энергия. Деформации. Разрушение (задачи автотехнической экспертизы) / В. А. Огородников, В. Б. Киселёв, И. О. Сивак. – Винница: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005.- 204 с.
- 28.Сивак И. О. Поверхность предельной пластичности / И. О. Сивак // Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні та металургії: – Краматорськ: Донбаська державна машинобудівна академія. - 1999. – С.9-15.
- 29.Алиев И. С. Пластичность металла при многократной холодной деформации с промежуточными отжигами / И. С. Алиев, И. О. Сивак, Р. И. Сивак // Совершенствование процессов и оборудования обработки давлением в металлургии и машиностроении. - Краматорск: Донбасская государственная машиностроительная академия. - 1998. - Вып. №4. - С. 203-207.
30. Сивак И. О. Оценка использованного ресурса пластичности при комбинированном выдавливании с промежуточными отжигами / И. О. Сивак, В. А. Огородников, Р. И. Сивак, И. С. Алиев // Удосконалення

процесів та обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні. – Краматорськ–Слов'янськ: Донбаська державна машинобудівна академія. - 2000. – С.165-167.