

Практичне заняття 1, 2

Побудова епюр повздовжніх сил

Для заданого ступінчастого стержня побудувати епюри осьових зусиль з урахуванням власної ваги стержня, якщо: $F_1=2\text{кН}$, $F_2=4\text{кН}$, $F_3=3\text{кН}$, $A_1=20\text{см}^2$, $A_2=2A_1=40\text{см}^2$, $A_3=3A_1=60\text{см}^2$, $a=1\text{м}$, $b=1\text{м}$, $c=1.5\text{м}$, $d=0.5\text{м}$, $D=5\text{см}$. Матеріал стержня – сталь: $\gamma=78.5\cdot 10^{-3}\text{ Н/см}^3$.

Стержень розбивається на ділянки АВ, ВС, CD і DE з постійною площею поперечного перерізу а також по точкам прикладення зовнішніх сил. Для визначення осьових зусиль застосовується метод перерізів. На рис.1.2,б,в,г,д показані перерізи на кожній ділянці, дію відкинутої верхньої частини замінено відповідно зусиллями N_1 , N_2 , N_3 і N_4 . Величина цих зусиль визначається з умови рівноваги відсічених частин.

Переріз 1-1 ($0\leq x\leq 100\text{см}$)

$$\sum Y=0; N_1-G_1-F_1=0,$$

де G_1 – вага відсіченої частини першої ділянки,

$$N_1 = G_1 + F_1 = \int_0^x \gamma A_1 dx + F_1 = \gamma A_1 x + F_1 ,$$

$$N_1(x=0)=\gamma\cdot A_1\cdot 0+F_1=F_1=2\text{кН}=2000\text{Н},$$

$$N_1(x=100)=\gamma\cdot A_1\cdot 100+F_1=78.5\cdot 10^{-3}\cdot 20\cdot 100+2000=2157\text{Н},$$

Переріз 2-2 ($0\leq x\leq 100\text{см}$)

$$\sum Y=0; N_2-G_2-G_1-F_1=0,$$

$$N_2 = G_2 + G_1 + F_1 = \int_0^x \gamma A_2 dx + \int_0^a \gamma A_1 dx + F_1 = \gamma A_2 x + \gamma A_1 a + F_1 ,$$

$$N_2(x=0)=\gamma\cdot A_2\cdot 0+\gamma\cdot A_1\cdot a+F_1=78.5\cdot 10^{-3}\cdot 40\cdot 0+78.5\cdot 10^{-3}\cdot 20\cdot 100+2000=2157\text{Н},$$

$$N_2(x=100)=\gamma\cdot A_2\cdot 100+\gamma\cdot A_1\cdot a+F_1=78.5\cdot 10^{-3}\cdot 40\cdot 100+78.5\cdot 10^{-3}\cdot 20\cdot 100+2000=2471\text{Н}.$$

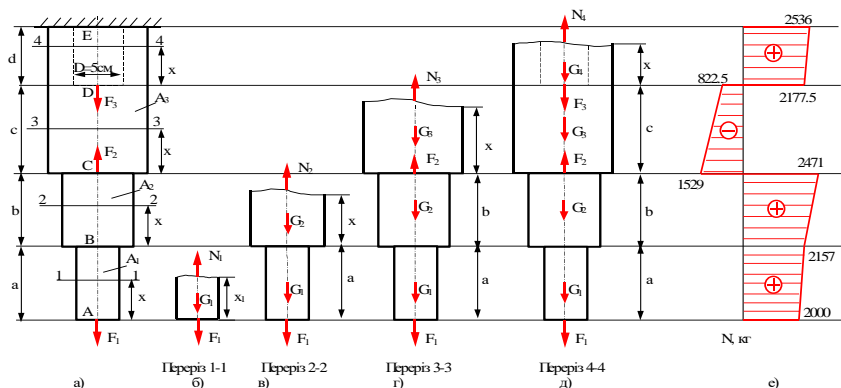


Рис.1.2.

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq 150 \text{ см}$)

$$\sum Y=0; N_3 - G_3 + F_2 - G_2 - G_1 - F_1 = 0,$$

$$N_3 = G_3 - F_2 + G_2 + G_1 + F_1 = \int_0^x \gamma A_3 dx - F_2 + \int_0^b \gamma A_2 dx + \int_0^a \gamma A_1 dx + F_1 =$$

$$= \gamma A_3 x - F_2 + \gamma A_2 b + \gamma A_1 a + F_1,$$

$$N_3(x=0) = \gamma \cdot A_3 \cdot 0 - F_2 + \gamma \cdot A_2 \cdot b + \gamma \cdot A_1 \cdot a + F_1 = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 0 - 4000 +$$

$$+ 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = -1529 \text{ Н},$$

$$N_3(x=150) = \gamma \cdot A_3 \cdot 150 - F_2 + \gamma \cdot A_2 \cdot b + \gamma \cdot A_1 \cdot a + F_1 = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 150 - 4000 +$$

$$+ 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = -822.5 \text{ Н}.$$

Переріз 4-4 ($0 \leq x \leq 50 \text{ см}$)

$$\sum Y=0; N_4 - G_4 - F_3 - G_3 + F_2 - G_2 - G_1 - F_1 = 0,$$

$$N_4 = G_4 + F_3 + G_3 - F_2 + G_2 + G_1 + F_1 =$$

$$= \int_0^x \gamma A_4 dx + F_3 + \int_0^c \gamma A_3 dx - F_2 + \int_0^b \gamma A_2 dx + \int_0^a \gamma A_1 dx + F_1 =$$

$$= \gamma A_4 x + F_3 + \gamma A_3 c - F_2 + \gamma A_2 b + \gamma A_1 a + F_1,$$

$$A_{\text{отб}} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = 19.6 \text{ см}^2; A_4 = A_3 - A_{\text{отб}} = 60 - 19.6 = 40.4 \text{ см}^2,$$

$$N_4(x=0) = \gamma \cdot A_4 \cdot 0 + F_3 + \gamma \cdot A_3 \cdot c - F_2 + \gamma \cdot A_2 \cdot b + \gamma \cdot A_1 \cdot a + F_1 =$$

$$= 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40.4 \cdot 0 + 3000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 150 - 4000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 +$$

$$+ 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = 2177.5 \text{ Н},$$

$$N_4(x=50)=\gamma \cdot A_4 \cdot 50 + F_3 + \gamma \cdot A_3 \cdot c - F_2 + \gamma \cdot A_2 \cdot b + \gamma \cdot A_1 \cdot a + F_1 = \\ = 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 50 + 3000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 150 - 4000 + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 100 + \\ + 78.5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 100 + 2000 = 2336 \text{ Н.}$$

Практичне заняття 3, 4

Побудова епюр крутних моментів

Побудувати епюри крутних моментів для вала з насадженими на нього шківками (рис.2.2), якщо: $M=40\text{кНм}$; $M_1=M$; $M_2=2M$; $M_3=2.5M$; $M_4=1.5M$; $m=100\text{кНм/м}$; $a=0.6\text{м}$

При розрахунках на міцність і жорсткість знак крутного моменту не грає ніякої ролі, але для зручності побудови епюр пропонується вважати крутний момент додатнім, якщо дивлячись в торець відсіченої частини бруса цей момент є направленим за годинниковою стрілкою.

Величина M_0 визначається з умови рівноваги вала, знак приймається по вище приведеному правилу, причому дивитися будемо з правого торця вала. Напрямок обертання M_0 орієнтовно показуємо за годинниковою стрілкою.

$$\sum M = 0 \quad M_1 + M_0 - M_2 + ma - M_3 + M_4 = 0, \\ M_0 = -M_1 + M_2 - ma + M_3 - M_4 = -40 + 80 - 100 \cdot 0.6 + 100 - 60 = 20 \text{ кНм.}$$

Крутний момент M_0 отримано зі знаком плюс, таким чином напрямки визначили правильно. Якщо M_0 з умови рівноваги виявиться від'ємним, то необхідно змінити його напрямки на протилежний і в подальшому знак мінус не враховувати.

Для визначення величини крутних моментів вал розбивається на ділянки між суміжними шківками, виконуються переріз на кожній ділянці, одна частина системи відкидається, її дія замінюється $M_{кр}$, величина якого знаходиться з умови рівноваги частини, яка залишилася. Розглянемо переріз 1-1 (рис.2.2,б). Відкинута права частина, напрямки $M_{кр1}$ необхідно приймати за годинниковою стрілкою, якщо дивитися в торець відсіченої частини вала.

Переріз 1-1

$$\sum M = 0, \quad M_1 + M_{кр1} = 0, \\ M_{кр1} = -M_1 = -40 \text{ кНм.}$$

Аналогічно розглядаємо інші перерізи, складаючи рівняння рівноваги для лівих частин вала.

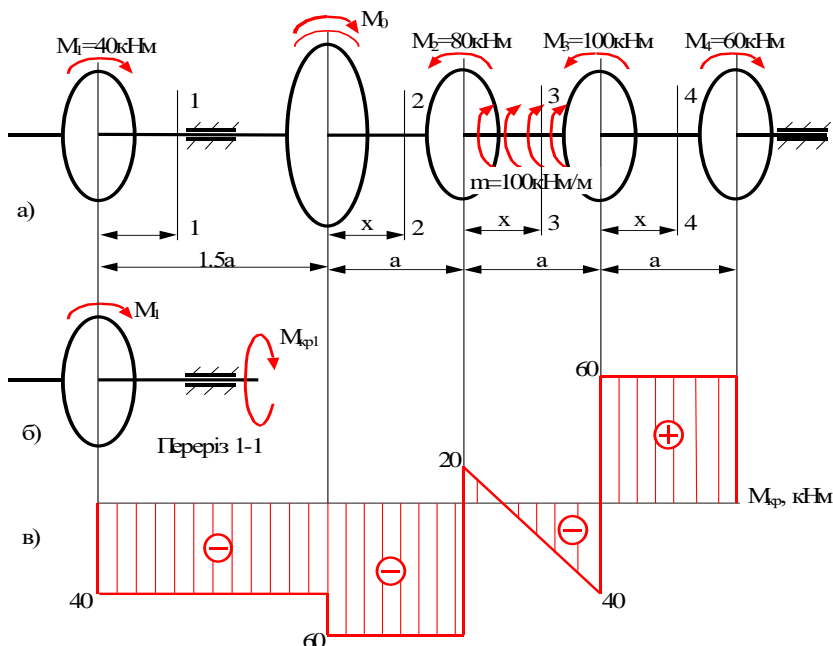


Рис.2.2

Переріз 2-2

$$\sum M = 0, \quad M_1 + M_0 + M_{кр2} = 0, \\ M_{кр2} = -M_1 - M_0 = -40 - 20 = -60 \text{ кНм}.$$

Переріз 3-3 $(0 \leq x \leq a)$

$$\sum M = 0, \quad M_1 + M_0 - M_2 + m \cdot x + M_{кр3} = 0, \\ M_{кр3}(x=0) = -M_1 - M_0 + M_2 - m \cdot 0 = -40 - 20 + 80 - 100 \cdot 0 = 20 \text{ кНм}, \\ M_{кр3}(x=a) = -M_1 - M_0 + M_2 - m \cdot a = -40 - 20 + 80 - 100 \cdot 0.6 = -40 \text{ кНм}.$$

Переріз 4-4

$$\sum M = 0 \quad M_1 + M_0 - M_2 + m \cdot a - M_3 + M_{кр4} = 0, \\ M_{кр4} = -M_1 - M_0 + M_2 - m \cdot a + M_3 = -40 - 20 + 80 - 100 \cdot 0.6 + 100 = 60 \text{ кНм}.$$

Практичне заняття 5, 6

Побудова епюр поперечних сил і згинаючих моментів

Для заданої балки (рис.3.5) побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів, якщо: $a=1\text{м}$, $q=10\text{кН/м}$, $M=30\text{кНм}$, $F=20\text{кН}$.

Рівняння статки:

$$\sum M_A = 0, F \cdot a - M - q \cdot 3 \cdot a \cdot (a + 1.5 \cdot a) + R_B \cdot (a + 3 \cdot a) = 0,$$

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{-F \cdot a + M + q \cdot 3 \cdot a \cdot (a + 1.5 \cdot a)}{a + 3 \cdot a} = \\ &= \frac{-20 \cdot 1 + 30 + 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (1 + 1.5 \cdot 1)}{1 + 3 \cdot 1} = 21.25 \text{кН}, \end{aligned}$$

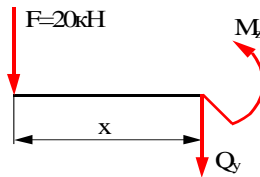
$$\sum M_B = 0 \quad F \cdot (a + a + 3 \cdot a) - R_A \cdot (a + 3 \cdot a) - M + q \cdot 3 \cdot a \cdot 1.5 \cdot a = 0,$$

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{F \cdot (a + a + 3 \cdot a) - M + q \cdot 3 \cdot a \cdot 1.5 \cdot a}{a + 3 \cdot a} = \\ &= \frac{20 \cdot (1 + 1 + 3 \cdot 1) - 30 + 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1.5 \cdot 1}{1 + 3 \cdot 1} = 28.75 \text{кН}. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0, \quad -F + R_A - q \cdot 3 \cdot a + R_B = -20 + 28.75 - 10 \cdot 3 \cdot 1 + 21.25 = 0.$$

Переріз 1-1 ($0 \leq x \leq a$)



$$Q_y = -F = -20 \text{ кН},$$

$$M_z = -F \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=a) = -F \cdot a = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кНм}.$$

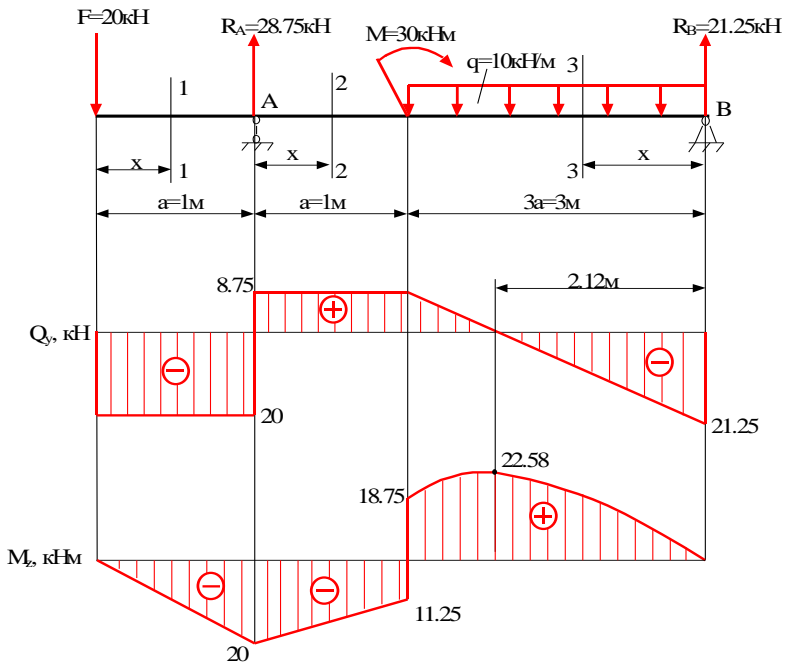
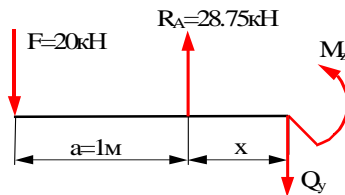


Рис.3.5

Переріз 2-2 ($0 \leq x \leq a$)



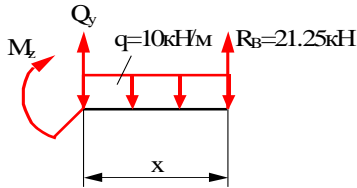
$$Q_y = -F + R_A = -20 + 28.75 = 8.75 \text{ кН},$$

$$M_z = -F \cdot (a+x) + R_A \cdot x,$$

$$M_z(x=0) = -F \cdot a = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кНм},$$

$$M_z(x=a) = -F \cdot (a+a) + R_A \cdot a = -20 \cdot (1+1) + 28.75 \cdot 1 = -11.25 \text{ кНм}.$$

Переріз 3-3 ($0 \leq x \leq 3a$)



$$Q_y = -R_B + q \cdot x,$$

$$Q_y(x=0) = -R_B = -21.25 \text{ кН},$$

$$Q_y(x=3 \cdot a) = -R_B + q \cdot 3 \cdot a = -21.25 + 10 \cdot 3 \cdot 1 = 8.75 \text{ кН},$$

$$M_z = R_B \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2},$$

$$M_z(x=0) = 0,$$

$$M_z(x=3 \cdot a) = R_B \cdot 3 \cdot a - \frac{q \cdot (3 \cdot a)^2}{2} = 21.25 \cdot 3 \cdot 1 - \frac{10 \cdot (3 \cdot 1)^2}{2} = 18.75 \text{ кНм}.$$

Для визначення максимуму згинаючого моменту використовується диференціальна залежність між Q_y і M_z .

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y$$

Функція має максимум, коли перша похідна дорівнює нулю, а поперечна сила міняє знак з “+” на “-”. Значення поперечної сили для третього перерізу прирівнюємо до нуля і визначаємо значення x , при якому $Q_y=0$

$$-R_B + q \cdot x = 0,$$

$$x = \frac{R_B}{q} = \frac{21.25}{10} = 2.125 \text{ м}.$$

Знайдене значення x підставляємо в рівняння згинаючого моменту

$$M_z(x = 2.125) = R_B \cdot 2.125 - \frac{q \cdot 2.125^2}{2} = 21.25 \cdot 2.125 - \frac{10 \cdot 2.125^2}{2} = 22.58 \text{ кНм}.$$

Таким чином, на відстані 2.125м від точки В згинаючий момент має максимум і дорівнює 22.58кНм.

Практичне заняття 7, 8

Розрахунок на міцність і жорсткість при згині

Для заданої балки (рис.6.1) підібрати двотавровий, круглий і прямокутний ($h=2b$) переріз і порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю.

Виконати повну перевірку міцності двотаврової балки (по головним напруженням).

Матеріал балок: Ст.3.

$[\sigma]=160 \text{ МПа}$ (додаток 3); $[\tau]=0.6[\sigma]=100 \text{ МПа}$; $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (додаток 4); $a=1 \text{ м}$; $q=50 \text{ кН/м}$; $F=80 \text{ кН}$; $M=40 \text{ кНм}$.

Будуємо епюри поперечних сил Q_y та згинаючих моментів M_z . Небезпечним по нормальних напруженнях буде переріз А.

Використовуючи умову міцності по нормальним напруженням підбирається переріз балки

$$\sigma = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma],$$

$$M_{z \max} = 200 \text{ кНм} = 200 \cdot 10^3 \text{ Нм}; [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$W_z = \frac{M_{z \max}}{[\sigma]} = \frac{200 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1250 \text{ см}^3.$$

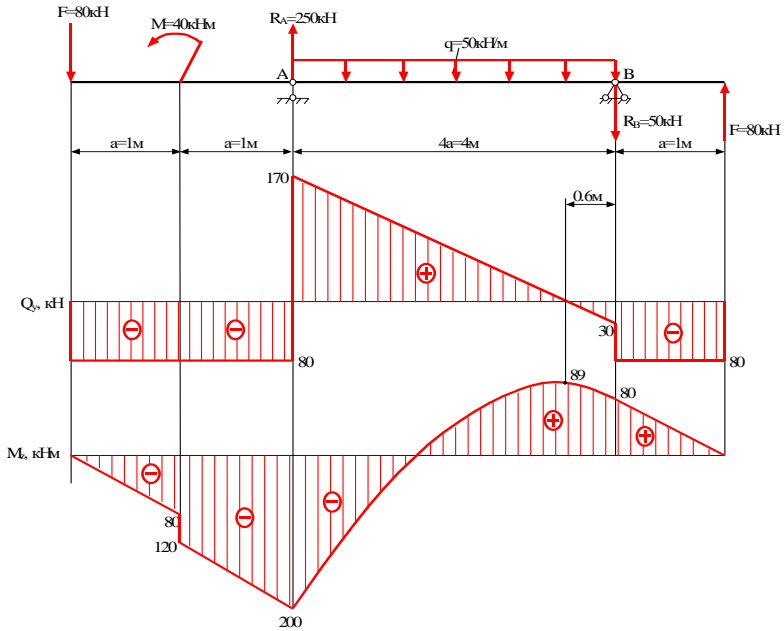


Рис.6.1

Двутавр

Відповідно до ДЕСТ 8239-72 (додаток 6) приймається двутавр №45 з наступними характеристиками: $I_z=27696\text{см}^4$, $W_z=1231\text{см}^3$, $S_z=708\text{см}^3$, $A_1=84.7\text{см}^2$, $h=45\text{см}$, $b=16\text{см}$, $t=1.42\text{см}$, $d=0.9\text{см}$.

Дійсні напруження

$$\sigma = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{200 \cdot 10^3}{1.231 \cdot 10^{-6}} = 162.5 \cdot 10^6 \text{Па} = 162.5 \text{МПа} \cdot$$

Перенапруження

$$\frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{162.5 - 160}{160} \cdot 100\% = 1.56\% < 5\%.$$

Прямокутник

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; h=2 \cdot b; W_z = \frac{2}{3} b^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_z}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1250}{2}} = 12.3 \text{ см}; h = 2 \cdot b = 2 \cdot 12.3 = 24.6 \text{ см}.$$

Площа прямокутного перерізу

$$A_2 = b \cdot h = 12.3 \cdot 24.6 = 303.3 \text{ см}^2.$$

Круглий переріз

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}; d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_z}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1250}{\pi}} = 23.35 \text{ см}.$$

Площа круглого перерізу

$$A_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 23.35^2}{4} = 428.2 \text{ см}^2$$

Відношення ваги погонного метра балки прямокутного і круглого поперечного перерізу до погонного метра балки двотаврового перерізу дорівнює

$$A_1:A_2:A_3=1:3.58:5.06.$$

Епюри нормальних і дотичних напружень для двотаврового перерізу показані на рис.6.2 Нормальні напруження мають максимум в крайніх верхніх і нижніх волокнах, а дотичні – в центральних волокнах двутавра. При повній перевірці міцності, коли враховується дія і нормальних і дотичних напружень, за небезпечну точку приймається точка 2, де близькі до максимуму нормальні напруження і мають значну величину дотичні.

З рис.6.1 видно, що небезпечним перерізом буде переріз в точці А, де згинаючий момент і поперечна сила мають максимальні значення.

Таким чином дані для розрахунку: $M_{z\max}=200\text{кНм};$
 $Q_{y\max}=170\text{кН}$

Нормальні напруження в точці 2

$$\sigma_2 = \frac{M_{z\max}}{I_z} \cdot y = \frac{200 \cdot 10^3}{27696 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.21 = 1.52 \cdot 10^8 \text{ Па} = 152 \text{ МПа}$$

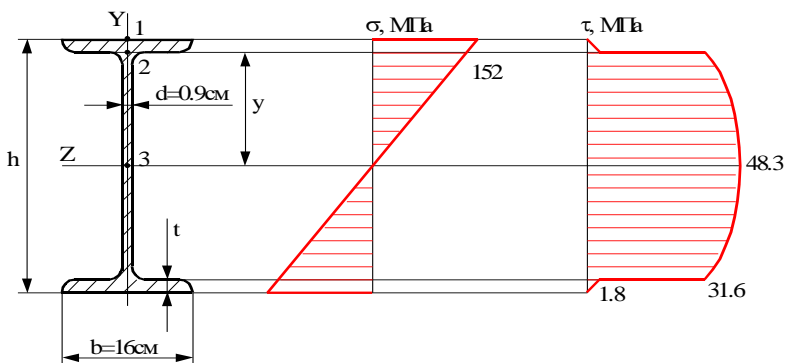


Рис.6.2

Відстань y від осі Z до точки 2 визначається з рис.6.2

$$y = \frac{h}{2} - t = \frac{45}{2} - 1.42 = 21.08 \text{ см} \approx 0.21 \text{ м}$$

Дотичні напруження в точці 3

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y_{\max}} \cdot S_z}{d \cdot I_z} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 708 \cdot 10^{-6}}{0.9 \cdot 10^{-2} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 48.3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48.3 \text{ МПа}$$

Статичний момент полки відносно осі Z

$$S_z^{\text{полки}} = A^{\text{полки}} \cdot y_c = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 16 \cdot 1.42 \cdot \left(\frac{45}{2} - \frac{1.42}{2} \right) = 464 \text{ см}^3 = 464 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

де $A^{\text{полки}} = b \cdot t$ – площа поперечного перерізу полки;

$y_c = \frac{h}{2} - \frac{t}{2}$ – відстань до центру ваги полки.

Дотичні напруження в точці 2

$$\tau_2 = \frac{Q_{y \max} \cdot S_z^{\text{полки}}}{d \cdot I_z} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 464 \cdot 10^{-6}}{0.9 \cdot 10^{-2} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 31.6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31.6 \text{ МПа}$$

$$\tau'_2 = \frac{Q_{y \max} \cdot S_z^{\text{полки}}}{b \cdot I_z} = \frac{170 \cdot 10^3 \cdot 464 \cdot 10^{-6}}{16 \cdot 10^{-2} \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 1.8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1.8 \text{ МПа}$$

Еквівалентне напруження визначається по четвертій теорії міцності

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{152^2 + 3 \cdot 31.6^2} = 161.5 \text{ МПа}$$

$$\text{Перенапруження } \frac{161.5 - 160}{160} \cdot 100\% = 0.97\% < 5\%.$$

Практичне заняття 9, 10

Статично невизначені системи при розтягу (стиску)

Для заданої системи визначити діаметр стержнів якщо відоме відношення їх площ і величина діючого навантаження.

Дано: $a=1\text{ м}$; $\alpha=60^\circ$; $F=12\text{ т}$; $A_1=2 \cdot A_2$; $E_1=E_2=E$; матеріал сталь 3; $[\sigma]=160\text{ МПа}=1600\text{ кг/см}^2$ (додаток 3).

В задачі необхідно визначити діаметр стержнів, тобто виконати проектний розрахунок. Так як стержні системи зазнають деформації розтягу-стиску, то проектний розрахунок виконується по формулі

$$A \geq \frac{|N|}{[\sigma]}.$$

Допустимо напруження нам задано, тому для відповіді на питання задачі необхідно визначити нормальні сили в поперечних перерізах стержнів 1 і 2.

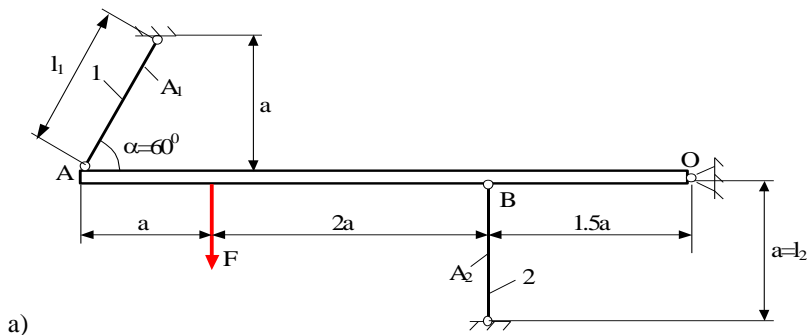
Скористаємося методом перерізів і розсічемо підвіски поперечними перерізами, відкинувши верхню частину стержня 1 і нижню частину стержня 2 та замінимо їх дію нормальними силами N_1 і N_2 (рис.4.1,б). Але тепер виникає питання – як направити N_1 і N_2 ? Тобто який із стержней стиснутий, а який – розтягнутий? Для простих систем, подібних тій яку ми розглядаємо, відповідь на це питання достатньо очевидна. Однак, для більш складних стержневих систем відповісти на нього не так просто. Тому в більшості випадків зручно використовувати формальний підхід.

Використовуючи формальний підхід, припустимо, що стержень 1 розтягнутий, стержень 2 стиснутий, тобто направимо N_1 від перерізу, а N_2 до перерізу. Відкинемо також в'язі, накладені на балку в шарнірі і замінимо їх реакціями R_x і R_y .

Для визначення чотирьох невідомих N_1 , N_2 , R_x , R_y ми можемо скласти лише 3 незалежних рівняння статки, тобто $\sum X=0$; $\sum Y=0$; $\sum M_0=0$. Таким чином, система 1 раз статично невизначена.

Перші два рівняння статки крім N_1 і N_2 містять невідомі реакції R_x і R_y , визначати які нема необхідності. Таким чином, відносно зусиль які нас цікавлять N_1 і N_2 ми маємо лише одне рівняння:

$$\sum M_0 = F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a) - N_1 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ - N_2 \cdot 1.5 \cdot a = 0. \quad (4.1)$$



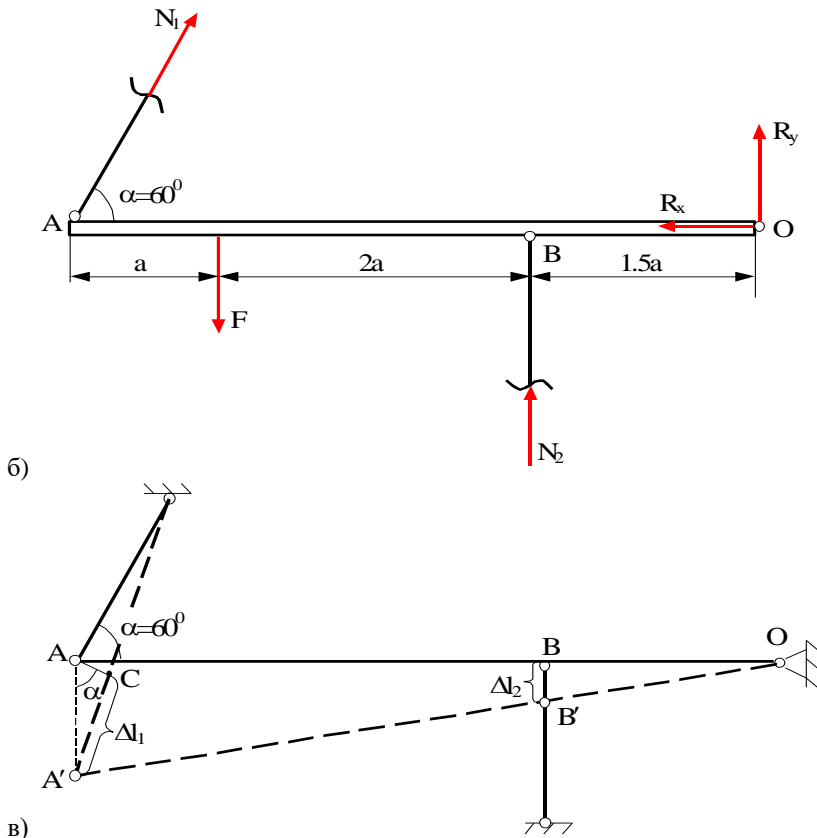


Рис.4.1

Для визначення N_1 і N_2 необхідно скласти одне рівняння спільності переміщень. З цією метою розглянемо систему в деформованому стані.

З подібності $\triangle OBB'$ і $\triangle OAA'$ находимо

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a}{1.5 \cdot a} = \frac{4.5}{1.5} = 3.$$

$$AA' = 3 \cdot BB' \quad (4.2)$$

$$\text{Із } \triangle AA'C \quad AA' = \frac{\Delta l_1}{\sin 60^\circ} = \frac{2\Delta l_1}{\sqrt{3}}.$$

З урахуванням цього (4.2) приймає вид

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 60^\circ} = 3 \cdot \Delta l_2; \quad \frac{2\Delta l_1}{\sqrt{3}} = 3 \cdot \Delta l_2. \quad (4.3)$$

Це рівняння сумісності переміщень.

Виразимо Δl_1 і Δl_2 через зусилля в стержнях N_1 і N_2

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2}.$$

Приймаючи до уваги, що $A_1 = 2 \cdot A_2$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$l_1 = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad l_2 = a \text{ підставимо вирази для } \Delta l_1 \text{ і } \Delta l_2 \text{ в рівняння (4.2).}$$

$$\frac{2 \cdot N_1 \cdot 2 \cdot a}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot A_2} = 3 \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot A_2},$$

$$N_1 = 4,5 N_2. \quad (4.4)$$

Сумісним розв'язком рівнянь (4.1) і (4.4) визначимо N_1 і N_2

$$\begin{aligned} F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a) - 4.5 \cdot N_2 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ - N_2 \cdot 1.5 \cdot a &= 0, \\ F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a) - N_2 \cdot [4.5 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ + 1.5 \cdot a] &= 0, \\ N_2 = \frac{F \cdot (2 \cdot a + 1.5 \cdot a)}{4.5 \cdot (a + 2 \cdot a + 1.5 \cdot a) \cdot \sin 60^\circ + 1.5 \cdot a} &= \frac{12000 \cdot 3.5}{4.5 \cdot 4.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.5} = 2206.23 \text{ кг}, \\ N_1 = 4.5 \cdot N_2 = 4.5 \cdot 2206.23 &= 9928.03 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Отримані позитивні знаки зусиль говорять про те, що при навантаженні системи силою F стержень 1 зазнає розтягу, і стержень 2 – стиску.

Порівняння величин N_1 і N_2 показує, що перший стержень є більш навантаженим. Визначимо необхідну площу A_1 .

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{9928,03}{1600} = 6.2 \text{ см}^2$$

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}; d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6.2}{\pi}} = 2.81 \text{ см}$$

Приймаємо $d_1=2.8 \text{ см}$. Тоді $A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2.8^2}{4} = 6.16 \text{ см}^2$

Напруження в стержні 1

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{9928.03}{6.16} = 1611.69 \text{ кг/см}^2$$

Перенапруження

$$\frac{1611.69 - 1600}{1600} \cdot 100\% = 0.7\% \leq 5\%$$

Тому можна прийняти $d_1=2.8 \text{ см}$.

Перевіримо міцність 2-го стержня

$$A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{6.16}{2} = 3.08 \text{ см}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{|N_2|}{A_2} = \frac{2206.23}{3.08} = 716.31 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Умова міцності – виконується.

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3.08}{\pi}} = 1.98 \text{ см}.$$

Приймаємо $d_2=2 \text{ см}$.

Практичне заняття 11, 12

Геометричні характеристик плоских перерізів

Для заданого перерізу (рис.5.6) визначити, користуючись таблицями сортаменту, аналітичним способом положення головних центральних осей і величину головних центральних моментів інерції.

Переріз складається з двутавра №30а і кутника 140×90×10, $a=0.1 \cdot b=0.1 \cdot 145=14.5\text{мм}$.

Відповідно до ДЕСТ 8239-72 (додаток 6) для двутавра №30а: $b=145\text{мм}$, $A_1=49.9\text{см}^2$, $I_{Z1}=7780\text{см}^4$, $I_{Y1}=436\text{см}^4$.

Дані для кутника по сортаменту (додаток 7): $A_2=22.2\text{см}^2$, $I_{Z2}=146\text{см}^4$, $I_{Y2}=444\text{см}^4$, $I_{ZY}=147\text{см}^4$.

Даний переріз креслиться в масштабі (рис.5.6). Центр ваги визначається в системі допоміжних осей. Відстані від осей Y і Z до центра ваги двутавра C_1

$$y_1 = \frac{300}{2} = 150\text{мм} = 15\text{см}; \quad z_1 = \frac{145}{2} = 72.5\text{мм} = 7.25\text{см}$$

Відстані від цих осей до центра ваги кутника

$$y_2=300+21.2=321.2\text{мм}=32.12\text{см}; \quad z_2=14.5+140-45.8=108.7\text{мм}=10.87\text{см}$$

Координати центра ваги перерізу С

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{15 \cdot 49.9 + 32.12 \cdot 22.2}{49.9 + 22.2} = 20.3\text{см} = 203\text{мм};$$

$$z_c = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{7.25 \cdot 49.9 + 10.87 \cdot 22.2}{49.9 + 22.2} = 8.35\text{см} = 83.5\text{мм}$$

Точка С наноситься на креслення. При правильному визначенні її положення точка С лежить на прямі C_1C_2 , яка з'єднує центри ваги двутавра та кутника.


$$\begin{aligned} I_{ZC} &= I_{Z1} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{Z2} + a_2^2 \cdot A_2 = \\ &= 7780 + (-5.3)^2 \cdot 49.9 + 146 + 11.82^2 \cdot 22.2 = 12437 \text{ cm}^4; \end{aligned}$$

$$I_{YC} = I_{Y1} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{Y2} + b_2^2 \cdot A_2 = 436 + (-1.1)^2 \cdot 49.9 + 444 + 2.52^2 \cdot 22.2 = 1081 \text{ см}^4$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 - y_C = 15 - 20.3 = -5.3 \text{ см} = -53 \text{ мм}, \\ a_2 &= y_2 - y_C = 32.12 - 20.3 = 11.82 \text{ см} = 118.2 \text{ мм}, \\ b_1 &= z_1 - z_C = 7.25 - 8.35 = -1.1 \text{ см} = -11 \text{ мм}, \\ b_2 &= z_2 - z_C = 10.87 - 8.35 = 2.52 \text{ см} = 25.2 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Відцентровий момент інерції всього перерізу відносно осей Z_C і Y_C .

$$I_{ZCYC} = I_{Z1Y1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1 + I_{Z2Y2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2 = 0 + (-5.3) \cdot (-1.1) \cdot 49.9 + 147 + 11.82 \cdot 2.52 \cdot 22.2 = 1101 \text{ см}^4$$

Якщо осьові моменти інерції мають тільки додатні значення, то центробіжні можуть бути як додатні, так і від'ємні.

Кут нахилу головних осей інерції до центральних осей.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{ZCYC}}{I_{YC} - I_{ZC}} = \frac{2 \cdot 1101}{1081 - 12437} = -0.194; 2 \cdot \alpha = -11^\circ; \alpha = -5.5^\circ$$

Головні моменти інерції перерізу.

$$\begin{aligned} I_{\max} &= I_U = \frac{I_{ZC} + I_{YC}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{ZC} - I_{YC})^2 + 4 \cdot I_{ZCYC}^2} = \\ &= \frac{12437 + 1081}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(12437 - 1081)^2 + 4 \cdot 1101^2} = 12532 \text{ см}^4 \\ I_{\min} &= I_V = \frac{I_{ZC} + I_{YC}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{ZC} - I_{YC})^2 + 4 \cdot I_{ZCYC}^2} = \\ &= \frac{12437 + 1081}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(12437 - 1081)^2 + 4 \cdot 1101^2} = 983 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Практичне заняття 13, 14

Косий згин

Приклад. Консольний стержень навантажений зосередженою силою $P=2\text{ кН}$, яка прикладена в центр ваги поперечного перерізу під кутом $\beta=30^\circ$ до вертикальної осі (рис.18). Матеріал бруса – сосна, $\sigma_{adm}=10\text{ МПа}$. Підібрати прямокутний поперечний переріз при $h=2b$.

Розв'язання. Будемо епюри поперечних сил та згинальних моментів у двох головних площинах.

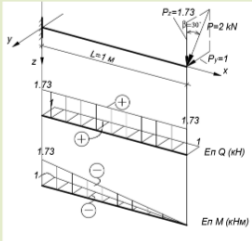


Рис.18. Розрахункова схема та епюри внутрішніх зусиль

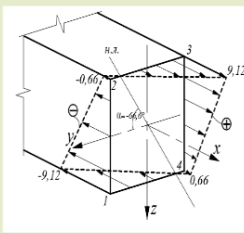


Рис. 19. $En \sigma_x$ (МПа)

Небезпечним перерізом є точка закріплення $x=0$: $M_y = -1,73\text{ кНм}$, $M_z = -1\text{ кНм}$.

Моменти опору для прямокутника при $h=2b$ $W_y = \frac{2b^3}{3}$,

$$W_z = \frac{b^3}{3}.$$

Умову міцності запишемо в кутових точках перерізу

$$(y_{max}, z_{max}) = (\frac{b}{2}, \frac{h}{2}):$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_y z_{max}}{I_y} + \frac{M_z y_{max}}{I_z} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{adm}, \quad (13)$$

$$\sigma_{x_{max}} = \left| \frac{-1,73\text{ кНм}}{\frac{2b^3}{3}} \right| + \left| \frac{-1\text{ кНм}}{\frac{b^3}{3}} \right| = 10\text{ МПа}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{3}{10000} \left(\frac{1,73}{2} + \frac{1}{1} \right)} = 0,082\text{ м} \approx 8,2\text{ см} \approx 8,5\text{ см}, \quad h = 8,5 \cdot 2 = 17\text{ см}.$$

Моменти інерції та моменти опору для підбраного перерізу:

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{8,5 \cdot 17^2}{6} = 409,417\text{ см}^3, \quad W_z = \frac{b^2h}{6} = \frac{8,5^2 \cdot 17}{6} = 204,708\text{ см}^3$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{8,5 \cdot 17^3}{12} = 3480,042\text{ см}^4, \quad I_z = \frac{b^3h}{12} = \frac{8,5^3 \cdot 17}{12} = 870,01\text{ см}^4.$$

Визначаємо положення нульової лінії за формулою (15.8):

$$\tan \alpha = -\frac{-1}{870,01} \cdot \frac{3480,042}{-1,73} = -2,312, \quad \alpha = -66,6^\circ.$$

Будемо епюру нормальних напружень в перерізі $x=0$ за формулою (18.11). Цифрові індекси відповідають кутовим точкам перерізу $(y_i, z_i) = (\pm \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2})$:

$$\sigma_{x1} = \frac{-1,73\text{ кНм}}{3480,042\text{ см}^4} \cdot 8,5\text{ см} + \frac{-1\text{ кНм}}{870,01\text{ см}^4} \cdot 4,25\text{ см} = -4,23 - 4,89 = -9,12\text{ МПа},$$

$$\sigma_{x2} = \frac{-1,73\text{ кНм}}{3480,042\text{ см}^4} \cdot (-8,5)\text{ см} + \frac{-1\text{ кНм}}{870,01\text{ см}^4} \cdot 4,25\text{ см} = 4,23 - 4,89 = -0,66\text{ МПа},$$

$$\sigma_{x3} = \frac{-1,73\text{ кНм}}{3480,042\text{ см}^4} \cdot (-8,5)\text{ см} + \frac{-1\text{ кНм}}{870,01\text{ см}^4} \cdot (-4,25)\text{ см} = 4,23 + 4,89 = 9,12\text{ МПа},$$

$$\sigma_{x4} = \frac{-1,73\text{ кНм}}{3480,042\text{ см}^4} \cdot (8,5)\text{ см} + \frac{-1\text{ кНм}}{870,01\text{ см}^4} \cdot (-4,25)\text{ см} = -4,23 + 4,89 = 0,66\text{ МПа}.$$