

# **Конспект лекцій**

## **з дисципліни**

### **«Опір матеріалів»**

#### **Лекція 1**

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

#### **Основні поняття та визначення**

Мета лекції: ознайомлення з основними поняттями науки про опір матеріалів

План лекції

1. Вступ. Наука про опір матеріалів
2. Основні гіпотези науки про опір матеріалів

#### **Рекомендована література**

1. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
2. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
3. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

#### **1. Вступ. Наука про опір матеріалів**

*Опір матеріалів* це наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд.

Під *міцністю* розуміють здатність конструкції, її частин і деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Під *жорсткістю* розуміють здатність конструкції і її елементів протидіяти деформації, яка викликана зовнішнім навантаженням.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

При всій різноманітності видів конструктивних елементів, що зустрічаються у спорудах і машинах, їх можна звести до порівняно невеликого числа основних форм. Тіла, які мають ці основні форми, і є

об'єктами розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість. До них відносяться стержні, оболонки, пластини і масивні тіла.

Стержнем або брусом називається тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри (рис. 1, а, б, в).

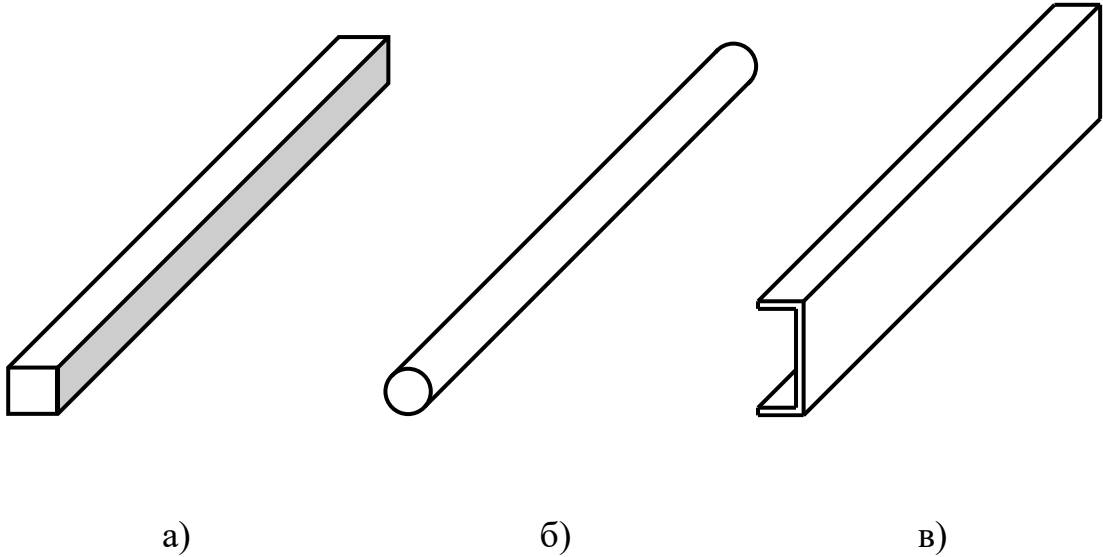


Рис. 1

Оболонка це тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної (рис. 2, а, б). Поверхня, яка ділить товщину оболонки на рівні частини, називається серединною.

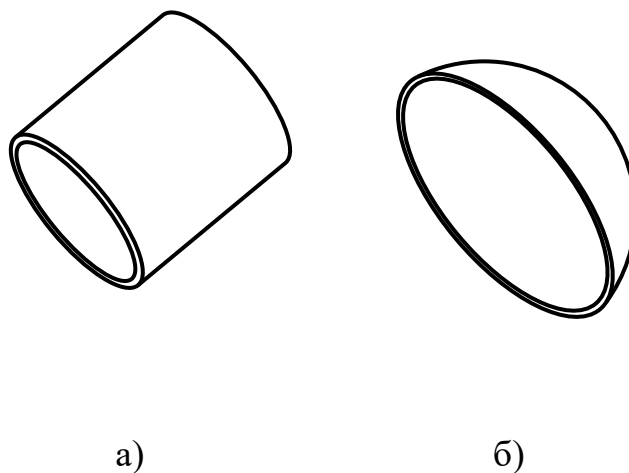


Рис. 2

Якщо серединна поверхня є площиною, то розрахунковий об'єкт називають *пластиною* (рис. 3, а, б).

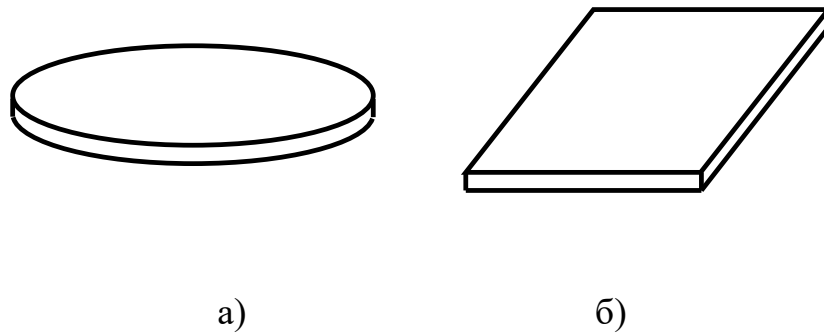


Рис. 3

Тіла, у яких всі три розміри одного порядку, називають *масивними тілами*. До них відносяться фундаменти споруд, підпірні стінки тощо.

## 2. Основні гіпотези науки про опір матеріалів

Для побудови теорії опору матеріалів приймають певні гіпотези відносно структури і властивостей матеріалів, а також про характер деформацій. Ці гіпотези наступні:

1. *Гіпотеза про суцільність матеріалу.* Передбачається, що матеріал повністю заповнює форму тіла. Атомістична теорія дискретної побудови речовини до уваги не приймається.
2. *Гіпотеза про однорідність і ізотропність.* Матеріал передбачається однорідним і ізотропним, тобто в будь-якому об'ємі і в будь-якому напрямку властивості матеріалу вважаються однаковими. Хоча кристали, із яких складаються метали, анізотропні, але їх хаотичне розташування дає можливість вважати макрооб'єми металів ізотропними. В окремих випадках припущення про ізотропію некоректне. Наприклад, до анізотропних матеріалів відноситься деревина, властивості якої вздовж і поперек волокон суттєво відмінні, армовані матеріали тощо.
3. *Гіпотеза про малість деформацій.* Припускається, що деформації малі порівняно з розмірами тіла.
4. *Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу.* Всі тіла передбачаються абсолютно пружними. Більшість задач опору

матеріалів розв'язують в припущенні лінійно деформованого тіла, тобто такого, при якому справедливий закон Гука, що виражає пряму пропорційність між деформаціями і навантаженнями.

Перераховані вище гіпотези дозволяють розв'язувати широке коло задач по розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість. Результати розрахунків добре узгоджуються з практичним даними.

## Лекція 2

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### **Зовнішні і внутрішні сили. Метод перерізів. Епюри внутрішніх сил**

Мета лекції: ознайомлення з поняттями про внутрішні і зовнішні сили, ознайомлення з методом перерізів і особливостями побудови епюр внутрішніх сил

План лекції

3. Класифікація зовнішніх сил
4. Внутрішні сили. Метод перерізів. Епюри
5. Епюри повздовжніх сил
6. Епюри крутних моментів
7. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів
8. Диференціальні залежності при згині. Особливості епюр  $Q$  і  $M$
9. Побудова епюр для рам

Рекомендована література

4. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
5. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
6. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

### **2.1. Класифікація зовнішніх сил**

*Зовнішніми силами називають сили взаємодії між елементом конструкції, що розглядається, і зв'язаними з ним тілами.*

Величина навантаження, що приходить на одиницю площі, називається *інтенсивністю навантаження*. Його позначають  $p$  і вимірюють в паскалях (Па) або кратних йому одиницях (кПа, МПа, ГПа). Навантаження розподілене по поверхні (рис. 14, а) приводять до головної площини (рис. 14, б), в результаті чого отримують навантаження розподілене по лінії або *погонне навантаження*. Інтенсивністю такого навантаження (Н/м, кН/м, МН/м,) називають величину навантаження, яке приходить на одиницю довжини лінії. Інтенсивність може бути змінною по цій довжині. Характер зміни навантаження зазвичай показують у вигляді епюри (графіка)  $q$ .

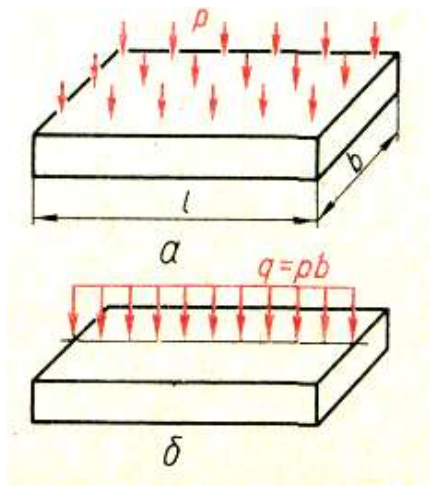


Рис. 14

У випадку рівномірно розподіленого навантаження (рис. 14, а) епюра  $q$  прямокутна (рис. 14, б). При дії гідростатичного тиску епюра навантаження  $q$  трикутна (рис. 15). Зустрічаються епюри більш складного виду: трапецевидна, синусоїдальна тощо.

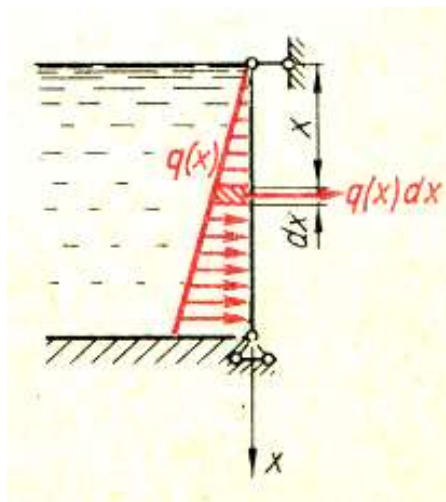


Рис. 15

Відмітимо, що *рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри і прикладена в центрі його ваги.*

Якщо навантаження розподілене по невеликій частині поверхні тіла, то його завжди замінюють рівнодійною, яку називають *зосередженою силою*  $F$  (Н, кН, МН). Крім того, зустрічаються навантаження, які можуть бути представлені у вигляді *зосередженого моменту* (пари).

Зустрічаються такі навантаження, які не є результатом контакту двох тіл, наприклад: власна вага, сили інерції тощо. Ці сили прикладені в кожній

точці об'єму, занятого тілом, а тому називаються *об'ємними* або *масовими силами*.

В залежності від характеру прикладання сил в часі розрізняють навантаження статичні і динамічні. Навантаження вважається *статичним*, якщо воно порівняно повільно і плавно зростає від нуля до свого кінцевого значення, а потім стає незмінним.

*Динамічні навантаження* супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так взаємодіючих з ним тіл. Динамічні навантаження поділяють на миттєво прикладені, ударні і повторно-змінні.

Навантаження вважається *миттєво прикладеним*, якщо воно зростає від нуля до свого кінцевого значення на протязі дуже короткого проміжку часу.

Для ударного навантаження характерно те, що в момент його прикладання тіло, що викликає навантаження, володіє певною кінетичною енергією.

Багато деталей машин зазнають дії навантажень, безперервно і періодично змінних в часі. Такі навантаження називаються *повторно-змінними*. Вони, як правило, пов'язані з рухами деталі, що циклічно повторюються.

## **2.2. Внутрішні сили. Метод перерізів. Епюри**

Між частками тіла завжди є певні сили взаємодії, або – внутрішні сили.

Для визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів широко застосовують *метод перерізів*.

Розглянемо довільне тіло, навантажене самоурівноваженою системою сил. В певному місці уявно розсічемо його площиною на дві частини – А і Б (рис. 16, а). При цьому сам переріз тепер буде мати дві сторони: одну, що належить частині А тіла (ліву), і другу, що належить частині В (праву). В кожній точці з обох сторін будуть діяти сили взаємодії (рис. 16, б).

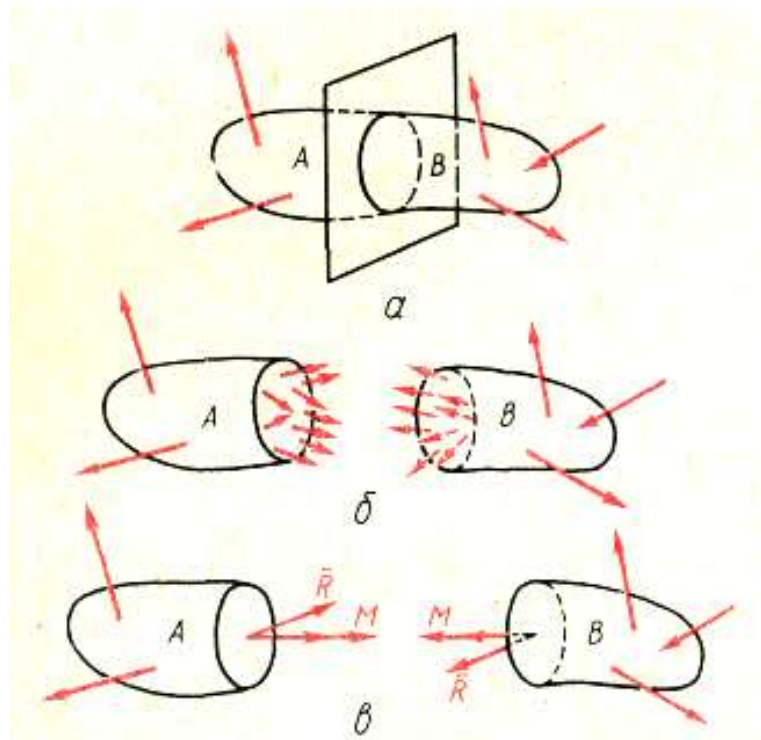


Рис. 16

Належить підкреслити, що внутрішні сили, що діють по перерізу, який належить частині А тіла, у відповідності із третім законом Ньютона, рівні по величині і протилежні по напрямку внутрішнім силам, що діють по перерізу, який належить частині В тіла (рис. 16, б). Іншими словами, внутрішні сили, що діють на різні частини, взаємні. Як будь-яку систему сил, їх можна привести до одної точки, в результаті чого на кожній стороні перерізу отримаємо головний вектор і головний момент внутрішніх сил в перерізі (рис. 16, в).

Стержень розсікають зазвичай площиною, перпендикулярною до осі, тобто поперечним перерізом (рис. 17, а). Якщо головний вектор і головний момент внутрішніх сил спроектувати на ось стержня  $x$  і головні центральні осі перерізу  $y$  і  $z$ , то на кожній стороні перерізу отримаємо шість внутрішніх силових факторів (рис. 17, б): три сили ( $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ) і три монета ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ). Ці величини називають *внутрішніми зусиллями* в перерізі стержня.

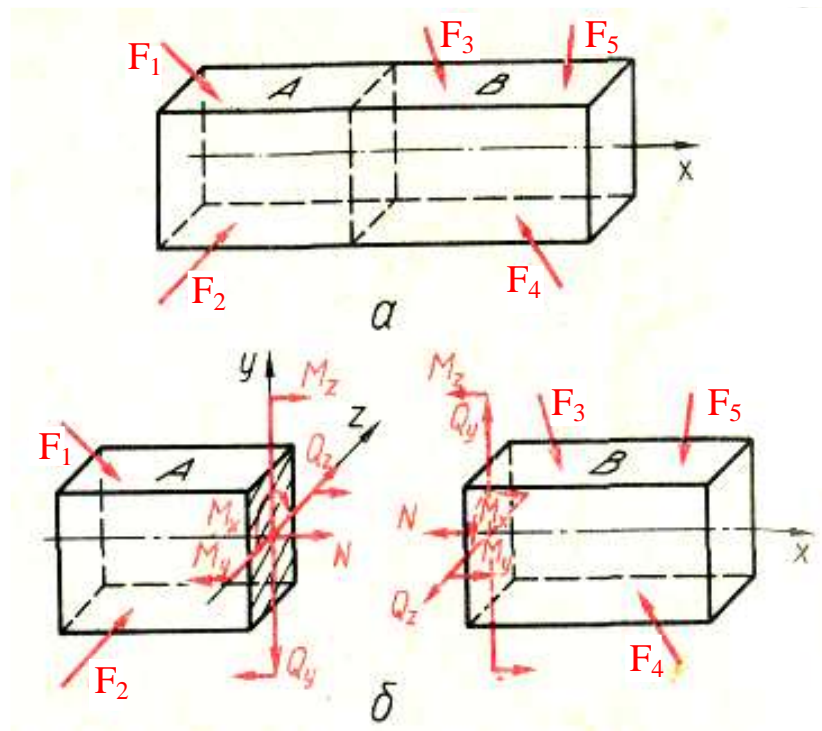


Рис. 17

Зусилля  $N$  викликає повздовжню деформацію стержня (розтяг або стиск);  $Q_y$  і  $Q_z$  – зсув сторін перерізу відповідно у напрямку осей  $y$  і  $z$ ;  $M_x$  – кручення стержня;  $M_y$  і  $M_z$  – згин стержня в головних площинах ( $zx$  і  $yx$ ). Тому для зусиль і моментів в перерізі прийняті наступні назви:

$N$  – *повздовжня або осьова* (направлена по осі стержня) сила;

$Q_y, Q_z$  – *поперечні сили*;

$M_x$  – *крутний момент*;

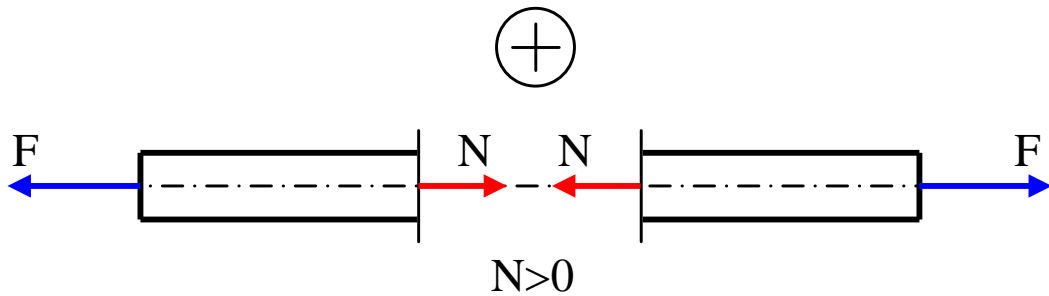
$M_y, M_z$  – *згинаючі моменти*.

Зусилля і моменти в різних перерізах одного і того ж стержня різні. *Графіки (діаграми), які показують як змінюються внутрішні зусилля при переході від перерізу до перерізу, називають епюрами*. Відмітимо певні правила, які застосовуються при побудові епюр:

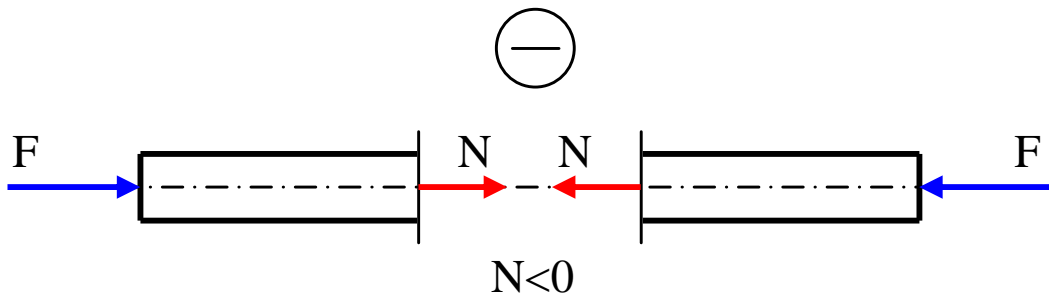
1. Ось (базу), на які будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна або просто співпадала з віссю стержня.
2. Ординати епюри відкладаються від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихувати епюри прийнято лініями, перпендикулярними до бази.
4. Для зусиль і моментів вибирають певний масштаб. Ординати відкладають в масштабі. Крім того, на епюрах проставляють числа, які показують величини характерних ординат, а в поле епюри в колі ставлять знак зусилля.

### 2.3. Епюри повздовжніх сил

Правило знаків при побудові епюр повздовжніх (осьових) сил: *повздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона викликає розтяг, і від'ємною, якщо викликає стиск* (рис. 18 а, б).



а)



б)

Рис. 18

### 2.4. Епюри крутних моментів

Деформація кручення найбільш розповсюджена в валах. Якщо навантаження на прямолінійний стержень (вал) складається тільки з моментів  $M_{кр}$ , площини яких перпендикулярні до осі стержня, то з шести зусиль і моментів в будь-якому перерізі залишається тільки крутний момент  $M_x$ .

Внутрішній момент  $M_x$  виражається через зовнішні  $M_{кр}$ :  $M_x$  в перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів  $M_{кр}$ , розташованих по одну сторону від перерізу. Якщо стержень (вал) обертається рівномірно, то алгебраїчна сума всіх  $M_{кр}$  дорівнює нулю. Тому результат буде отримано один і той же, у

випадку якщо будемо при розрахунку  $M_x$  брати суму моментів  $M_{кр}$ , розташованих зліва або справа від перерізу.

Правило знаків при побудові епюр крутних моментів  $M_x$ : *крутний момент  $M_x$  вважається додатним, якщо при спостережанні з торця вздовж осі частини, яка розглядається, він намагається обернути переріз за годинниковою стрілкою* (рис. 19 а, б).

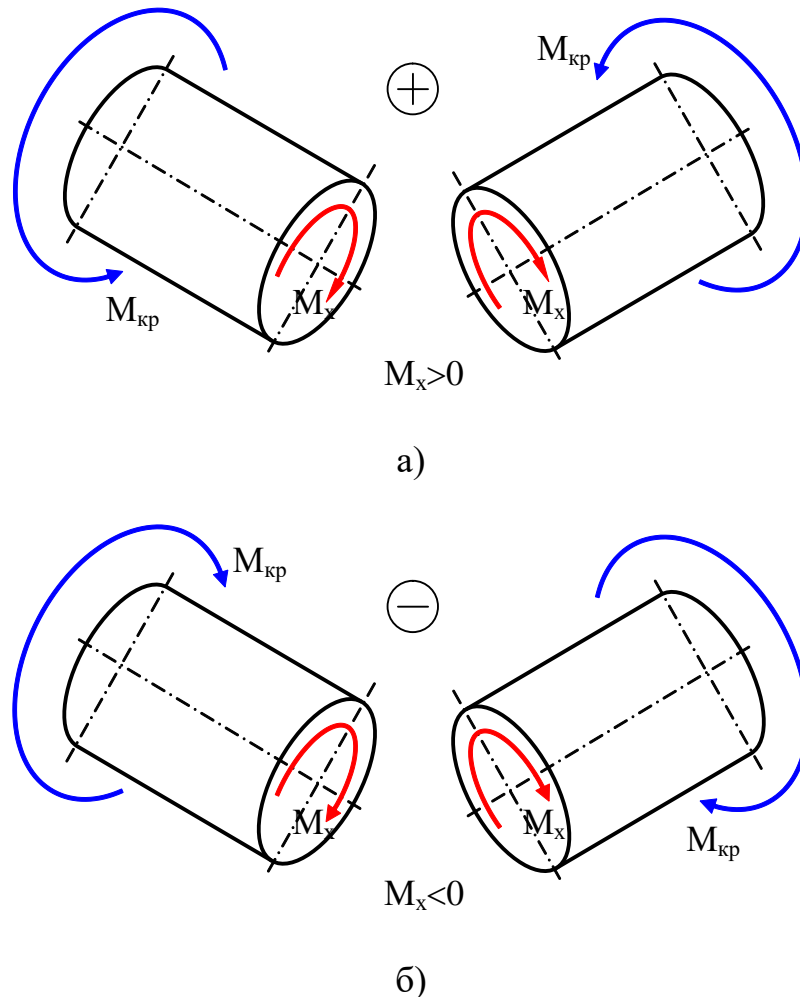
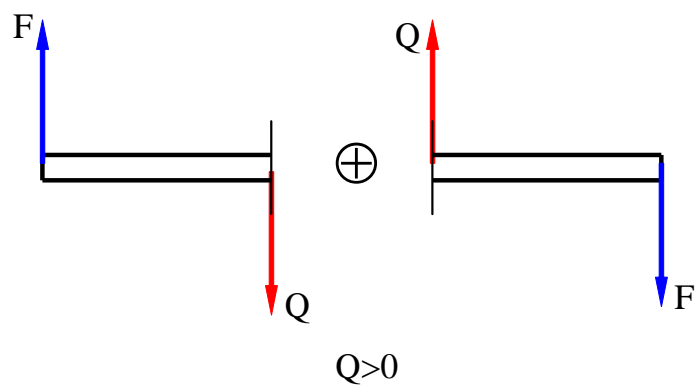


Рис. 19

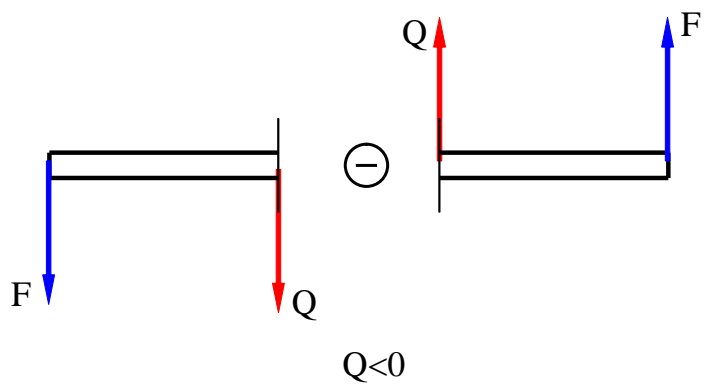
## 2.5. Епюри поперечних сил і згинаючих моментів

Встановимо наступні правила знаків для поперечної сили  $Q$  і згинаючого моменту  $M$ :

- 1) *поперечна сила  $Q$  в перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обернути частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою* (рис. 20 а, б);
- 2) *згинаючий момент  $M$  в перерізі додатний, якщо він викликає стиск у верхніх волокнах* (рис. 21, 22 а, б).



a)



б)

Рис. 20

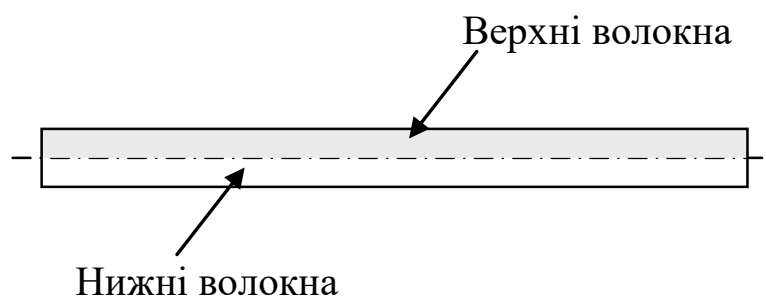
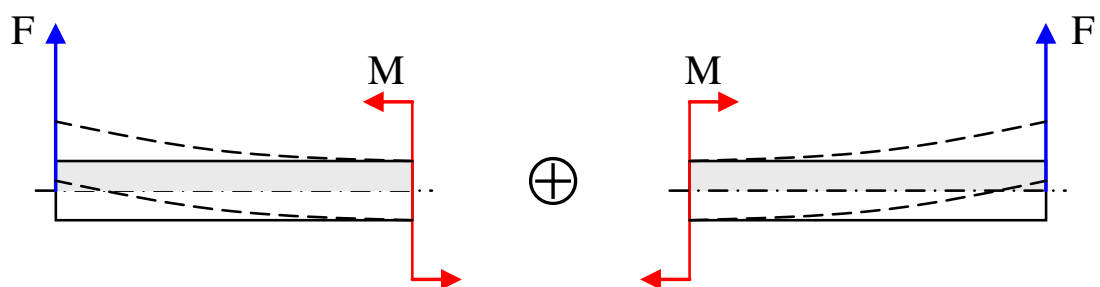


Рис. 21



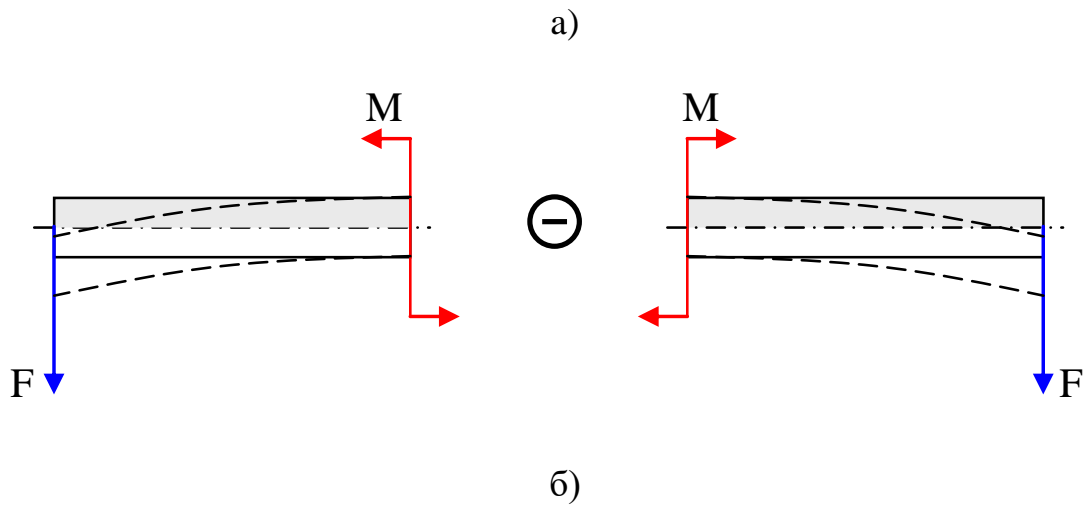


Рис. 22

Для практичних розрахунків рекомендується наступне:

1. Якщо зовнішня сила намагається повернути балку відносно перерізу, що розглядається, за годинниковою стрілкою, то у виразі для  $Q$  в цьому перерізі вона додатна (рис. 20).
2. Якщо зовнішнє навантаження створює відносно перерізу, що розглядається, момент, який викликає стиск верхніх волокон балки, то у виразі для  $M$  в цьому перерізі він додатний (рис. 22).

## 2.6. Диференціальні залежності при згині. Особливості епюр $Q$ і $M$

Встановимо певні характерні особливості епюр  $Q$  і  $M$ , знання яких спростить побудову епюр і дасть можливість контролювати їх правильність.

Розглянемо будь-яку балку з довільним навантаженням (рис. 23). Розподілене навантаження домовимося вважати позитивним, якщо воно направлене вгору (таке навантаження дає позитивну складову для згинаючого моменту в будь-якому перетині).

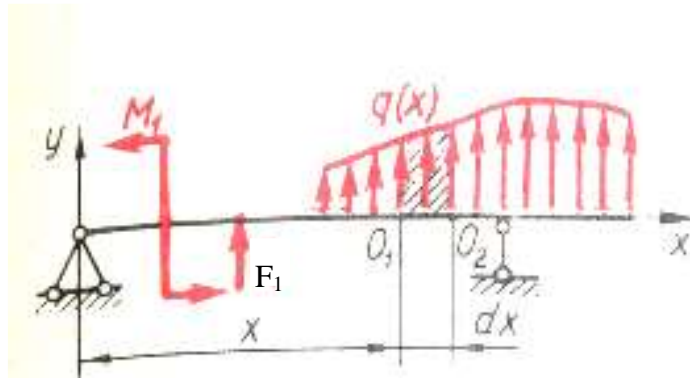


Рис. 23

Виділимо на ділянці, де немає зосереджених сил і моментів малий елемент балки  $O_1O_2$ . Він перебуває у рівновазі під дією зовнішнього навантаження, поперечних сил і згинаючих моментів в перетинах  $O_1$  і  $O_2$  (рис. 24, а). Оскільки в загальному випадку  $Q$  і  $M$  змінюється вздовж осі балки, то в перетині  $O_1$  маємо  $Q(x)$  і  $M(x)$ , а в перетині  $O_2$  маємо  $Q(x)+dQ$  і  $M(x)+dM$ . Для виводу, як завжди, зображуємо їх позитивно направленими. Із умови рівноваги виділеного елемента отримаємо

$$\sum Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \quad (58)$$

$$\sum M_0 = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \quad (59)$$

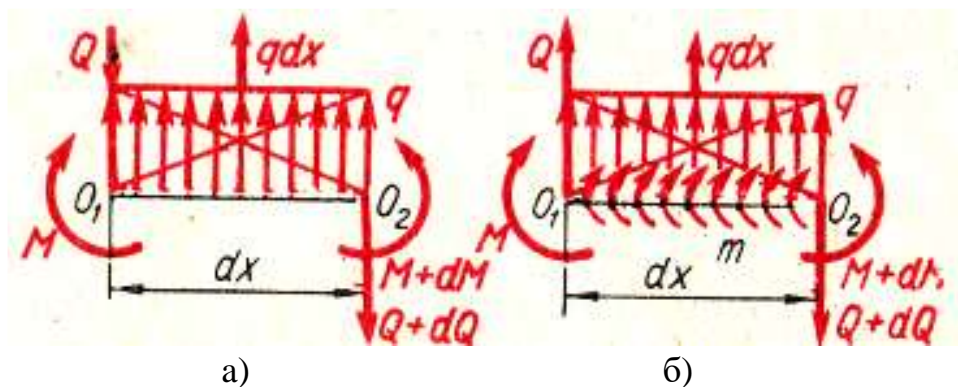


Рис. 24

Рівняння (58) дасть умову

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (60)$$

Із другого рівняння, нехтуючи членом  $q dx \frac{dx}{2}$ , знайдемо

$$\frac{dI}{dx} = Q \quad (61)$$

Із формул (60) і (61) випливає, що

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = q \quad (62)$$

Коли на ділянці, що розглядається, діє, крім того, розподілений момент інтенсивністю  $m$ , Нм/м (рис. 24, б) формула (61) приймає наступний вид

$$\frac{dI}{dx} = Q + m \quad (63)$$

формули (60) і (62) при цьому залишаються без змін.

Співвідношення (60)-(63) називають *диференціальними залежностями при згині*. Ці залежності дозволяють встановити певні особливості епюр згинаючих моментів і поперечних сил:

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюри  $Q$  обмежені прямими, паралельними базі, а епюри  $M$  в загальному випадку – похилими прямими (рис. 25).

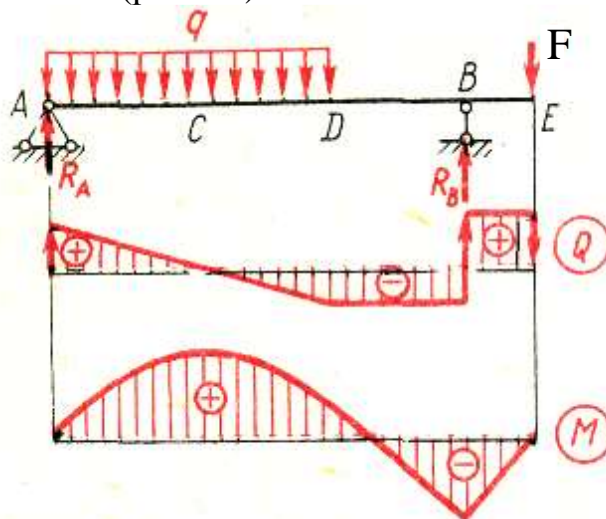


Рис. 25

2. На ділянках, де до балки прикладене рівномірно розподілене навантаження  $q$ , епюра  $Q$  обмежена похилими прямими, а епюра  $M$  – квадратичними параболою (рис. 25).

3. В перетинах, де  $Q=0$ , дотична до епюри  $M$  паралельна базі епюри (рис. 25, 26).

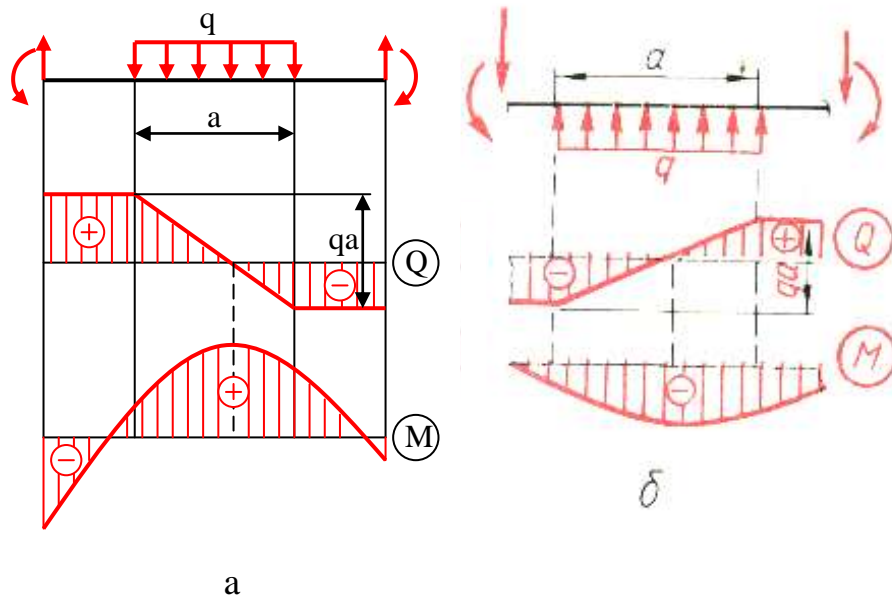


Рис. 26

4. На ділянках, де  $Q>0$ , момент  $M$  зростає, тобто зліва направо позитивні ординати епюри  $M$  збільшуються, а від'ємні – зменшуються (рис. 25, 26); на ділянках, де  $Q<0$ , момент  $M$  зменшується.
5. В перетинах, де до балки прикладені зосереджені сили:
- а) на епюрі  $Q$  будуть перепади на величину  $i$  в напрямку прикладених сил (рис. 27);
- б) на епюрі  $M$  будуть переломи (рис. 28), причому вістря перелому направлене проти дії сили.

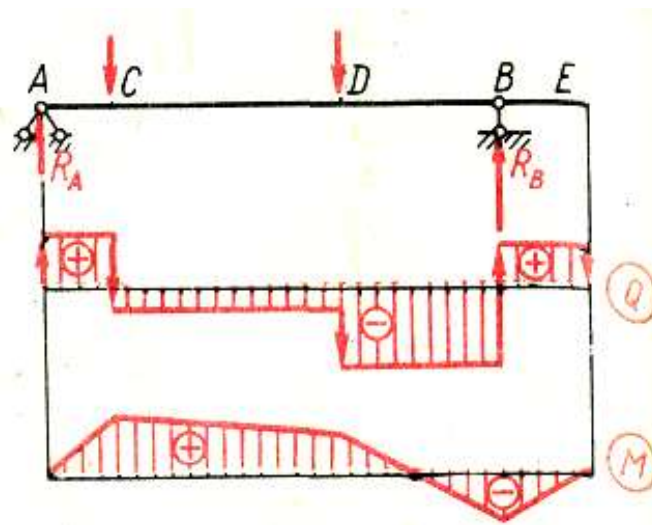


Рис. 27

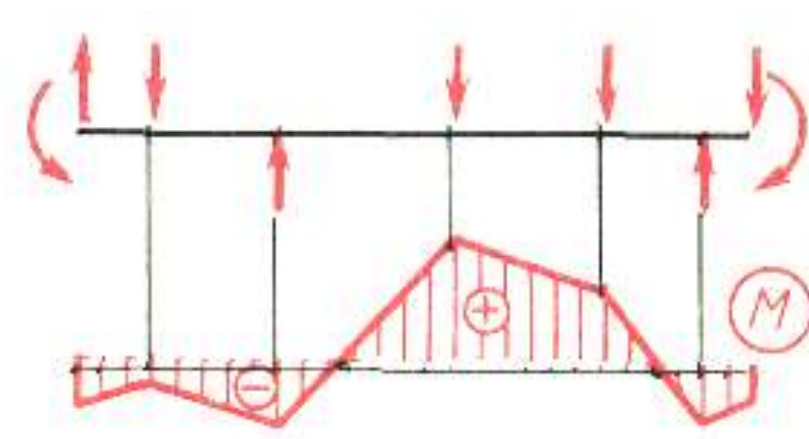


Рис. 28

6. В перетинах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі  $M$  будуть перепади на величину цих моментів (на епюрі  $Q$  змін не буде). Напрямок перепаду залежить від напрямку зовнішнього моменту (рис. 29). Гілки епюри до перепаду і після нього паралельні. Так, на рис. 29 лінія  $AB//CD//EF$ . Це не відноситься до випадку, коли в одній точці прикладені і сила і момент (рис. 30) – сила викликає перелом і порушує паралельність.

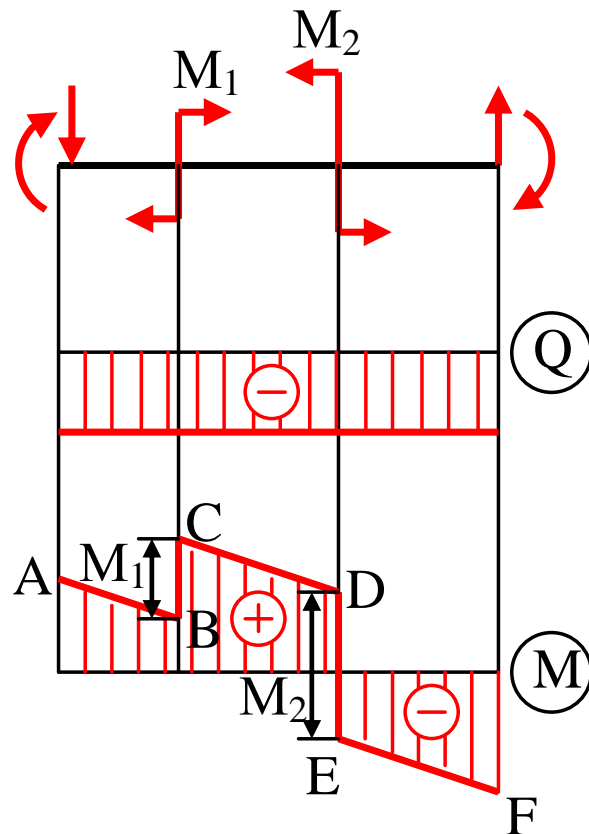


Рис. 29

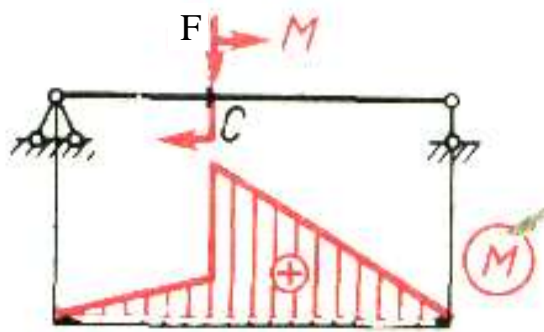


Рис. 30

7. Якщо на кінці консолі або в кінцеві опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перетині згинаючий момент дорівнює зовнішньому моменту (рис. 31). Якщо в кінцеві шарнірні опорі або на кінці консолі балка не завантажена зовнішнім моментом, то в них  $M=0$ , що має місце в більшості випадків.

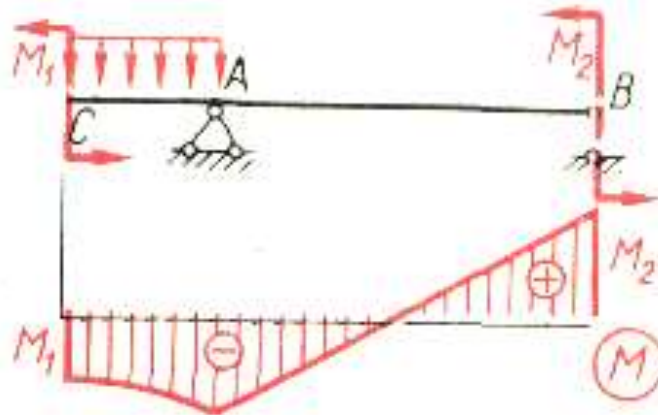


Рис. 31

8. Епюра  $Q$  є діаграмою похідної від епюри  $M$ . Тобто, ординати епюри  $Q$  пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри  $M$ .

## 2.7. Побудова епюр для рам

Рамами називають системи, що складаються з прямолінійних стержнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Вертикально розташовані стержні рами прийнято називати *стійками*, горизонтальні – *ригелями*.

Ось рами є ломаною лінією, однак кожен її прямолінійний ділянку можна розглядати як балку. Тому, щоб побудувати будь-яку епюру для рами, потрібно побудувати її для кожної окремої ділянки, що входить у склад рами. На відміну від звичайних балок в перетинах стержнів рами, крім згинаючих моментів  $M$  і поперечних сил  $Q$ , зазвичай діють ще і повздовжні сили  $N$ . Для  $Q$  і  $N$  зберігаються раніше прийняті правила знаків (п. 4.3, 4.5).

Для згинаючих моментів спеціального правила знаків не встановлюють, а при складанні виразів для  $M(x)$  приймають по власному бажанню будь-який момент додатним.

Ординати епюр, як завжди, відкладаємо перпендикулярно до осі рами, причому позитивні ординати  $Q$  і  $N$  із зовнішньої сторони рами, а від'ємні – з внутрішньої (якщо рама такої конфігурації що можна розрізнити її зовнішню і внутрішню сторони). Епюри  $M$  умовимося і для рам будувати на стиснутих волокнах.

Якщо рама має більше однієї опори, то перед тим як приступити до побудови епюр, необхідно методами статки знайти опорні реакції.

## 2.8. Напруження в перерізі

На рис. 32, а показані розподілені по лівій стороні перетину зусилля, які є результатом дії правої частини стержня на ліву, їх головний вектор  $\vec{R}$  і головний момент  $\vec{M}$ . Вектор  $\vec{R}$  є певною сумою зусиль, розподілених по всій площі перетину.

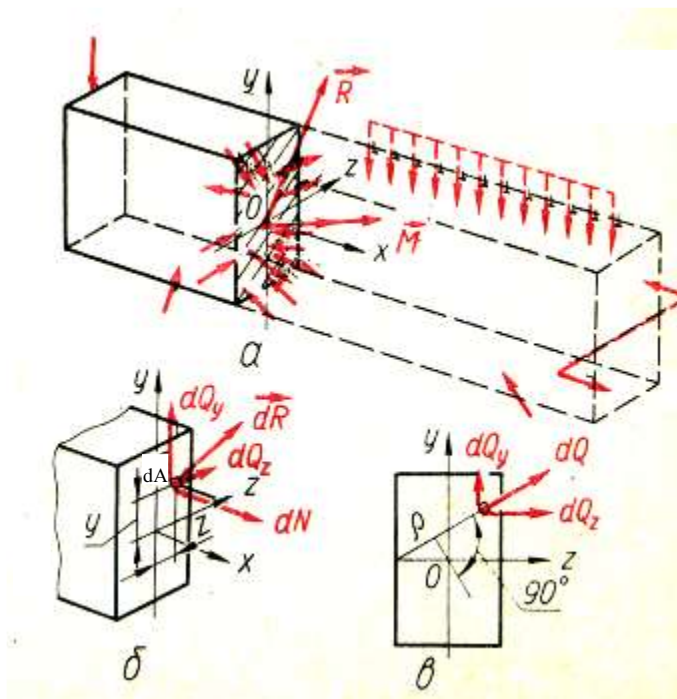


Рис. 32

Розглянемо нескінченно малий елемент площі  $dA$  (рис. 32, б). Оскільки елемент дуже малий можна вважати, що внутрішні сили, прикладені до його різних точок, однакові по величині і напрямку. Тоді їх рівнодійна  $d\vec{R}$  буде проходити через центр ваги елемента  $dA$ , координати якого рівні  $y$  і  $z$ . Тоді, приводячи ці зусилля до центру ваги елемента  $dA$ , отримаємо головний вектор  $d\vec{R}$  і головний момент, який буде дорівнювати нулю.

Проекціями  $d\vec{R}$  на осі  $x, y, z$  будуть елементарна повздовжня сила  $dN$  і елементарні поперечні сили  $dQ_y$  і  $dQ_z$ . Оскільки, як було сказано, зусилля на елементі можна вважати розподіленими рівномірно, то, розділивши величини  $dN, dQ_y$  і  $dQ_z$  на площу  $dA$ , отримаємо величини повздовжніх і поперечних сил, що приходяться на одиницю площі

$$\sigma = \frac{dN}{dA} \quad (64)$$

$$\tau_y = \frac{dQ_y}{dA} \quad (65)$$

$$\tau_z = \frac{dQ_z}{dA} \quad (66)$$

Ці величини називають напруженнями в точці проведеного перетину стержня, причому  $\sigma$  - нормальне напруження,  $\tau$  - дотичне напруження. Їх вимірюють в одиницях тиску – паскалях (Па).

Таким чином, *напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в даній точці перетину, що розглядається.*

Неважко встановити загальні залежності між  $\sigma$  і  $\tau$  з однієї сторони і  $N, Q_y, Q_z, M_y, M_z$  і  $M_x$  – з другої. Виходячи із визначень для зусиль і моментів і враховуючи формули (64-66) маємо

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma dA \quad (67)$$

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_A \tau_y dA \quad (68)$$

$$Q_z = \int_A dQ_z = \int_A \tau_z dA \quad (69)$$

$$M_y = \int_A z dN = \int_A \sigma z dA \quad (70)$$

$$M_z = \int_A y dN = \int_A \sigma y dA \quad (71)$$

$$M_x = \int_A (y dQ_z - z dQ_y) = \int_A (y \tau_z - z \tau_y) dA = \int_A \rho \tau dA \quad (72)$$

Отримані вирази (67-72), що встановлюють зв'язок між напруженнями і внутрішніми зусиллями, будемо називати *статичними рівняннями* або *інтегральними рівняннями рівноваги*.

### Лекція 3

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

#### **Розтяг і стиск. Механічні характеристики матеріалів**

Мета лекції: визначення напружень і деформацій при розтягу (стиску), ознайомлення з особливостями побудови умовної діаграми розтягу і механічними характеристиками матеріалу

План лекції

10. Напруження і деформації при розтягу і стиску. Розрахунок на міцність і жорсткість
11. Випробування матеріалів на розтяг
12. Діаграма розтягу
13. Розвантаження і повторне навантаження
14. Відносне видовження і звуження після розриву
15. Робота деформації
16. Діаграма розтягу в координатах  $\sigma$ - $\epsilon$
17. Допустимі напруження

#### Рекомендована література

7. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
8. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
9. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

#### **2.9. Напруження і деформації при розтягу і стиску. Розрахунок на міцність і жорсткість**

Розтяг або стиск стержня викликається силами, що діють вздовж його осі. В цьому випадку в поперечних перетинах стержня із шести внутрішніх силових факторів виникає тільки один – повздовжня (осьова) сила  $N$ . Найпростіший випадок розтягу стержня і епюра повздовжніх сил показані на рис. 33, а, б.

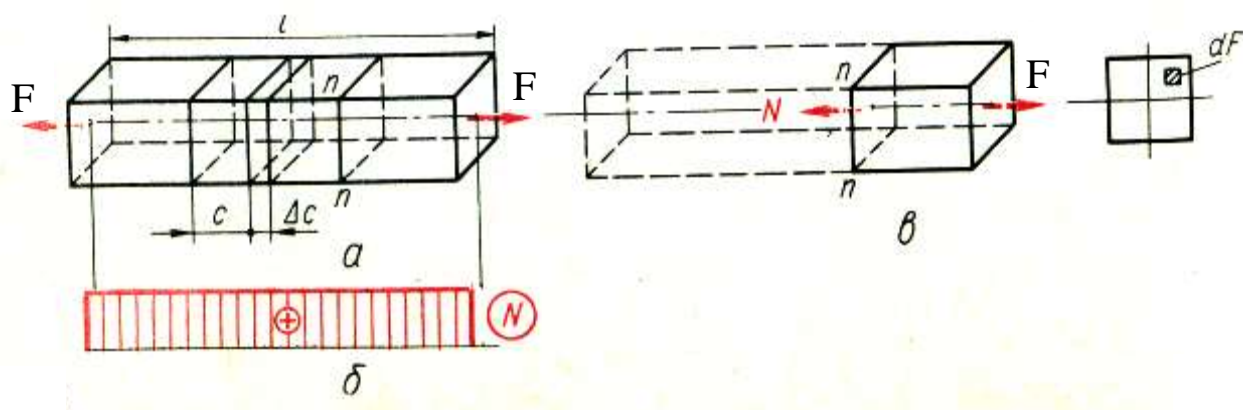


Рис. 33

Розглянемо геометричну сторону задачі. При спостереганні деформації розтягу стержня, на поверхні якого нанесені лінії, перпендикулярні до осі бруса (рис. 33, а), можна відмітити, що ці лінії, зміщуючись паралельно самі собі, залишаються прямими і перпендикулярними до осі бруса. Припускаючи, що вказана картина переміщення перетинів має місце і всередині стержня, приходимо до *гіпотези плоских перерізів*: *поперечні перетини стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступально вздовж осі стержня*. На основі гіпотези плоских перетинів належить заключити, що волокна видовжуються на одну величину і їх відносні видовження  $\varepsilon$  однакові

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const} \quad (73)$$

Це аналітичний вираз геометричної сторони задачі.

Фізична сторона задачі, що розглядається, полягає в установленні залежності деформацій від напружень. При пружних деформаціях ця залежність лінійна і, як відомо, називається законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ або } \sigma = E\varepsilon \quad (74)$$

де  $E$  — коефіцієнт пропорційності, який називається модулем повздовжньої пружності, модулем пружності першого роду або модулем Юнга. Модуль пружності — це одна із фізичних констант матеріалу. Вимірюється модуль пружності в одиницях напруження.

Підставляючи вираз (74) в формулу (67) отримуємо

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A = \sigma \Delta A \quad (75)$$

звідки

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (76)$$

Перейдемо до визначення деформацій стержня. З виразу (75) можна знайти відносне видовження

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad (77)$$

В межах призматичної ділянки стержня довжиною  $l$ , з однорідного матеріалу ( $E=\text{const}$ ), в перетинах якого діють однакові поздовжні сили  $N$ , видовження кожної одиниці довжини однакове і, відповідно, абсолютне видовження

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EA} \quad (78)$$

Розтяг і стиск супроводжується зміною поперечних розмірів стержня (рис. 34). При розтягу вони зменшуються, а при стиску – збільшуються.

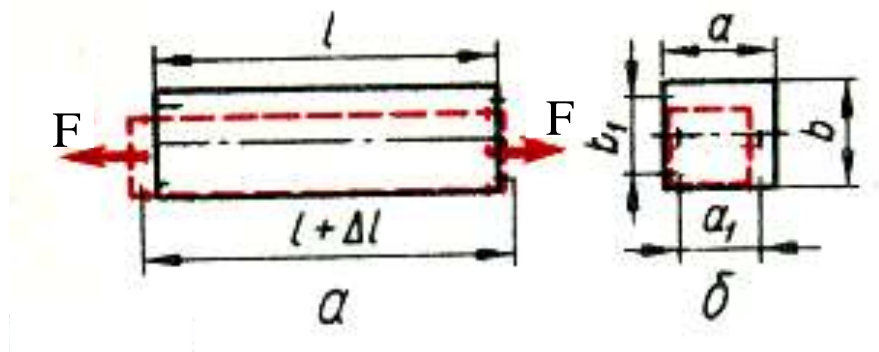


Рис. 34

По аналогії з поздовжньою деформацією різницю відповідних поперечних розмірів після деформації і до неї назовемо *абсолютною поперечною деформацією*

$$\Delta a = a_1 - a \quad (79)$$

$$\Delta b = b_1 - b \quad (80)$$

При розтягу поперечні деформації від'ємні, а при стиску – позитивні.

Розділивши абсолютну поперечну деформацію на відповідний початковий розмір, отримаємо *відносну поперечну деформацію*. Відносна поперечна деформація для ізотропних матеріалів по всім поперечним напрямкам однакова

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} \quad (81)$$

Між поперечною і повздовжньою відносними деформаціями при простому розтягу і стиску в межах застосування закону Гука існує стале відношення. Абсолютна величина цього відношення носить назву коефіцієнта Пуасона

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (82)$$

Коефіцієнт Пуасона – безрозмірна величина.

## 2.10. Випробування матеріалів на розтяг

При проектуванні і розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів, машин і споруд необхідно знати властивості матеріалів. Тому матеріали випробовують на розтяг, стиск, кручення, згинання і твердість.

Одним із основних видів випробувань матеріалів є випробування на розтяг, оскільки при цьому виявляються найбільш важливі їх властивості. Із матеріалу, що випробовується, виготовляють спеціальні зразки. Частіше всього їх роблять циліндричними (рис. 35, а), із листового метала зазвичай виготовляють плоскі зразки (рис. 35, б).

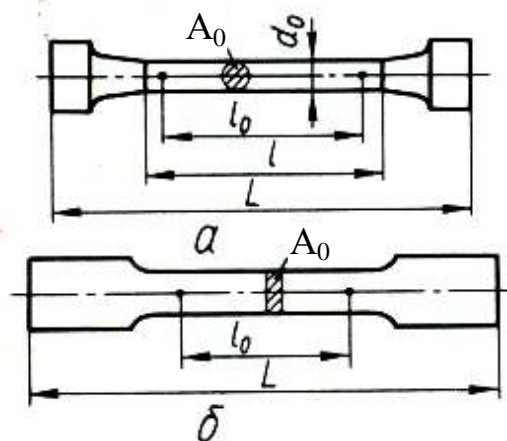


Рис. 35

### 2.10.1. Діаграма розтягу

Для випробувань на розтяг застосовують розривні машини, які дозволяють в процесі випробування визначати зусилля і відповідні їм деформації зразка. По цим даним будують початкову діаграму розтягу, в якій по осі ординат відкладають зусилля, а по осі абсцис – відповідні їм видовження. Характер діаграми розтягу залежить від властивостей матеріалу, що випробовується. Типовий вид такої діаграми для мало вуглецевої сталі показаний на рис. 36.

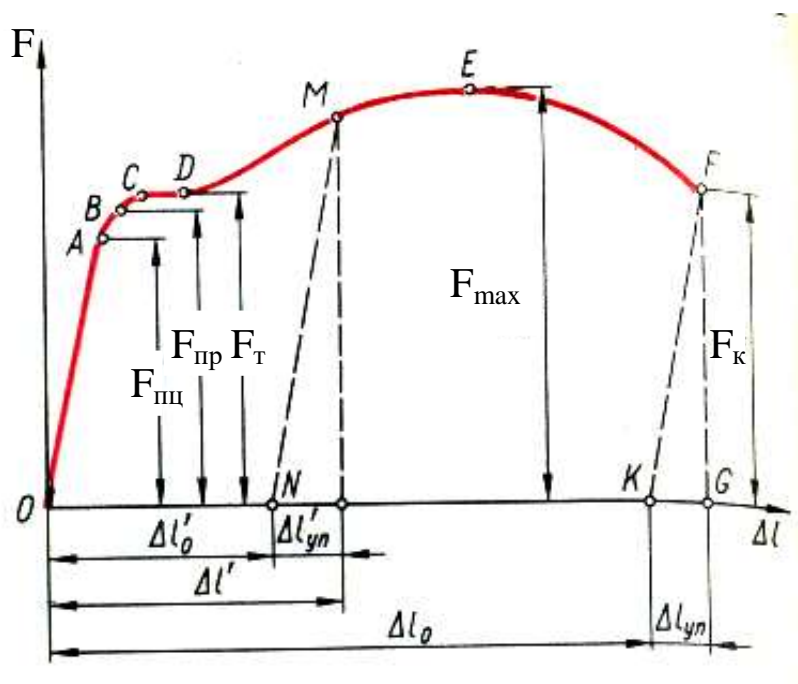


Рис. 36

Розглянемо характерні ділянки і точки цієї діаграми, а також відповідні їм стадії деформування зразка.

Від початку навантаження до певного значення сили розтягу має місце пряма пропорційна залежність між видовженням зразка і силою. Ця залежність на діаграмі виражається прямою ОА. На цій стадії розтягу справедливий закон Гука.

Позначимо силу, при якій закон пропорційності припиняє свою дію, через  $F_{\text{пц}}$ . Цьому значенню сили на діаграмі відповідає точка А. Напруження, викликане силою  $F_{\text{пц}}$ , називається *границею пропорційності*

$$\sigma_{i\delta} = \frac{F_{i\delta}}{A_0} \quad (83)$$

Таким чином, *границею пропорційності називається напруження, після якого порушується закон Гука.*

Як уже зазначалось, *деформація називається пружною, якщо вона повністю зникає після розвантаження.* Припустимо, що поступово підвищуючи навантаження  $F$ , будемо при кожному її значенні здійснювати повне розвантаження зразка. Поки сила  $F$  не досягне певної величини, викликані нею деформації будуть зникати при розвантаженні. Процес розвантаження при цьому зображується тією ж лінією, що і навантаження.

Позначимо через  $F_{пр}$  найбільше значення сили, при якому зразок ще не дає при розвантаженні залишкової деформації. Цьому значенню на діаграмі відповідає точка В, а пружній стадії розтягу зразка – ділянка діаграми ОВ.

*Найбільше напруження, до якого залишкова деформація при розвантаженні не виявляється, називається границею пружності.* Це напруження викликається слою  $F_{пр}$

$$\sigma_{i\delta} = \frac{F_{i\delta}}{A_0} \quad (84)$$

Границя пружності є характеристикою, не пов'язаною з законом Гука. Точка В може бути розташована як вище, так і нижче точки А. Ці точки, а відповідно і значення напружень  $\sigma_{пц}$  і  $\sigma_{пр}$ , близькі один до одного і зазвичай різницею між ними нехтують.

Після точки А при подальшому розтягові зразка крива розтягу стає криволінійною і плавно підіймається до точки С, де спостерігається перехід до горизонтальної ділянки CD, яка називається *площадкою текучості*. На цій стадії розтягу видовження зразка росте при сталому значенні сили розтягу, що позначається через  $F_T$ . Такий процес деформації називається *текучістю матеріалу*, яка супроводжується залишковим (пластичним) видовженням, що не зникає після розвантаження.

Таким чином, *границею текучості  $\sigma_T$  називається найменше напруження, при якому деформація зразка відбувається при сталому зусиллі розтягу*

$$\sigma_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{A_0} \quad (85)$$

Після стадії текучості матеріал знову набуває здатність збільшувати опір подальшій деформації і сприймає зростаюче до певної границі зусилля.

Цьому відповідає ділянка DE кривої розтягу, що називається *ділянкою зміцнення*. Точка E відповідає найбільшому зусиллю  $F_{\max}$ , яке може сприймати зразок.

*Напруження, що відповідає максимальній силі  $F_{\max}$ , називається тимчасовим опором  $\sigma_B$  або границею міцності*

$$\sigma_B = \frac{F_{\max}}{A_0} \quad (86)$$

До цього моменту видовження розподілялись рівномірно по всій довжині  $l_0$  зразка, площі поперечних перетинів робочої частини зразка змінювались незначно і також рівномірно по довжині. Тому для розрахунків  $\sigma_{\text{пл}}$ ,  $\sigma_{\text{пр}}$ ,  $\sigma_T$  і  $\sigma_B$  в розрахункові формули вводилося початкове значення площі  $A_0$ .

*Після досягнення зусилля  $F_{\max}$  при подальшому розтягові зразка деформація відбувається, головним чином, на невеликій довжині зразка. Це приводить до утворення місцевого звуження у вигляді шийки (рис. 37) і до зниження сили  $F$ .*

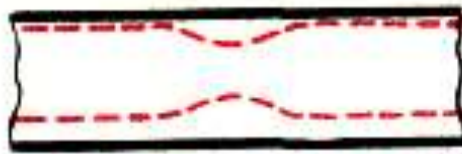


Рис. 37

Позначимо через  $F_k$  величину сили розтягу в момент розриву

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A_0} \quad (87)$$

Напруження, що визначається таким чином при розриві зразка, умовне і не може бути використано в якості характеристики механічних властивостей сталі.

*Основними характеристиками пружності і міцності матеріалів, що використовуються в практичних розрахунках, є границя пружності  $\sigma_{\text{пр}}$ , границя текучості  $\sigma_T$  і тимчасовий опір (границя міцності)  $\sigma_B$ .*

Для матеріалів, які не мають площадки текучості, границю текучості визначають умовно як напруження, при якому залишкова деформація складає величину 0.2% від довжини зразка, що вимірюється.

Враховуючи, що практично важко встановити початок відхилення від закону пропорційності і початок появи перших залишкових деформацій, вводять також поняття умовної границі пропорційності і границі пружності.

*Умовною границею пропорційності називають найменше напруження, при якому відхилення від лінійної залежності між напруженнями і деформаціями досягає певної величини, що встановлюється технічними умовами (наприклад 0.002% від довжини зразка, що вимірюється).*

*Умовною границею пружності називають найменше напруження, при якому залишкова деформація досягає заданої величини (зазвичай 0.001-0.05% від довжини зразка, що вимірюється).*

### **2.10.2. Розвантаження і повторне навантаження**

Як було сказано, якщо при зусиллі розтягу, що викликає напруження не вище границі пружності, припинити навантаження, а потім розвантажувати зразок, то процес розвантаження буде зображуватись на діаграмі лінією, яка практично співпадає з лінією навантаження. Після повного розвантаження зразка його видовження повністю зникне. Повторне навантаження на діаграмі піде по тій же лінії ОВ, отримані при першому навантаженні зразка.

Інакше буде, якщо до початку навантаження напруження в зразкові перевищує границю пружності. Здійснюючи розвантаження, наприклад, після досягнення силою значення, зображеного ординатою точки М (рис. 36), помітимо, що процес розвантаження на діаграмі описується вже не кривою, що співпадає з кривою навантаження ОАВСДМ, а прямою MN, яка паралельна прямолінійній ділянці ОА діаграми. Видовження  $\Delta l'$ , отримане зразком до початку розвантаження, при розвантаженні повністю не зникне. Частина видовження, що зникла на діаграмі буде зображена відрізком  $\Delta l'_{\text{тв}}$ , а та що залишилась – відрізком  $\Delta l'_0$ . Таким чином, повне видовження зразка за границею пружності складається з двох частин – пружної і пластичної.

$$\Delta l' = \Delta l'_{\text{тв}} + \Delta l'_0 \quad (88)$$

Так буде впритул до розриву зразка. Після розриву пружна складова повного видовження в обох частинах зразка (відрізок  $\Delta l'_{\text{тв}}$ ) зникне. Видовження, що залишиться, буде зображуватись відрізком  $\Delta l'_0$ .

Будемо знову навантажувати зразок, який був розтягнутий силою, що викликала в ньому напруження вище границі текучості, а потім розвантажений. При цьому виявиться, що лінія повторного навантаження майже співпадає на діаграмі з лінією розвантаження MN. Границя

пропорційності підвищиться і стане приблизно рівною тому напруженню, до якого попередньо був розтягнутий зразок. При подальшому збільшенні сили розтягу крива діаграми співпадає з МЕФ. Частина діаграми, розташована лівіше лінії NM, виявиться відсіченою, тобто початок координат переміститься в точку N. Залишкове видовження після розриву буде менше, чим в зразкові, який не зазнав попередньої пластичної деформації.

Таким чином, попередня витяжка за границю текучості змінює певні механічні властивості сталі – підвищує границю пропорційності і зменшує залишкове видовження після розриву, тобто робить її більш крихкою. Зміна властивостей матеріалу в результаті деформації за границею текучості називається *наклепом*.

### 2.10.3. Відносне видовження і звуження після розриву

Повне видовження, отримане зразком перед руйнуванням, зменшиться після розриву, оскільки в частинах зразка зникнуть пружні деформації. *Відносним видовженням після розриву*  $\delta$  називають відношення у відсотках прирощення розрахункової довжини зразка після розриву до його початкової довжини

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100\% \quad (89)$$

Відносне видовження після розриву характеризує пластичність матеріалу. В залежності від величини цього видовження матеріали поділяють на пластині і крихкі. Для перших можна умовно прийняти  $\delta > 5\%$ , а для других -  $\delta < 5\%$ .

*Відносне звуження зразка після розриву*  $\psi$  визначається діленням абсолютного зменшення площі поперечного перетину в шийці на початкову площу і виражається відсотках від початкової площі поперечного перетину

$$\psi = \frac{\Delta A_0}{A_0} \cdot 100\% \quad (90)$$

Чим більше відносне звуження після розриву, тим пластичніше матеріал.

Відносне видовження  $\delta$  і відносне звуження  $\psi$  є *характеристиками пластичності матеріалу*. Вони в певній мірі умовні, оскільки прирощення довжини в формулі (89) і зменшення площі поперечного перетину зразка у виразі (90) відносять до початкової довжини і початкової площі поперечного перетину. В дійсності пластична деформація розвивається на безперервно змінній довжині зразка. Позначивши через  $dl$  прирощення довжини  $l$  зразка в

даний момент випробування, знаходимо так зване дійсне відносне видовження

$$\bar{\alpha} = \int_{l_0}^{l_{\hat{\epsilon}}} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_{\hat{\epsilon}}}{l_0} \quad (91)$$

Тут  $l_0$  і  $l_k$  відповідно початкова і кінцева довжини зразка.

#### 2.10.4. Робота деформації

Крім названих вже характеристик механічних властивостей матеріалу діаграма розтягу дає можливість визначити ще і енергетичні його характеристики.

Величина площі діаграми розтягу в координатах  $F$ - $\Delta l$  характеризує роботу, затрачену на розрив зразка.

Нехай певні силі розтягу  $F$  відповідає деформація  $\lambda$  зразка (рис. 38). Дано силі  $F$  нескінченно мале прирощення  $dF$ , при цьому деформація отримає прирощення  $d\lambda$ . Очевидно, робота зовнішніх сил на цьому переміщенні

$$dA = (F + dF)d\lambda \approx Fd\lambda \quad (92)$$

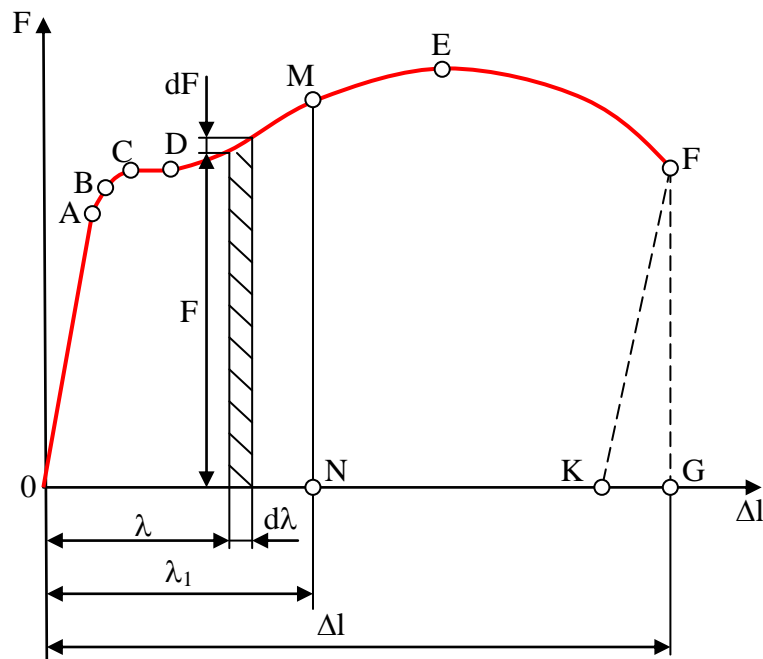


Рис. 38

Робота, затрачена на розтяг зразка до видовження  $\lambda_1$ ,

$$\dot{A} = \int_0^{\lambda_1} F d\lambda \quad (93)$$

Як видно з рис. 38 інтеграл є площею OABCDMNO діаграми розтягу. Робота затрачена на розрив зразка буде дорівнювати всій площі OABCDEFGO діаграми розтягу.

В межах пружності повна робота деформації виражається площею трикутника (рис. 39, а)

$$\dot{A}_{i\delta} = \frac{F\Delta l}{2} \quad (94)$$

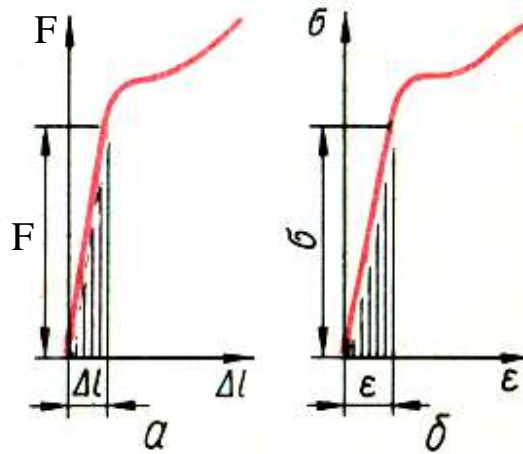


Рис. 39

Розділивши повну роботу деформації  $A$  на об'єм робочої частини зразка, отримаємо *питому роботу деформації*, тобто роботу, затрачену на деформування одиниці об'єму матеріалу

$$\dot{a}_{i\delta} = \frac{\dot{A}}{V} \quad (95)$$

Підставивши в формулу (95) значення  $A$  із формули (94) і  $V=F_0l_0$ , отримаємо

$$\dot{a}_{i\delta} = \frac{F\Delta l}{2F_0l_0} = \frac{\sigma\epsilon}{2} \quad (96)$$

Питома робота деформації в межах пружності виражається площею трикутника на діаграмі  $\sigma$ - $\epsilon$  (рис. 39, б).

Питома робота деформації характеризує здатність матеріалу опиратися ударній дії навантаження: чим більше питома робота деформації до розриву, тим краще матеріал опирається ударним навантаженням.

### 2.10.5. Діаграма розтягу в координатах $\sigma$ - $\epsilon$

Вид діаграми розтягу в координатах  $F$ - $\Delta l$  залежить не тільки від властивостей матеріалу, а і від розмірів зразка, що випробовується.

Щоб отримати діаграму, що характеризує тільки механічні властивості матеріалу, початкову діаграму розтягу перебудовують в координатах  $\sigma$ - $\epsilon$ . Ординати такої діаграми отримують діленням значень сили розтягу на початкову площу поперечного перетину зразка  $\left( \sigma = \frac{F}{A_0} \right)$ , а абсциси – діленням абсолютних видовжень розрахункової частини зразка на початкову її довжину  $\left( \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \right)$ . Для характерних точок діаграми ординати розраховують по формулам (83)-(87).

Діаграма в координатах  $\sigma$ - $\epsilon$ , що відповідає первинній діаграмі (рис. 36), зображена на рис. 40. Точкам  $O, A, B, C, D, E, F$  первинної діаграми відповідають точки  $O, a, b, c, d, e, f$  діаграми  $\sigma$ - $\epsilon$ .

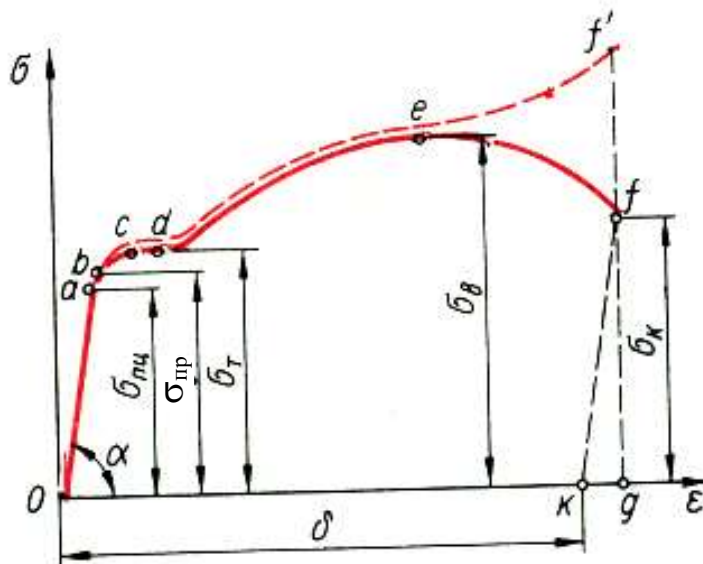


Рис. 40

Ділянка ef діаграми носить умовний характер, оскільки дійсна площа поперечного перетину зразка після утворення шийки і початкова площа, по якій визначають ординати діаграми, значно відрізняються одна від одної. Поділивши величину сили на дійсну площу поперечного перетину зразка, можна отримати значення реальних напружень і побудувати відповідну діаграму (рис. 40 – пунктирна лінія).

## 2.11. Допустимі напруження

Як уже зазначалось, деталі машин і інших конструкцій повинні задовольняти умові міцності і жорсткості. Розміри деталей необхідно підбирати такими, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувались і не отримували деформацій, що перевищують допустимі.

Залишкові деформації з'являються в пластичних матеріалах, коли напруження досягають границі текучості. Руйнування настає, коли напруження досягають величини тимчасового опору, при цьому деформації крихкого матеріалу можуть бути не значними. Таким чином, для деталей, виготовлених із пластичного матеріалу, небезпечним напруженням можна вважати границю текучості, а для деталей із крихкого матеріалу – тимчасовий опір.

Природно, що ці напруження не можуть бути прийнятими в якості допустимих. Ї належить зменшити на стільки, щоб в експлуатаційних умовах діючі напруження завжди були менше границі пружності. Таким чином, допустиме напруження допустиме напруження може бути визначено по формулі

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} \quad (97)$$

де  $\sigma^0$  – небезпечне напруження ( $\sigma_T$  або  $\sigma_B$ );

$n$  – коефіцієнт запасу міцності, який показує, в скільки раз допустиме напруження менше небезпечного.

Величина запасу міцності залежить від того, яке напруження вважати небезпечним.

Для пластичних матеріалів у випадку статичного навантаження небезпечним напруженням належить вважати границю текучості, тобто  $\sigma^0 = \sigma_T$ , а  $n = n_T$ . Тоді

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} = \frac{\sigma_{\delta}}{n_{\delta}} \quad (98)$$

На основі даних тривалої практики конструювання, розрахунку і експлуатації машин і споруд величина запасу міцності  $n_T$  для сталей при статичному навантаженні приймається рівною  $n_T=1.4\dots1.6$ . Очевидно, менші значення  $n_T$  належить брати в тих випадках, коли матеріал більш однорідний, краще вивчені його властивості, повніше враховані навантаження, точніше метод розрахунку і розрахункові схеми.

Для крихких матеріалів при статичних навантаженнях небезпечним напруженням є тимчасовий опір і тоді

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} = \frac{\sigma_{\hat{a}}}{n_{\hat{a}}} \quad (99)$$

Приймають, що запас міцності  $n_B=2.5\dots3.0$ .

Іноді допустимі напруження на розтяг позначають через  $[\sigma_+]$ , а на стиск – через  $[\sigma_-]$ . Крихкі матеріали краще опираються стиску, чим розтягу і для них  $[\sigma_-]>[\sigma_+]$ . Для сталей і більшості інших пластичних матеріалів можна прийняти  $[\sigma_+]=[\sigma_-]$  і позначати допустиме напруження в такому випадку через  $[\sigma]$  без індексу.

## Лекція 4

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### Розрахунок на міцність і жорсткість при розтягу (стиску)

Мета лекції: ознайомлення з послідовністю розрахунків при розтягу (стиску)

План лекції

18. Умова міцності і жорсткості. Види розрахунків

19. Статично невизначені конструкції

Рекомендована література

10. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
11. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
12. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

### 2.12. Умова міцності і жорсткості. Види розрахунків

Основна задача опору матеріалів – забезпечити надійні розміри деталей, що зазнають ту чи іншу силову, температурну або іншу дію. Такі розміри можна визначити з розрахунку на міцність і жорсткість.

Розглянемо умови міцності і жорсткості для випадків простого розтягу і стиску.

Відмітимо перед усім, що небезпека руйнування характеризується не стільки величинами внутрішніх зусиль і моментів в перетині, скільки величинами найбільших нормальних і дотичних напружень, які діють в небезпечних точках перетину, а також їх комбінацією. Фізично очевидно, що скільки завгодно великі напруження матеріал витримувати не в змозі. Тому величини найбільших напружень із умови надійності роботи деталі необхідно обмежувати допустимими напруженнями.

У випадку розтягу або стиску стержня знаходять небезпечні перетини, в яких напруження досягають найбільших значень по абсолютній величині, і для цих перетинів записують умову міцності

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N_{\max}}{A} \right| \leq [\sigma] \quad (100)$$

При розтягові в праву частину цієї умови підставляють допустиме напруження на розтяг  $[\sigma_+]$ , а при стискові – допустиме напруження на стиск  $[\sigma_-]$ .

Використовуючи умову міцності (100), можна розв'язувати три типи задач:

- 1) по відомим навантаженням для вибраного матеріалу знайти надійні з точки зору міцності розміри поперечного перетину стержня (проектний розрахунок);
- 2) по відомим розмірам і матеріалу деталі перевірити, чи може вона витримувати задане навантаження (перевірочний розрахунок);
- 3) по відомим розмірам деталі, матеріалу і схемі завантаження визначити допустиму величину навантаження.

В певних випадках для забезпечення нормальної роботи машин і споруд розміри їх деталей потрібно вибирати так, щоб забезпечувалась умова жорсткості. При розтягові (стискові) умова жорсткості має наступний вигляд

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(x)dx}{EA(x)} \leq [\Delta l] \quad (101)$$

де  $\Delta l$  – зміна розмірів деталі,

$[\Delta l]$  – допустима величина цієї зміни.

Нагадаємо, що розрахунок по умові жорсткості завжди треба доповнювати розрахунком на міцність. Якщо умова жорсткості виконана, а умова міцності не задовольняється, то задачу необхідно розв'язувати із умови міцності.

### 2.13. Статично невизначені конструкції

Статично невизначеними називаються такі конструкції, в елементах яких за допомогою лише одних рівнянь статички визначити зусилля неможливо. Крім рівнянь статички для розрахунку таких систем (конструкцій) необхідно використовувати також рівняння, що містять деформації елементів конструкцій.

Схеми окремих статично невизначених конструкцій зображені на рис. 41.

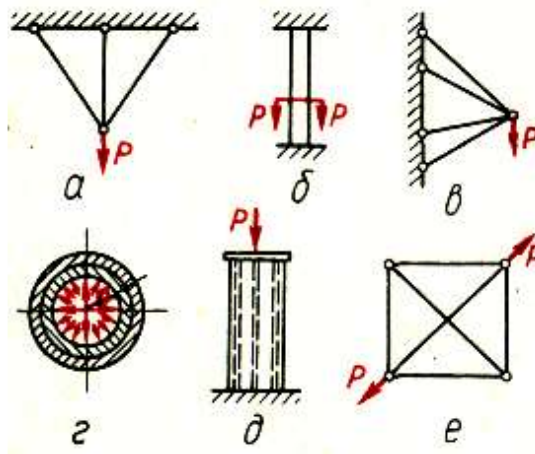


Рис. 41

Всі статично невизначені конструкції мають додаткові, або так звані «зайві», зв'язки у вигляді закріплень, стержнів або інших елементів. Зайвими такі зв'язки називають тільки тому, що вони не є необхідними для забезпечення рівноваги конструкції і її геометричної незмінності, хоча їх постановка диктується умовами експлуатації. По умовам міцності і жорсткості конструкції зайві зв'язки можуть виявитися необхідними.

В статично невизначених конструкціях число невідомих, що підлягають визначенню, більше, чим число рівнянь статички, які можуть бути для цієї мети використані. Різниця між числом невідомих і числом рівнянь статички визначає число зайвих невідомих, або ступінь статичної невизначеності конструкції. При одному зайвому невідомому конструкція називається один раз статично невизначеною, при двох – двічі статично невизначеною тощо. Конструкції зображені на рис. 41, а, б, г-е, що мають по одному додатковому зв'язку, є один раз статично невизначеними, а конструкція, представлена на рис. 41, в, що має два зайвих зв'язка – двічі статично невизначена.

Статично невизначені конструкції, елементи яких працюють на розтяг і стиск, будемо розраховувати, розв'язуючи спільно рівняння, отримані в результаті розгляду статичної, геометричної і фізичної сторін задачі. При цьому будемо притримуватися наступного порядку:

1. Статична сторона задачі. Складаємо рівняння рівноваги відсічених елементів конструкції, що містять невідомі зусилля.
2. Геометрична сторона задачі. Розглядаючи систему у деформованому стані, встановлюємо зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Отримані рівняння називаються *рівняннями сумісності деформацій*.

3. Фізична сторона задачі. На основі закону Гука виражаємо переміщення або деформації елементів конструкцій через діючі в них невідомі зусилля.
4. Синтез. Розв'язуючи спільно статичні, геометричні і фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

## Лекція 5

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### Геометричні характеристики плоских перерізів

Мета лекції: ознайомлення з основними геометричними характеристиками плоских перерізів

План лекції

- 20. Статичні моменти площі. Центр ваги площі
- 21. Моменти інерції плоских фігур
- 22. Моменти інерції відносно паралельних осей
- 23. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей
- 24. Графічна інтерпретація залежності між моментами інерції при повороті координатних осей

Рекомендована література

- 13. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
- 14. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 15. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

### 3. Геометричні характеристики плоских перерізів

#### 3.1. Статичні моменти площі. Центр ваги площі

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз бруса), яка пов'язана з координатними осями  $Oz$  і  $Oy$  (рис. 4). Виділимо елемент площі  $dA$  з координатами  $z$ ,  $y$ . По аналогії з виразом для моменту сили відносно будь-якої осі можна скласти вираз і для моменту площі, який називається *статичним моментом*. Так, добуток елемента площі  $dA$  на відстань  $y$  від осі  $Oz$

$$dS_z = ydA \quad (1)$$

називається статичним моментом елемента площі відносно осі  $Oz$ . Аналогічно

$$dS_y = z dA \quad (2)$$

називається статичним моментом елементу площі відносно осі  $Oy$ . Просумувавши такі добутки по всій площі фігури, отримаємо відповідно статичні моменти відносно осей  $z$  і  $y$

$$S_z = \int_A y dA \quad (3)$$

$$S_y = \int_A z dA \quad (4)$$

Статичні моменти вимірюються в одиницях довжини в кубі (наприклад,  $\text{см}^3$ ).

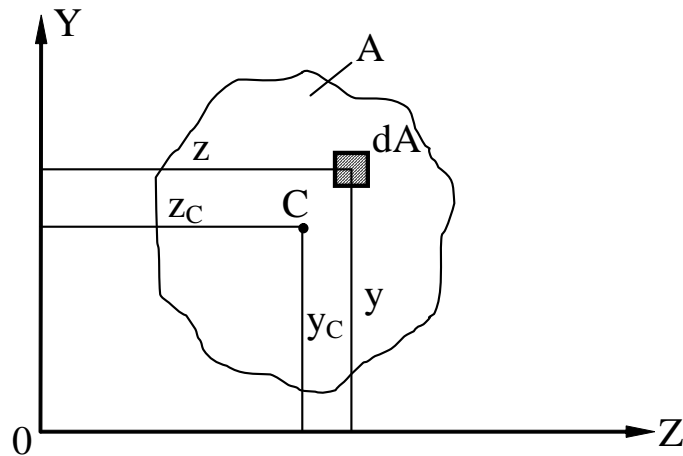


Рис. 4

Припустимо, що  $z_C$ ,  $y_C$  – координати центра ваги фігури. Продовжуючи аналогію з моментами сил, на основі теореми про момент рівнодійної можна написати наступні вирази

$$S_z = A \cdot y_C \quad (5)$$

$$S_y = A \cdot z_C \quad (6)$$

де  $A$  – площа фігури

Звідси координати центра ваги

$$z_C = \frac{S_y}{A} \quad (7)$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} \quad (8)$$

Для визначення статичних моментів складної фігури її розбивають на прості частини, для кожної з яких відома площа і положення центру ваги. Статичний момент площі всієї фігури відносно даної осі визначається як сума статичних моментів кожної частини

$$S_z = A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + \dots + A_n \cdot y_{Cn} = \sum A_i \cdot y_{Ci}, \quad (9)$$

$$S_y = A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2} + \dots + A_n \cdot z_{Cn} = \sum A_i \cdot z_{Ci}, \quad (10)$$

По формулам (7), (8), (9), (10) знаходимо координати центра ваги складної фігури

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} \quad (11)$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \quad (12)$$

### 3.2. Моменти інерції плоских фігур

*Осьовим моментом інерції* площі плоскої фігури називають інтеграл добутків елементарних площ на квадрати їх відстаней від осі, що розглядається. Моменти інерції довільної фігури (рис. 5) відносно осей  $z$  і  $y$  відповідно

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad (13)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad (14)$$

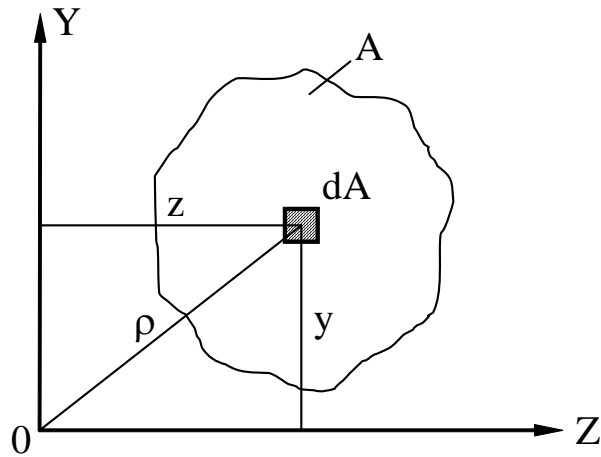


Рис. 5

*Полярним моментом інерції* площі фігури відносно даної точки (полюса 0) називають інтеграл добутків елементарних площ на квадрати їх відстаней від полюса

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA, \quad (15)$$

Якщо через полюс проведена система взаємно перпендикулярних осей  $z$  і  $y$ , то  $\rho^2 = z^2 + y^2$ . З виразу (15) маємо

$$I_0 = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y$$

Відмітимо, що величини осьових і полярних моментів інерції завжди додатні.

*Відцентровим моментом інерції* називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на їх відстань від координатних осей  $z$  і  $y$

$$I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (16)$$

В залежності від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатнім або від'ємним, а також рівним нулю. Поступово повертаючи осі можна знайти таке їх положення, при якому відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Такі осі називають *головними осями інерції*. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називають *головними центральними осями*.

### 3.3. Моменти інерції відносно паралельних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції фігури відносно центральних осей  $z, y$

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_{zy} = \int_A zy dA \quad (17)$$

Необхідно визначити моменти інерції відносно осей, паралельних центральним (рис. 6)

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA, \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA \quad (18)$$

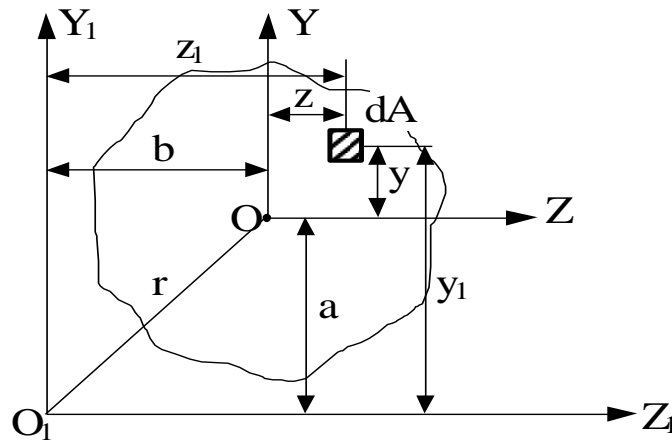


Рис. 6

Координати будь-якої точки в системі координат  $z_1 O_1 y_1$  можна виразити через координати в системі координат  $z O y$

$$z_1 = z + b; \quad (19)$$

$$y_1 = y + a$$

Підставляємо ці значення в формули (18) і інтегруємо почленно

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA \quad (20)$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z + b)^2 dA = \int_A z^2 dA + b^2 \int_A dA + 2b \int_A z dA \quad (21)$$

$$I_{zy} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z + b)(y + a) dA = \int_A zy dA + ab \int_A dA + a \int_A z dA + b \int_A y dA \quad (22)$$

Оскільки інтеграли  $\int_A y dA = S_z$  і  $\int_A z dA = S_y$  дорівнюють нулю як статичні моменти відносно центральних осей, то формули (20), (21), (22) з урахуванням формул (17) приймають вид

$$I_{z1} = I_z + a^2 A, \quad (23)$$

$$I_{y1} = I_y + b^2 A, \quad (24)$$

$$I_{z1y1} = I_{zy} + abA, \quad (25)$$

Таким чином:

- 1) момент інерції фігури відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, паралельної даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями;
- 2) відцентровий момент інерції відносно будь-якої системи прямокутних осей дорівнює відцентровому моменту відносно системи центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги в нових осях.

### 3.4. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції довільної фігури (рис. 7) відносно координатних осей  $z, y$

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_{zy} = \int_A zy dA \quad (26)$$

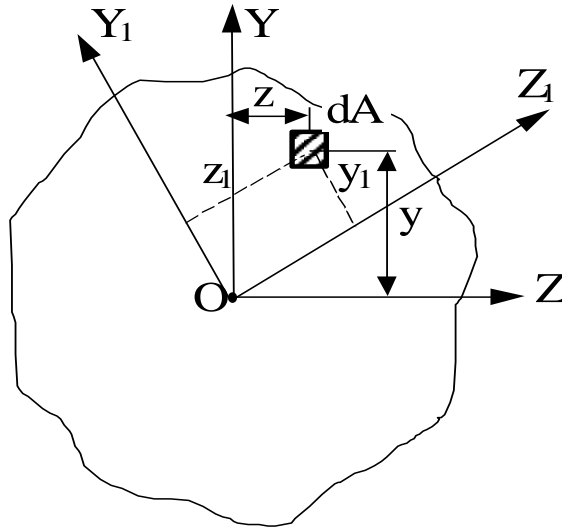


Рис. 7

Повернемо осі  $z, y$  на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки, вважаючи кут повороту осей в цьому напрямку додатнім. Знайдемо тепер моменти інерції перерізу відносно повернутих  $z_1, y_1$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA, \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad I_{zy} = \int_A z_1 y_1 dA \quad (27)$$

Координати довільної елементарної площадки в нових осях  $z_1, y_1$  виражаються через координати  $z, y$  початкової системи осей наступним чином

$$z_1 = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha; \quad (28)$$

$$y_1 = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha.$$

Підставимо ці значення у вирази (27) і проінтегруємо почленно

$$I_{z_1} = \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA - \sin 2\alpha \int_A zy dA \quad (29)$$

$$I_{y_1} = \int_A (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dA = \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \sin 2\alpha \int_A zy dA \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
I_{z_1 y_1} &= \int_A (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)(y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha) dA = \\
&= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A zy dA + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left( \int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA \right)
\end{aligned} \quad (31)$$

Враховуючи формули (26) знаходимо

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha \quad (32)$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha \quad (33)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha \quad (34)$$

Відмітимо, що формули (32-34), отримані при повороті будь-якої системи прямокутних осей, природно, справедливі і для центральних осей.

Складаючи почленно формули (32) і (33), знаходимо

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = I_p \quad (35)$$

Таким чином, при повороті прямокутних осей сума моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

При повороті системи осей на кут  $\alpha=90^\circ$

$$I_{z_1} = I_y \quad (36)$$

$$I_{y_1} = I_z \quad (37)$$

$$I_{z_1 y_1} = -I_{zy} \quad (38)$$

### 3.5. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Найбільше практичне значення мають головні центральні осі, відцентровий момент інерції відносно яких дорівнює нулю

$$I_{uv} = 0 \quad (39)$$

Щоб визначити положення головних центральних осей несиметричної фігури, повернемо довільну початкову систему центральних осей  $z, y$  (рис. 8) на певний кут  $\alpha_0$ , при якому відцентровий момент інерції стає рівним нулю

$$I_{z1y1} = I_{uv} = 0 \quad (39)$$

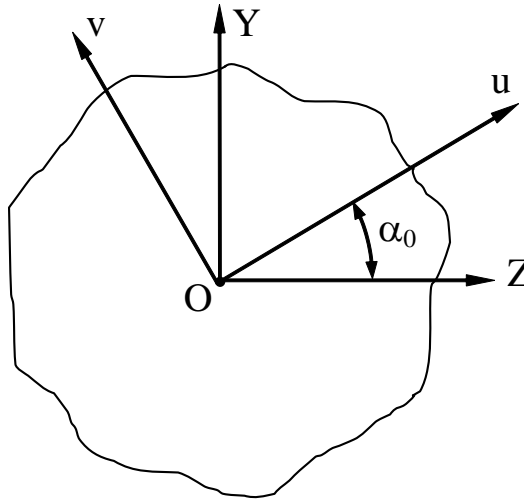


Рис. 8

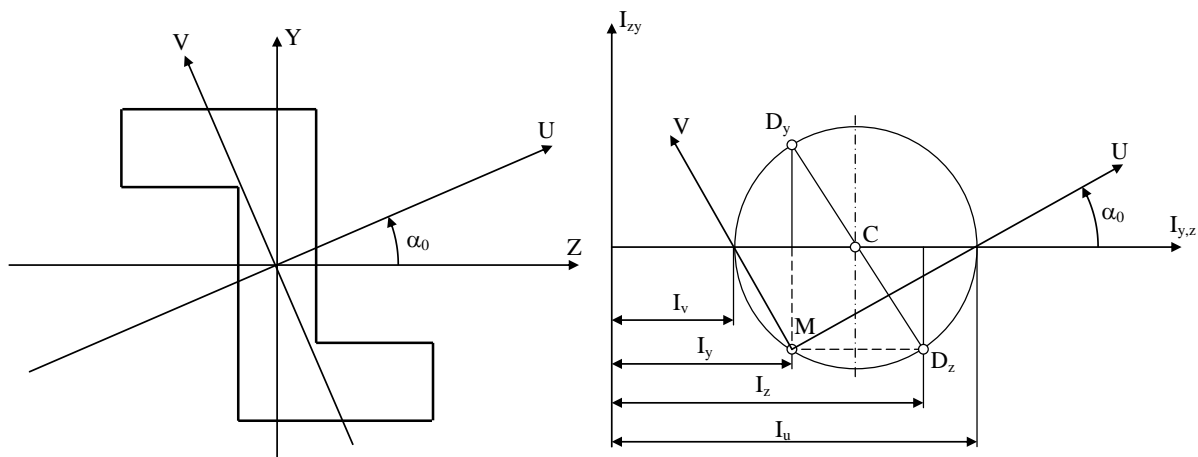
Тоді із формули (34)

$$I_{z1y1} = I_{zy} \cos 2\alpha_0 - \frac{(I_y - I_z)}{2} \sin 2\alpha_0 = 0 \quad (40)$$

звідки

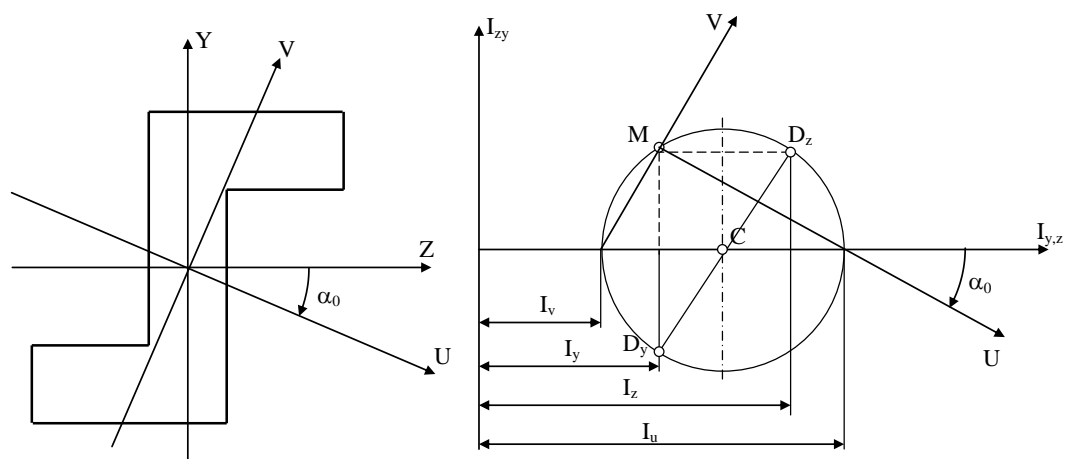
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (41)$$

Отримані із формули (41) два значення кута  $\alpha_0$  відрізняються один від одного на  $90^\circ$  і дають положення головних осей. Як легко бачити, менший із цих кутів по абсолютній величині не перевищує  $\frac{\pi}{4}$ . В подальшому будемо користуватися тільки меншим кутом. Проведену під цим кутом (додатнім або від'ємним) головну ось будемо позначати  $u$ . Нагадуємо, що від'ємні кути  $\alpha_0$  відкладаються від осі  $z$  по ходу годинникової стрілки. На рис. 9-12 приведені певні приклади позначення головних осей у відповідності з вказаним правилом. Початкові осі позначені  $z$  і  $y$ .



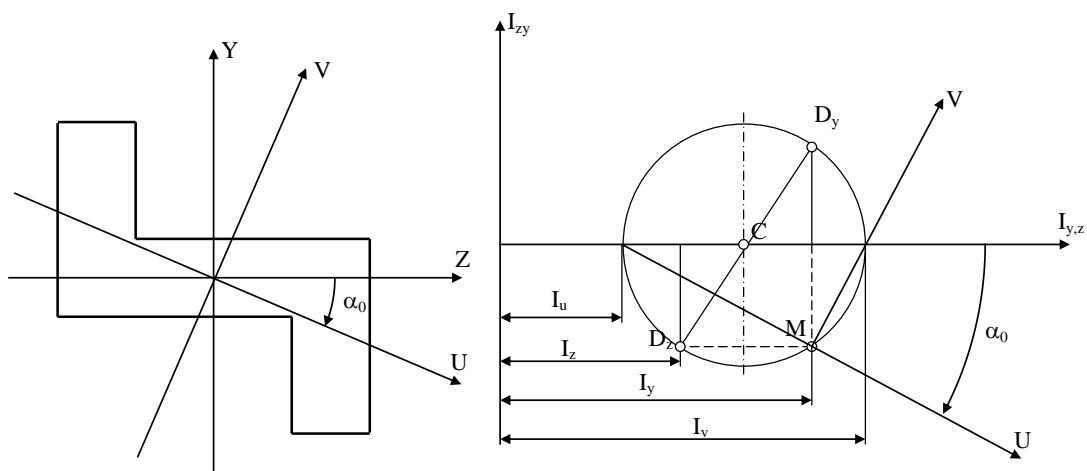
$$I_z > I_y, I_{zy} < 0, \alpha_0 > 0$$

Рис. 9



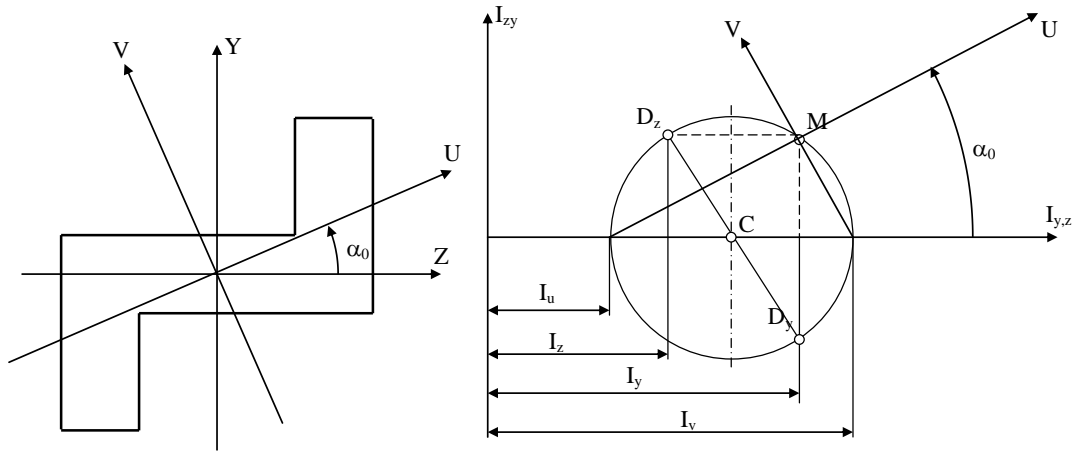
$$I_z > I_y, I_{zy} > 0, \alpha_0 < 0$$

Рис. 10



$$I_z < I_y, I_{zy} < 0, \alpha_0 < 0$$

Рис. 11



$$I_z < I_y, I_{zy} > 0, \alpha_0 > 0$$

Рис. 12

Значення головних моментів інерції можна отримати із загальних формул (32), (33) переходу до повернутих осей, прийнявши  $\alpha = \alpha_0$

$$I_u = I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{zy} \sin 2\alpha_0 \quad (42)$$

$$I_v = I_z \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{zy} \sin 2\alpha_0 \quad (43)$$

Перетворимо формули (42), (43) для головних центральних моментів інерції, склавши вирази для їх суми і різниці. Очевидно, що

$$I_u + I_v = I_z + I_y \quad (44)$$

$$I_u - I_v = (I_z - I_y) \cos 2\alpha_0 - 2I_{zy} \sin 2\alpha_0 = (I_z - I_y) \frac{4}{\cos 2\alpha_0} \quad (45)$$

причому у виразі (45) зроблена заміна  $I_{zy}$  із формули (41)

$$2I_{zy} = (I_y - I_z) \tan 2\alpha_0 \quad (46)$$

тепер із формул (44) і (45) знаходимо більш зручні вирази

$$I_u = \frac{1}{2} \left[ (I_z + I_y) + (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right] \quad (47)$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[ (I_z + I_y) - (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right] \quad (48)$$

Очевидно, що при  $I_z > I_y$  момент  $I_u > I_v$ .

Використовуючи формулу (41), можна виключити із виразів (47), (48) величину

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4I_{zy}^2}{(I_z - I_y)^2}} \quad (49)$$

В результаті маємо

$$I_u = \frac{1}{2} \left[ (I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right] \quad (50)$$

$$I_v = \frac{1}{2} \left[ (I_z + I_y) \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right] \quad (51)$$

### 3.6. Поняття про радіус і еліпс інерції

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна представити в вигляді добутку площі фігури на квадрат певної величини, яка називається радіусом інерції:

$$I_z = \int_A y^2 dA = A \cdot i_z^2, \quad (52)$$

де  $i_z$  – радіус інерції відносно осі  $z$ .

Із виразу (52) витікає, що

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (53)$$

Аналогічно радіус інерції площі перерізу відносно осі  $y$

$$i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} \quad (54)$$

Головними центральними осями інерції відповідають головні радіуси інерції

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \quad (55)$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} \quad (56)$$

Побудуємо на головних центральних осях інерції фігури еліпс з напівосями рівними головним радіусам інерції, причому вздовж осі  $u$  відкладемо відрізки  $i_v$ , а вздовж осі  $v$  – відрізки  $i_u$  (рис. 13). Такий еліпс (*еліпс інерції*) володіє наступною властивістю. Радіус інерції відносно будь-якої центральної осі  $z$  визначається як перпендикуляр  $OA$ , проведений із центра еліпса на дотичну, паралельну даній осі. Для отримання точки торкання достатньо провести паралельно до даної осі  $z$  будь-яку хорду. Точка перетину еліпса з прямою, що з'єднує центр  $O$  і середину хорди, є точка торкання. Вимірявши потім відрізок  $OA=i_z$ , знаходимо момент інерції

$$I_z = A \cdot i_z^2. \quad (57)$$

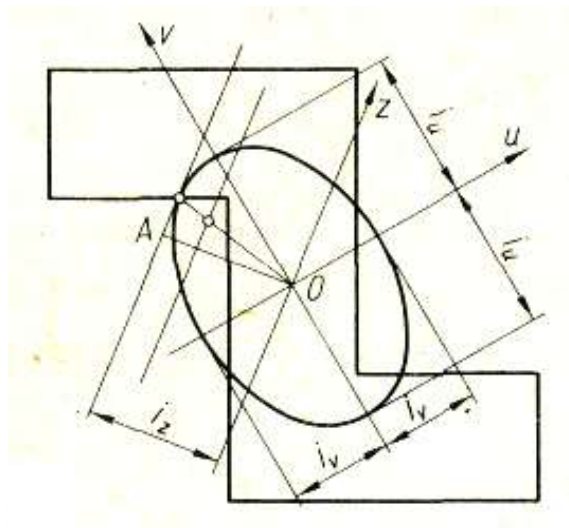


Рис. 13

## Лекція 6

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### Основи теорії напруженого і деформованого стану

Мета лекції: ознайомлення з основами теорії напруженого і деформованого станів

План лекції

25. Напруження в точці
26. Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження
27. Лінійний напружений стан
28. Плоский напружений стан
29. Об'ємний напружений стан. Напруження на довільній площадці
30. Деформації при об'ємному напруженому стані
31. Узагальнений закон Гука
32. Об'ємна деформація
33. Потенційна енергія деформації
34. Питома потенційна енергія деформації
35. Питома потенційна енергія формозмінення

Рекомендована література

16. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
17. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
18. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

### 3.7. Напруження в точці

Напруження є результатом взаємодії часток тіла при його навантаженні. У відповідності до гіпотези про суцільність матеріалу належить вважати, що кожна частка тіла в скільки завгодно малі області має нескінченне множину інших часток, які оточують її по всім напрямкам. Розташована в даній точці частка по різному взаємодіє з кожною із цих сусідніх часток. Тому в одній і тій же точці по різним напрямкам напруження різні і тільки в певних випадках вони однакові по всім напрямкам.

Досліджуючи напружений стан тіла в даній точці А, навколо неї зазвичай виділяють елемент у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рис. 42, а), який у збільшеному масштабі показаний на рис. 42, б, де початок координат суміщений з точкою А, а координатні осі направлені вздовж відповідних ребер, так що грані паралелепіпеда перпендикулярні до напрямків декартових осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . До цих граней прикладені внутрішні сили, що замінюють дію віддаленої частини тіла. Позначимо повні напруження на гранях елементу через  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ . Тут індекси позначають нормаль до площадки, на якій діють напруження. Оскільки елемент дуже малий можна вважати, що напруження на кожній його грані розподілені рівномірно. Повні напруження на гранях елементу представляють нормальними і дотичними складовими – проекціями повних напружень на координатні осі (рис. 42, в).

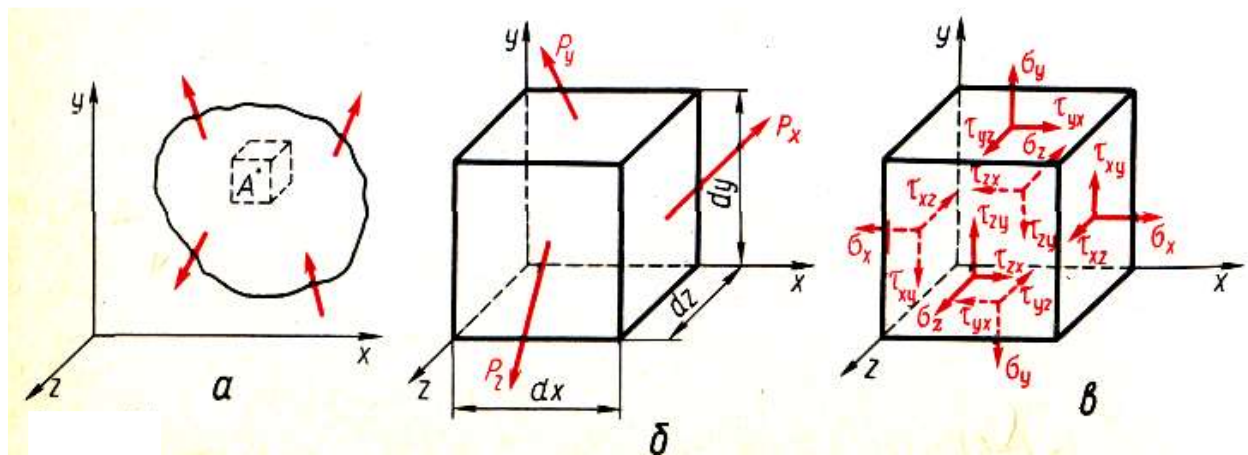


Рис. 42

Нормальні напруження позначають буквою  $\sigma$  з індексом, що відповідає напрямку нормалі до площадки, на якій вони діють. Дотичні напруження позначають буквою  $\tau$  з двома індексами: перший відповідає напрямку нормалі до площадки, а другий – напрямку самого напруження.

Таким чином, на гранях елементарного паралелепіпеда, виділеного навколо точки навантаженого тіла, діють дев'ять компонентів напруження. Запишемо їх у вигляді наступної матриці

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (102)$$

Ця сукупність напружень називається *тензором напружень*.

### 3.8. Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження

Не всі дев'ять компонентів напружень, що діють на гранях елементарного паралелепіпеда, незалежні. В цьому легко переконатися якщо скласти умоу рівноваги елемента у відношенні його обертань (рис. 42, в). Для цього прирівняємо до нуля суму моментів всіх сил, прикладених до граней елемента, відносно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$

$$\sum M_x=0; \sum M_y=0; \sum M_z=0 \quad (103)$$

Складемо рівняння моментів відносно осі  $z$ . Сили, паралельні цій осі і ті що перетинають її, в рівняння не увійдуть. Моменти сил  $\sigma_x dydz$  на двох гранях, перпендикулярних до осі  $x$ , урівноважуються, як і моменти сил  $\sigma_y dx dz$  на верхній і нижній гранях елемента. Таким чином, отримуємо  $\tau_{xy} dydz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0$ . Звідси випливає

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Аналогічно із двох інших рівнянь знаходимо

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Отже, маємо рівності, які називаються *законом парності дотичних напружень*: дотичні напруження на будь-яких двох, але взаємно перпендикулярних площадках, направлені перпендикулярно до лінії перетину площадок, рівні по величині. При цьому вони намагаються повернути елемент в різні сторони. Таким чином, завдяки властивості парності дотичних напружень число незалежних компонентів напружень в кожній точці тіла зменшується з дев'яти до шести.

При зміні орієнтації граней виділеного елемента змінюються також діючі на його гранях напруження. При цьому можна провести такі площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю. Площини, на яких дотичних напружень немає, називаються *головними площадками*, а нормальні напруження на цих площадках – *головними напруженнями*. Як би не було завантажене тіло, в кожній його точці є, принаймні, три головні площадки, причому вони взаємно перпендикулярні. Таким чином, в кожній точці можуть діяти і три головних напруження і вони теж взаємно перпендикулярні. Напрямки, паралельні головним напруженням, називаються *головними напрямками напружень* або *головними осями в даній точці*.

Головні напруження умовимося позначати  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ , при цьому індекси належить розставляти так, щоб виконувалась рівність

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

(104)

Розуміти цю нерівність належить в алгебраїчному змісті.

Таким чином, в точках навантаженого тіла можна виділити елементарні паралелепіпеди, на гранях яких діють тільки нормальні – головні напруження.

Напружений стан, в якому тільки одно головне напруження відмінне від нуля, а два інших дорівнюють нулю, називається *одноосним* або *лінійним* (рис. 43, а). Якщо два головних напруження відмінні від нуля, а одно рівне нулю, то такий напружений стан називається *двохосним* або *плоским* (рис. 43, б). Коли всі три головних напруження відмінні від нуля, маємо *трьохосний* або *об'ємний напружений стан* (рис. 43, в).

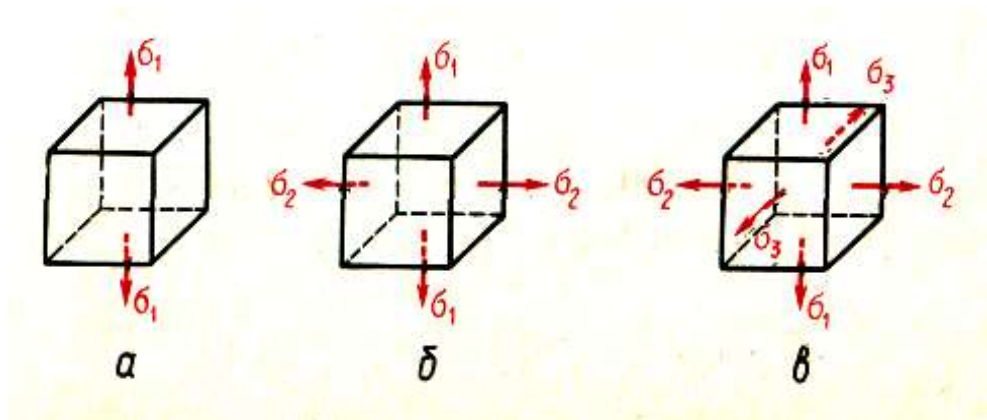


Рис. 43

### 3.9. Лінійний напружений стан

Елементи, що перебувають в лінійному напруженому стані, можна виділити біля певних точок стержня, що працює на згин або складний опір, але головним чином на стиск.

Розглянемо призматичний стержень, що зазнає простий розтяг (рис. 44, а). В поперечних перетинах нормальні напруження  $\sigma_0 = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0}$ , а дотичні напруження тут дорівнюють нулю. Відповідно, ці перетини є головними площадками.

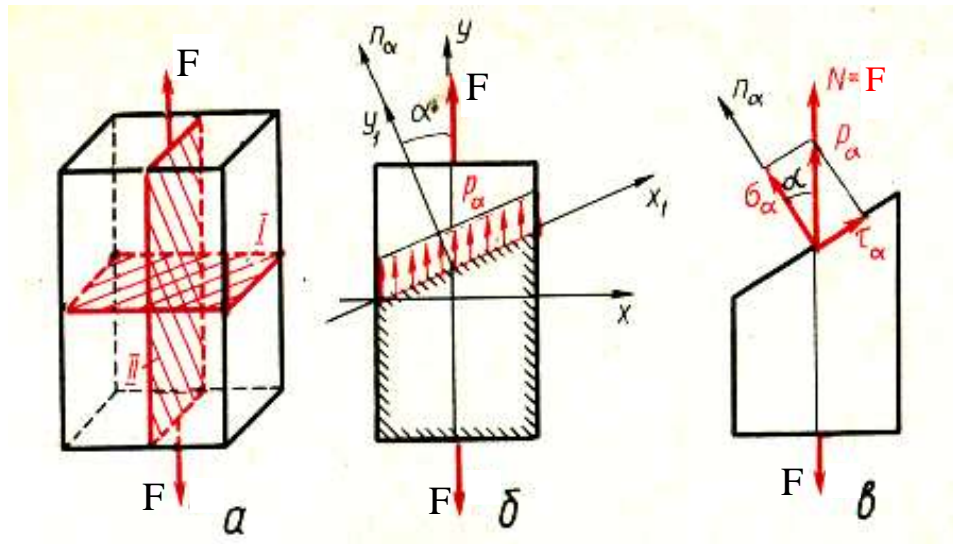


Рис. 44

Перейдемо тепер до визначення напружень в неголовних, похилих площадках. В подальшому елемент, що перебуває в лінійному (а також в плоскому) напруженому стані, будемо зображувати у вигляді плоскої фігури (рис. 44, б).

Припустимо зовнішня нормаль  $n_\alpha$  до проведеної площадки складає з віссю стержня (а відповідно, і з лінією дії прикладеної сили) кут  $\alpha$ . Умовимося вважати кут  $\alpha$  позитивним, якщо він відраховується проти годинникової стрілки. Очевидно, такий же кут  $\alpha$  складає площадка з поперечним перетином стержня. Проведемо також похилі осі  $x_1, y_1$ , направивши ось  $y_1$  по нормалі до площадки, а ось  $x_1$  – вздовж площадки.

Проведену таким чином похилу площадку будемо позначати  $(\alpha)$  - площадкою, а діючі на ній повні, нормальні і дотичні напруження -  $p_\alpha, \sigma_\alpha, \tau_\alpha$ . Для визначення цих напружень застосуємо метод перетинів. Вважаючи, що похила площадка розсікла стержень на дві частини, відкинемо одну із них, наприклад верхню, і розглянемо рівновагу нижньої частини.

Осьова сила в перетині  $N=F$  є рівнодієюною повних напружень  $p_\alpha$ . Вважаємо, що вони направлені паралельно осьовій силі і рівномірно розподілені в точках проведеного перетину, площа якого

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha} \quad (105)$$

Відповідно,

$$p_\alpha A_\alpha = N \quad (106)$$

Звідси

$$\delta_{\alpha} = \frac{N}{A_{\alpha}} = \frac{N}{A_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha \quad (107)$$

Проектуючи  $p_{\alpha}$  на нормаль  $n_{\alpha}$  і на площину перетину, отримаємо вираз для нормальних і дотичних напружень на похилій площадці (рис. 44, в)

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha \quad (108)$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha \quad (109)$$

або з врахуванням (107)

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (110)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \quad (111)$$

У випадку лінійного і плоского напруженого стану використовують зазвичай таке правило знаків для дотичних напружень: *дотичне напруження на площадці вважають позитивним, якщо воно намагається повернути частину елемента, що розглядається, відносно будь-якої точки, взятої всередині неї, за годинниковою стрілкою.*

### 3.10. Плоский напружений стан

Всі визначення і правила, які були введені в попередньому параграфі, залишаються в силі і для плоского напруженого стану. Оскільки, однак, тут є два відмінних від нуля головних напруження, необхідно уточнити умову для підрахунку кутів, що характеризують нахил площадок. Будемо вважати, що цей кут завжди відраховується від напрямку алгебраїчно більшого з двох відмінних нуля головних напружень до нормалі похилої площадки, причому завжди береться гострий кут, але з урахуванням його знаку.

Визначимо напруження на похилих площадках. Розглянемо елемент (рис. 45), грані якого є головними площадками. По ним діють позитивні напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , третє головне напруження  $\sigma_3=0$ .

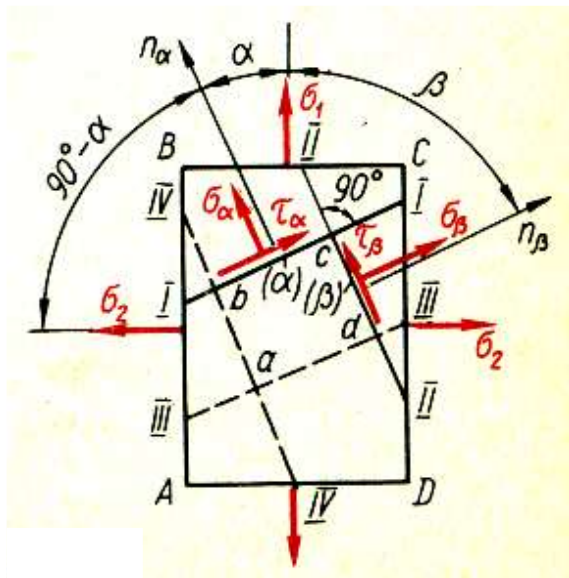


Рис. 45

Проведемо перетин I-I, який визначить площадку  $(\alpha)$ , що характеризується позитивним кутом  $\alpha$ . Напруження  $\sigma_\alpha$  і  $\tau_\alpha$  по цій площадці будуть викликатися як дією  $\sigma_1$ , так і дією  $\sigma_2$ . Застосовуючи принцип суперпозиції, тобто розглядаючи даний плоский напружений стан як накладання двох ортогональних одноосних напружених станів, можемо записати

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha \quad (112)$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha \quad (113)$$

де  $\sigma'_\alpha$  і  $\tau'_\alpha$  - напруження, викликані дією  $\sigma_1$ ,

$\sigma''_\alpha$  і  $\tau''_\alpha$  - напруження, викликані дією  $\sigma_2$ .

Щоб визначити  $\sigma'_\alpha$  і  $\tau'_\alpha$  скористаємося безпосередньо формулами (110) і (111)

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha \quad (114)$$

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \quad (115)$$

Для визначення  $\sigma''_\alpha$  і  $\tau''_\alpha$  належить врахувати, що  $n_\alpha$  утворює з напрямком  $\sigma_2$  кут  $90^\circ - \alpha$ . Тоді, з урахуванням, що  $\sin 2[-(90^\circ - \alpha)] = -\sin 2\alpha$ ,  $\cos^2[-(90^\circ - \alpha)] = \sin^2 \alpha$ , отримаємо

$$\sigma''_{\alpha} = \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (116)$$

$$\tau''_{\alpha} = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (117)$$

Склавши, знайдемо, що

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (118)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (119)$$

Скористуємося формулами (118) і (119) для знаходження напружень в площадці, перпендикулярній до площадки ( $\alpha$ ). Умовимося таку площадку позначати ( $\beta$ ). Нормаль  $n_{\beta}$  до неї (рис. 45, перетин II-II) утворює з напрямком  $\sigma_1$  кут

$$\beta = -(90^{\circ} - \alpha)$$

Формули (118) і (119) вірні для будь-яких  $\alpha$ . Підставивши в них замість  $\alpha$  вказане значення  $\beta$ , будемо мати

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha \quad (120)$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (121)$$

Сукупність формул (118-121) дає можливість знаходити напруження по будь-яким взаємно перпендикулярним похилим площадкам, якщо відомі головні напруження. Проведемо аналіз цих формул.

Складаючи ліві і праві частини рівностей (118) і (120), виявляємо, що

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (122)$$

тобто сума нормальних напружень по двом взаємно перпендикулярним площадкам не залежить від нахилу цих площадок і дорівнює сумі головних напружень. Інакше ця властивість може бути сформульована так: *сума нормальних напружень по двом взаємно перпендикулярним площадкам інваріантна по відношенню до нахилу цих площадок.*

Із формули (119) і (121) бачимо, що як і в одноосному напруженому стані, дотичні напруження досягають найбільшої величини при  $\alpha = \pm 45^{\circ}$ , тобто по площадкам, нахиленим до головних площадок під кутом  $45^{\circ}$ , причому

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (123)$$

### 3.11. Об'ємний напружений стан. Напруження на довільній площадці

В загальному випадку напруженого стану при довільній орієнтації елементарного паралелепіпеда, виділеного біля точки навантаженого тіла, на його гранях діють шість незалежних компонентів тензора напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ . Вважаючи ці напруження вихідними, визначимо напруження на довільній площадці ABC, проведеній біля точки (рис. 46).

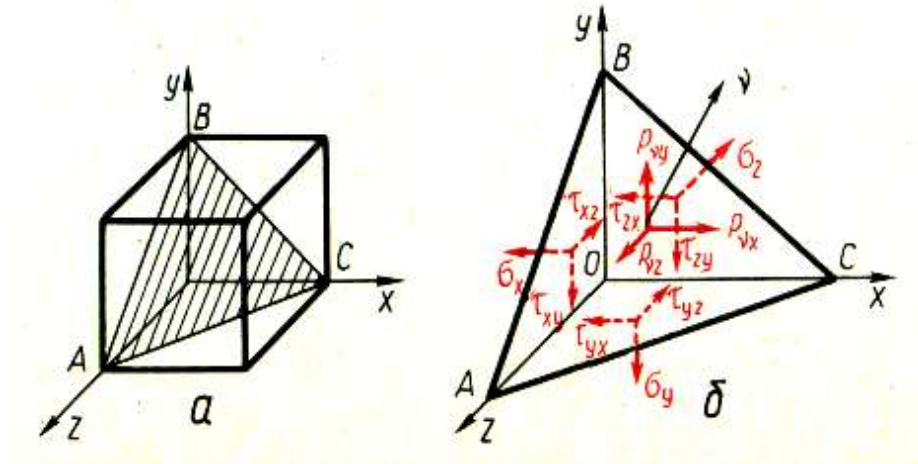


Рис. 46

Повне напруження на площадці з нормаллю  $v$

$$\delta_v = \sqrt{\delta_{v0}^2 + \delta_{vy}^2 + \delta_{vz}^2} \quad (124)$$

де  $p_{vx}, p_{vy}, p_{vz}$  – проекції повного напруження  $p_v$  на координатні осі  $x, y, z$ .

Нормальне напруження на довільній площадці

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \quad (125)$$

де  $l = \cos(x, v), m = \cos(y, v), n = \cos(z, v)$

По відомому повному і нормальному напруженням легко знайти дотичне напруження на площадці

$$\tau_v = \sqrt{\delta_v^2 - \sigma_v^2} \quad (126)$$

Таким чином, по відомим компонентам напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках можна визначити напруження на будь-якій площадці, проведеній через дану точку.

Головні напруження в точці даного навантаженого певним чином тіла мають стаціонарні значення, що не залежать від вибору початкової системи координатних осей  $x, y, z$ , тобто орієнтації в просторі виділеного початкового паралелепіпеда

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const} \quad (127)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const} \quad (128)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \text{const} \quad (129)$$

Ці величини називаються першим, другим і третім інваріантами тензора напружень.

При будь-якому об'ємному напруженому стані найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (130)$$

діє на площадках, паралельних головному напруженню  $\sigma_2$  і нахилених під кутом  $45^\circ$  до головних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ .

Важливим, особливо при вивченні пластичної деформації, є дотичне напруження, що діє по площадці, яка рівно нахилена до всіх головних напрямків. Така площадка називається *октаедричною*, оскільки вона паралельна грані октаедра, який може бути утворений із куба. Нормаль до цієї площадки утворює рівні кути з головними напрямками

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Тоді

$$\sigma_{\text{ієò}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ієò}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \quad (132)$$

Це напруження називається *октаедричним*. Напруження  $\sigma_{\text{окт}}$  є як би середнє напруження для даного трьохосного напруженого стану.

В теорії пластичності виявилось зручним вводити в розрахунки так звану інтенсивність напружень  $\sigma_u$ , пов'язану з  $\tau_{\text{окт}}$  залежністю

$$\sigma_u = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{îêð}} \quad (133)$$

або виражену через головні напруження формулою

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \quad (134)$$

Всі представлені залежності і способи розв'язку задач вірні для напружених станів, що відповідають як пружним, так і пластичним деформаціям.

### 3.12. Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації і розглядаючи питання міцності при об'ємному і плоскому напружених станах, будемо у відповідності з основними гіпотезами і допущеннями припускати, що матеріал підкорюється закону Гука, а деформації малі.

При простому розтягу-стиску відносна повздовжня деформація

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\overset{\circ}{A}} \quad (135)$$

а відносна поперечна деформація

$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{\overset{\circ}{A}} \quad (136)$$

Ці дві рівності виражали закон Гука (залежність між деформаціями і напруженнями) при простому розтягові або стискові, тобто при лінійному напруженому стані. Встановимо залежності між деформаціями і напруженнями в загальному випадку об'ємного напруженого стану.

#### 3.12.1. Узагальнений закон Гука

Розглянемо деформацію елемента тіла, вибравши цей елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда розмірами  $a \times b \times c$  (рис. 47). По граням паралелепіпеда діють головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (припускаємо, що всі

вони позитивні). Внаслідок деформації ребра елемента змінюють свою довжину і стають рівними  $a+\Delta a$ ,  $b+\Delta b$ ,  $c+\Delta c$ .

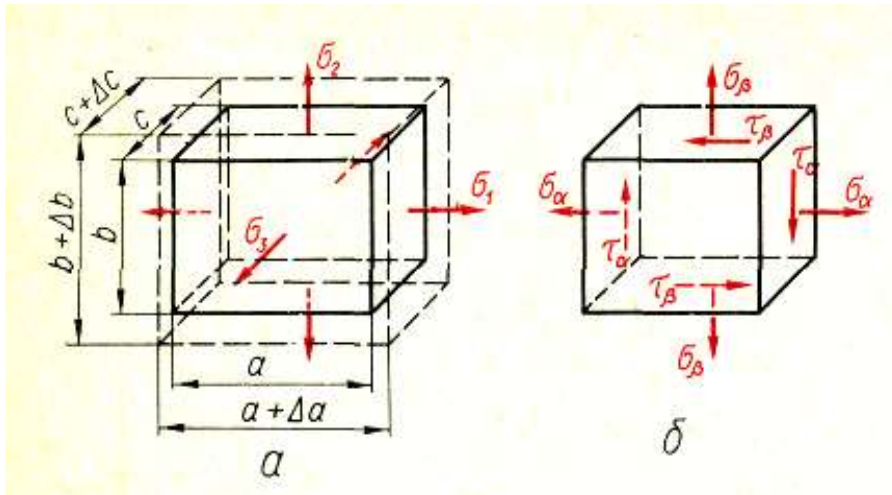


Рис. 47

Величини

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c} \quad (137)$$

називаються головними видовженнями і є відносними видовженнями в головних напрямках.

Застосовуючи принцип суперпозицій, можна записати

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon'''_1 \quad (138)$$

де  $\varepsilon'_1$  - відносне видовження в напрямку  $\sigma_1$ , викликане дією тільки напружень  $\sigma_1$  (при  $\sigma_2=\sigma_3=0$ ),

$\varepsilon''_1$  - відносне видовження в тому ж напрямку, викликане дією тільки  $\sigma_2$ ,

$\varepsilon'''_1$  - видовження, викликане дією  $\sigma_3$ .

Оскільки напрямок  $\sigma_1$  для самого напруження  $\sigma_1$  є повздовжнім, а для напружень  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  – поперечним, то, застосовуючи формули (135) і (136), знаходимо, що

$$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{A}, \quad \varepsilon''_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{A}, \quad \varepsilon'''_1 = -\mu \frac{\sigma_3}{A} \quad (139)$$

Склавши ці величини, будемо мати

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\overset{\circ}{A}} - \mu \frac{\sigma_2}{\overset{\circ}{A}} - \mu \frac{\sigma_3}{\overset{\circ}{A}} = \frac{1}{\overset{\circ}{A}} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (140)$$

Аналогічно отримаємо вирази і для двох інших головних видовжень. В результаті

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\overset{\circ}{A}} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\overset{\circ}{A}} (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{\overset{\circ}{A}} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{aligned} \quad (141)$$

Формули (141) виражають *узагальнений закон Гука для ізотропного тіла*, тобто залежність між лінійними деформаціями і головними напруженнями в загальному випадку трьохосного напруженого стану.

### 3.12.2. Об'ємна деформація

Встановимо зв'язок між відносною зміною об'єму  $\varepsilon_v$  і головними напруженнями.

До деформації елемент займав об'єм  $V_0 = abc$ . В деформованому стані його об'єм

$$\begin{aligned} V &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = \\ &= V_0 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = V_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (142)$$

Враховуючи незначну величину відносних деформацій, останніми двома членами можна знехтувати. Тоді відносна зміна об'єму

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (143)$$

Виразивши головні видовження через головні напруження за допомогою формул (141), отримаємо

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{\overset{\circ}{A}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (144)$$

### 3.13. Потенційна енергія деформації

*Потенційною енергією деформації* називається енергія, яка накопичується в тілі при його пружній деформації.

#### 3.13.1. Питома потенційна енергія деформації

Величину потенціальної енергії деформації, що приходить на одиницю об'єму тіла, називають *питомою потенційною енергією деформації*. В різних точках тіла величина питомої потенціальної енергії деформації може бути різною.

У випадку простого розтягу або стиску (рис. 48) використовуючи формулу (94)

$$U = \frac{F\Delta l}{2} \quad (145)$$

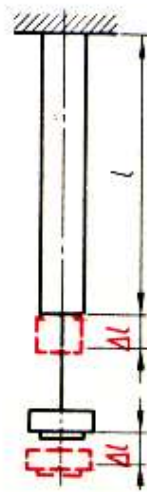


Рис. 48

Питома потенційна енергія

$$u = \frac{F\Delta l}{2Al} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} \quad (146)$$

Розрахуємо тепер питому потенційну енергію в загальному випадку об'ємного напруженого стану. Для цього виріжемо елемент у вигляді кубика з довжинами ребер, рівними одиниці (рис. 49), грані якого є головними площадками. На цих площадках діють головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ .

Оскільки площі граней рівні одиниці, то діючі в них зусилля чисельно дорівнюють  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . Вони виконують роботу на тих переміщеннях, які отримують грані внаслідок деформації елемента, що розглядається. Переміщення в даному випадку чисельно рівні головним видовженням  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$ , оскільки ребра мають одиничну довжину.

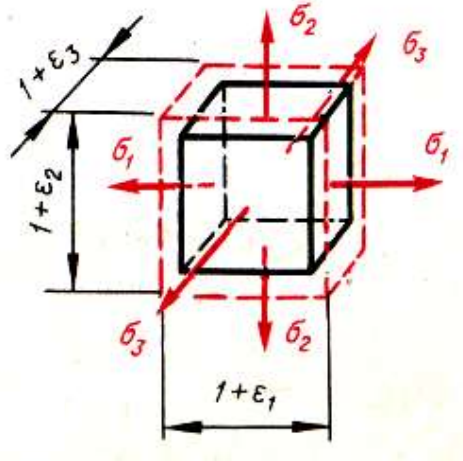


Рис. 49

Таким чином, використовуючи формулу (146)

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \quad (147)$$

Підставивши вирази  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$  із формули (141) в формулу (147), знайдемо, що

$$u = \frac{1}{2\Delta} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (148)$$

### 3.13.2. Питома потенційна енергія формозмінення

При деформації елемента (рис. 49) змінюються як його об'єм так і форма. У відповідності з цим можна вважати, що повна питома потенційна енергія деформації

$$u = u_v + u_\phi \quad (149)$$

де  $u_v$  — питома потенційна енергія зміни об'єму, тобто енергія, що накопичується за рахунок зміни об'єму,

$u_{\phi}$  – питома потенційна енергія формозмінення, тобто енергія, що накопичується внаслідок зміни форми елементу.

Безпосередньо визначити  $u_{\phi}$  буде складно, тому знайдемо спочатку  $u_v$ . Це можна зробити, виходячи з припущення про те, що в різних елементах при дії різних головних напружень величини  $u_v$  буде однаковою.

Крім елементу, що розглядається, введемо ще допоміжний елемент. Нехай допоміжний елемент – теж одиничний кубик, але по граням його діють однакові головні напруження  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'$ . Для цього елементу, згідно формул (144), (148) і (149)

$$\varepsilon'_v = \frac{3(1-2\mu)}{2\mathring{A}} \sigma' \quad (150)$$

а

$$u' = u'_v + u'_o = \frac{3(1-2\mu)}{2\mathring{A}} (\sigma')^2 \quad (151)$$

Але, очевидно, допоміжний елемент при деформуванні змінює тільки свій об'єм, форма ж його не змінюється (залишається кубічною). Тому  $u'_o = 0$  і тоді,

$$u'_v = \frac{3(1-2\mu)}{2\mathring{A}} (\sigma')^2 \quad (152)$$

Виберемо величину  $\sigma'$  такою, щоб  $\varepsilon'_v = \varepsilon_v$ , тобто щоб

$$\frac{3(1-2\mu)}{\mathring{A}} \sigma' = \frac{3(1-2\mu)}{\mathring{A}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (153)$$

Звідси

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (154)$$

Оскільки в обох елементах зміни об'єму однакові, дотримуючись прийнятого припущення можна стверджувати, що

$$u_v = u'_v = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \cdot \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9} \quad (155)$$

тобто

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (156)$$

Тепер, згідно формули (149),

$$u_{\phi}=u-u_v \quad (157)$$

підставивши сюди значення  $u$  і  $u_v$  з формул (148) і (156), після елементарних перетворень отримаємо, що

$$\begin{aligned} u_{\delta} &= \frac{1+\mu}{3\mathring{A}}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1+\mu}{6\mathring{A}}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \end{aligned} \quad (158)$$

Це і є враз для питомої потенційної енергії формозмінення.

## Лекція 7

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### Теорії міцності

Мета лекції: ознайомлення з теоріями міцності

План лекції

- 36.Критерій найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності)
- 37.Критерій найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності)
- 38.Критерій найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності)
- 39.Критерій питомої потенційної енергії формозмінення (четверта теорія міцності)
- 40.Критерій Мора

Рекомендована література

- 19. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
- 20. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 21. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

### **3.14. Критерій найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності)**

Згідно цієї теорії, переважний вплив на міцність здійснює величина найбільшого нормального напруження. Припускається, що порушення міцності в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли найбільше нормальне напруження досягає небезпечного значення  $\sigma^0$ . Останнє встановлюється при простому розтягу або стиску на зразках із даного матеріалу.

Умова порушення міцності при складному напруженому стані має вид

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_+^0 \\ |\sigma_3| &= \sigma_-^0\end{aligned}\tag{159}$$

Умова міцності з коефіцієнтом запасу  $n$  наступне

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+]\tag{160}$$

або

$$|\sigma_3| \leq [\sigma] \quad (161)$$

де  $[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}$

### 3.15. Критерій найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності)

Згідно цієї теорії, в якості критерію міцності приймають найбільшу по абсолютній величині лінійну деформацію. Припускається, що порушення міцності в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли найбільша лінійна деформація  $\varepsilon_{\max}$  досягає свого небезпечного значення  $\varepsilon^0$ . Останнє визначається при простому розтягові або стисковій зразків із даного матеріалу.

Таким чином, умова руйнування наступна

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon^0 \quad (162)$$

а умова міцності

$$|\varepsilon_{\max}| \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon^0}{n} \quad (163)$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразимо умову міцності (163) в напруженнях. Нехай найбільше відносне видовження буде  $\varepsilon_1$ . Тоді

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (164)$$

При простому розтягові, прийнявши в якості допустимого напруження  $[\sigma]$ , для найбільшого відносного видовження допускаємо величину

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E} \quad (165)$$

Підставимо вирази для  $\varepsilon_{\max}$  і  $[\varepsilon]$  в умову міцності (163). Тоді

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E} \quad (166)$$

або

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (167)$$

Як видно із умови міцності (167), в цій теорії з допустимим напруженням потрібно порівнювати не те або інше головне напруження, а їх комбінацію. Еквівалентне напруження в цьому випадку

$$\sigma_{\text{еквII}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (168)$$

### 3.16. Критерій найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності)

Тут в якості критерію міцності прийнята величина найбільшого дотичного напруження. Згідно цієї теорії припускається, що граничний стан в загальному випадку настає тоді, коли найбільше дотичне напруження  $\tau_{\text{max}}$  досягне небезпечного значення  $\tau^0$ . Останнє визначається при досягненні граничного стану у випадку простого розтягу.

$$\tau_{\text{max}} = \tau^0 \quad (169)$$

умова міцності

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau] = \frac{\tau^0}{n} \quad (170)$$

Оскільки згідно виразу (130)  $\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , а  $\tau^0 = \frac{1}{2}\sigma^0$ , то умови руйнування і міцності (169) і (170) можна виразити через головні напруження так

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma^0 \quad (171)$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (172)$$

Таким чином, еквівалентним напруженням по третій теорії є різниця алгебраїчно найбільшого і найменшого головних напружень

$$\sigma_{\text{еквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (173)$$

### 3.17. Критерій питомої потенційної енергії формозмінення (четверта теорія міцності)

В якості критерію міцності в цьому випадку приймають кількість питомої потенційної енергії формозмінення, що накопичена деформованим

елементом. Згідно цієї теорії, небезпечний стан (текучість) в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли питома потенційна енергія формозмінення досягає свого граничного значення. Останнє можна легко визначити при простому розтягові в момент текучості.

Умова виникнення текучості

$$u_{\phi} = (u_{\phi})_T \quad (174)$$

Умова міцності

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}] \quad (175)$$

Припускаючи, що закон Гука справедливий впритул до виникнення граничного стану, можна потенційну енергію формозмінення в загальному випадку напруженого стану записати, згідно виразу (158) у вигляді

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3A} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \quad (176)$$

При простому розтягові в момент текучості ( $\sigma_1 = \sigma_T$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) маємо

$$(u_{\phi})_{\phi} = \frac{1+\mu}{3A} \sigma_{\phi}^2 \quad (177)$$

Тобто умова (174) після підстановки виразів (176) і (177) перетворюється так

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_{\phi} \quad (178)$$

або

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} = \sigma_{\phi} \quad (179)$$

Умова міцності буде наступна

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \leq \frac{\sigma_{\phi}}{n} = [\sigma] \quad (180)$$

Таким чином еквівалентне напруження по четвертій теорії

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \quad (181)$$

### 3.18. Критерій Мора

Критерій Мора заснований на припущенні, що міцність матеріалів в загальному випадку напруженого стану залежить головним чином від величини і знаку найбільшого  $\sigma_1$  і найменшого  $\sigma_3$  головних напружень. Середнє по величині головне напруження, як вказувалось вище, лише незначно впливає на міцність. Виходячи із цього припущення, можна будь-який напружений стан зобразити одним кругом Мора, побудованим на головних напруженнях  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ .

Якщо при даних  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  міцність матеріалу порушується, то круг, побудований на цих напруженнях, називається *граничним*. Змінюючи співвідношення між головними напруженнями, отримуємо для даного матеріалу сімейство граничних кіл (рис. 50). Досліди показують, що по мірі переходу із області розтягу в область стиску опір руйнуванню збільшується. Цьому відповідає збільшення діаметрів граничних кіл по мірі руху ліворуч.

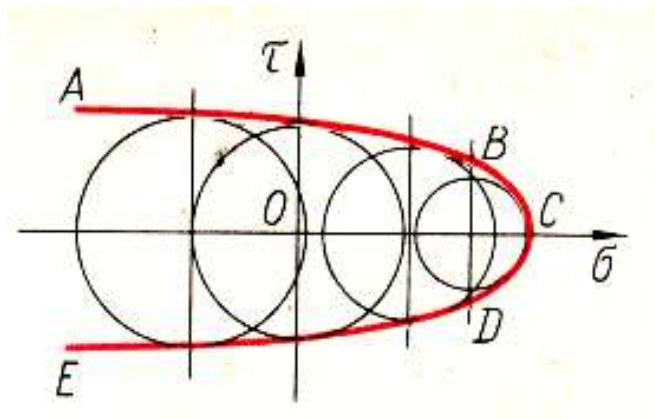


Рис. 50

Огибаюча ABCDE сімейства граничних кіл обмежує область міцності (рис. 50). Точка С відповідає всесторонньому рівномірному розтягу. Оскільки при рівномірному всесторонньому стиску матеріал здатен, не руйнуючись, витримувати дуже великі напруження, то огибаюча ліворуч залишається незамкнутою.

При наявності граничної огибаючої розрахувати міцність дуже просто. По знайденим в небезпечній точці деталі значенням головних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$  будують круг. Міцність буде забезпечена, якщо він цілком буде розташований всередині огибаючої. Будемо збільшувати пропорційно величини головних напружень до тих пір, поки круг, що зображує даний напружений стан, торкнеться граничних огибаючих. Відношення радіусів отриманого таким чином граничного круга і початкового визначить коефіцієнт запасу.

На практиці зазвичай невелику ділянку огинаючої будують на основі двох дослідів – на розтяг і стиск, причому граничні криві замінюють прямими лініями, дотичними до кіл (рис. 51). Допустимий напружений стан можна отримати, зменшивши масштаб креслення в  $n$  раз ( $n$  – коефіцієнт запасу). На рис. 52 показано допустимий напружений стан для невеликої ділянки огинаючої.

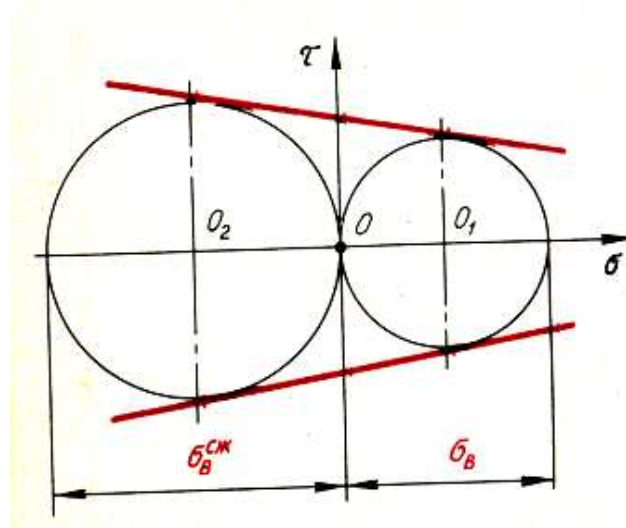


Рис. 51

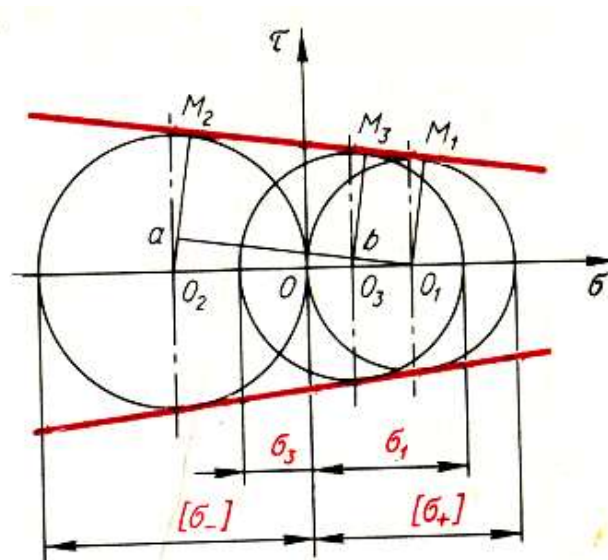


Рис. 52

Легко отримати умову міцності для проміжного напруженого стану ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ), центр круга якого  $O_3$  розташовується між точками  $O_1$  і  $O_2$  (рис. 52).

Проведемо прямі  $O_1M_1$ ,  $O_2M_2$  і  $O_3M_3$ , що з'єднують центри і точки торкання кіл з огинаючими лініями, а також пряму  $\overline{I_1a}$ , паралельну  $\overline{I_1I_2}$ .

З подібності трикутників отримаємо наступні залежності

$$\frac{\overline{O_3b}}{\overline{O_2a}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_1O_2}}, \text{ або } \frac{\overline{O_3M_3} - \overline{O_1M_1}}{\overline{O_2M_2} - \overline{O_1M_1}} = \frac{\overline{OO_1} - \overline{OO_3}}{\overline{OO_1} - \overline{OO_2}} \quad (182)$$

Замінивши відрізки ліній значеннями відповідних напружень, будемо мати

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma_+]}{[\sigma_-] - [\sigma_+]} = \frac{[\sigma_+] - (\sigma_1 + \sigma_3)}{[\sigma_+] + [\sigma_-]} \quad (183)$$

Після перетворення, ввівши знак нерівності, отримуємо умову міцності

$$\sigma_{\text{âââ}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+] \quad (184)$$

## Лекція 8

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### Зсув. Кручення

Мета лекції: ознайомлення з послідовністю розрахунків на міцність і жорсткість при зсуві і крученні

План лекції

- 41.Зсув. Розрахунок на зріз
- 42.Чистий зсув
- 43.Закон Гука при чистому зсуві
- 44.Кручення

Рекомендована література

- 22. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
- 23. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 24. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

### 3.19. Зсув. Розрахунок на зріз

У випадку деформації зсуву із шести компонентів головного вектора і головного моменту внутрішніх сил відмінні від нуля тільки поперечні сили  $Q_y$  і  $Q_z$ . Деформація зсуву або зрізу практично може бути отримана у випадку, коли на брус, що розглядається, з протилежних сторін на близькій відстані одна від одної діють дві рівні сили, перпендикулярні до осі бруса і направлені в протилежні сторони. Взагалі на практиці зсув в чистому вигляді отримати важко, оскільки зазвичай деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій і частіше всього згином.

Встановимо формули для напружень і деформацій, необхідні при розрахунку на зріз елементів конструкцій, що мають форму бруса. По відомому зовнішньому навантаженню  $F$  (рис. 53), використовуючи метод перерізів, що на ділянці  $ab$  поперечна сила

$$Q_y = F \quad (185)$$

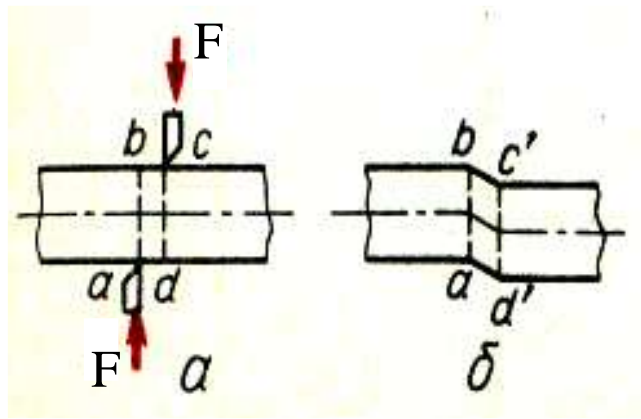


Рис. 53

Встановимо зв'язок між поперечною силою і напруженнями, що діють в перетині, що розглядається. Із рівнянь (68), (69)

$$\int_A \tau dA = Q \quad (186)$$

Приймаючи дотичні напруження  $\tau$  рівномірно розподіленими по площі поперечного перетину  $A$  (рис. 54), використовуючи вирази (185) і (186) будемо мати  $Q=F=\tau A$ , звідки

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (187)$$

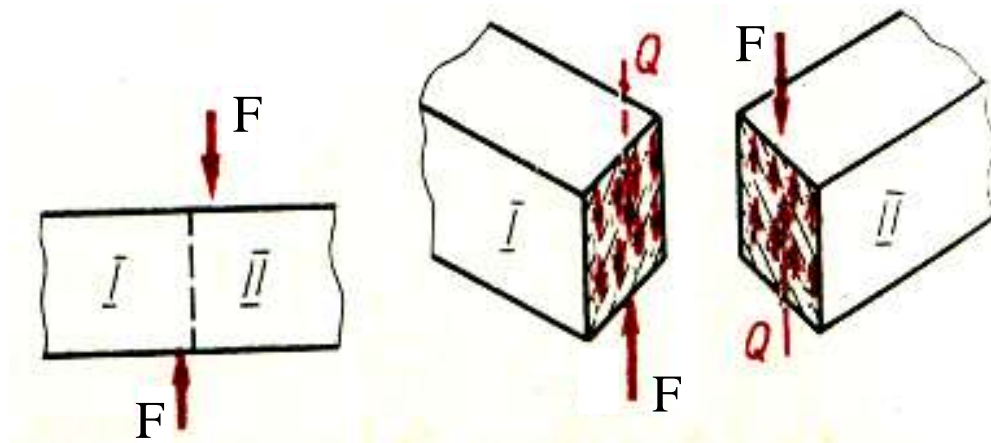


Рис. 54

### 3.20. Чистий зсув

При розрахунку низки елементів конструкцій зустрічається випадок плоского напруженого стану, коли на чотирьох гранях прямокутного

елементу діють тільки дотичні напруження (рис. 55, а). Такий напружений стан називається *чистим зсувом*.

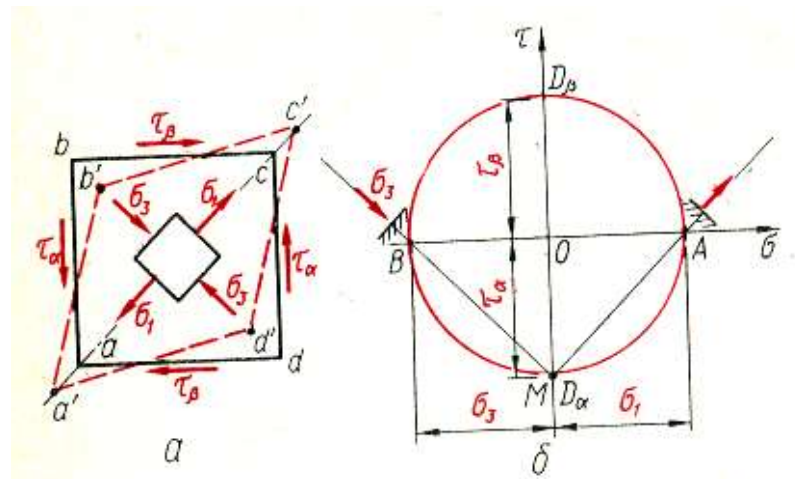


Рис. 55

Знайдемо величину і напрямки головних напружень при такому напруженому стані. Для цього скористаємося побудовою круга напружень (рис. 55, б). Оскільки в даному випадку

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = 0; \tau_{\alpha} = -\tau; \tau_{\beta} = \tau \quad (188)$$

то побудувавши круг напружень, знаходимо, що

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau \quad (189)$$

а головні площадки нахилені до граней елемента під кутом  $45^\circ$ .

Третя головна площадка співпадає з ненавантаженою фасадною гранню елемента, відповідно

$$\sigma_2 = 0 \quad (190)$$

Деформація чистого зсуву характеризується зміною початково прямих кутів (рис. 56). Малий кут  $\gamma$ , на який змінюється початково прямий кут, називається *кутом зсуву* або *відносним зсувом*.

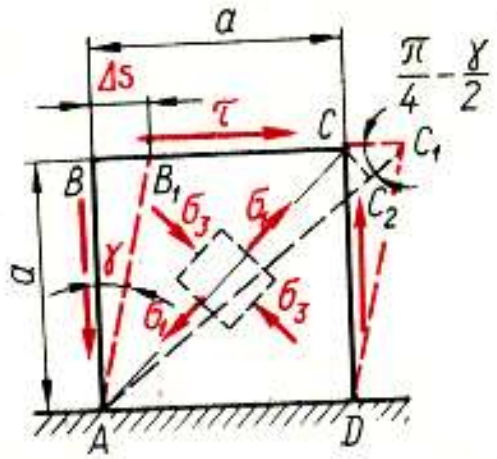


Рис. 56

Величину абсолютного зміщення грані  $\Delta s$  називають *абсолютним зсувом*.

Із трикутника  $BAB_1$

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \quad (191)$$

Враховуючи малість кута

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a} \quad (192)$$

тоді

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a} \quad (193)$$

### 3.21. Закон Гука при чистому зсуві

Залежність між навантаженням і деформацією при зсуві можна прослідкувати по *діаграмі зсуву* (рис. 57).

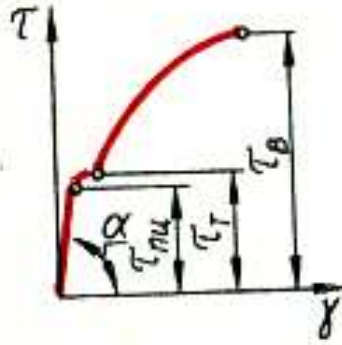


Рис. 57

Розглядаючи деформацію елемента (рис. 56) в межах пружності, знайдемо, що між відносним зсувом і дотичними напруженнями, що діють по граням елемента, згідно діаграмі зсуву (рис. 57), існує лінійна залежність, яка може бути виражена формулою

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ або } \tau = G\gamma \quad (194)$$

де  $G$  – коефіцієнт пропорційності, який називається модулем пружності при зсуві або модулем пружності другого роду і вимірюється в МПа або Па.

По закону Гука для чистого зсуву  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , тому

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G} \quad (195)$$

Тепер скористаємося узагальненим законом Гука. Головне напруження  $\sigma_1$  діє в напрямку діагоналі АС (рис. 56). Тому відносне видовження  $\varepsilon$  діагоналі є головним видовженням  $\varepsilon_1$  при плоскому напруженому стані, представленим чистим зсувом. Враховуючи залежність (189) з першої формули (141) знаходимо, що

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{A} \tau \quad (196)$$

Порівнюючи формули (195) і (196), отримуємо шукану залежність

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (197)$$

#### 4. Кручення

Деформація кручення викликається парами сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стержня. Тому при крученні в довільному поперечному перетині стержня із шести внутрішніх силових факторів виникає тільки один – крутний момент  $M_x$  (рис. 58).

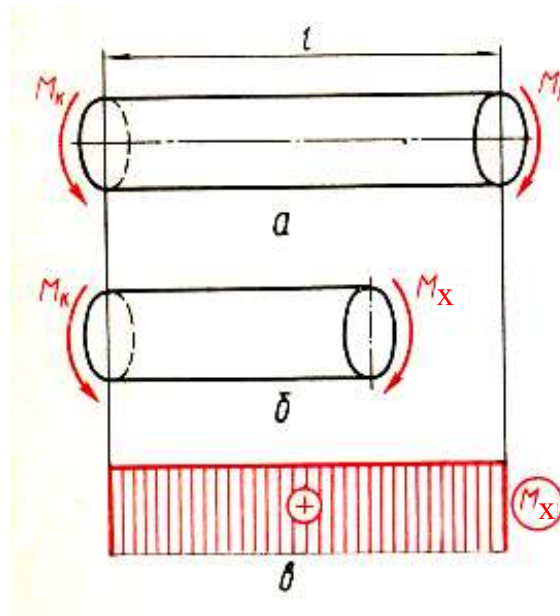


Рис. 58

Стержні, що працюють на кручення, зазвичай називають *валами*. Якщо розглядати кручення валу (рис. 59), легко встановити, що під дією крутного моменту, прикладеного до вільного кінця, будь-який перетин на відстані  $x$  від защемлення повертається відносно закріпленого перетину на певний кут  $\varphi$  - кут закручування.

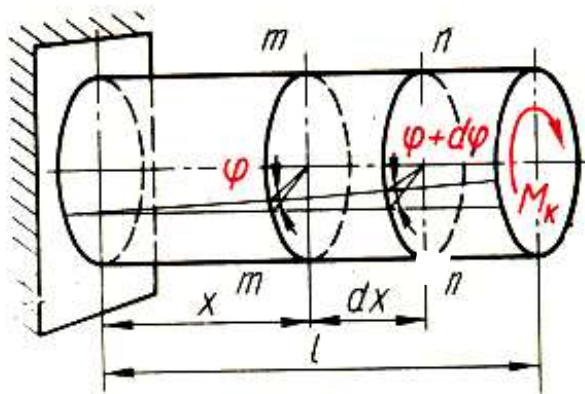


Рис. 59

Для визначення характеру розподілу напружень по перетину на поверхні круглого валу нанесемо сітку, яка складається із ліній, паралельних осі, і ліній, які є паралельними колами (рис. 60). Розглянемо деформацію прямокутного елемента нескінченно малої товщини, виділеного на поверхні валу. Розглянутий елемент перебуває в умовах чистого зсуву і, відповідно, на його гранях діють дотичні напруження (рис. 61, 62). Кут  $\gamma$  є кутом зсуву (відносний зсув).

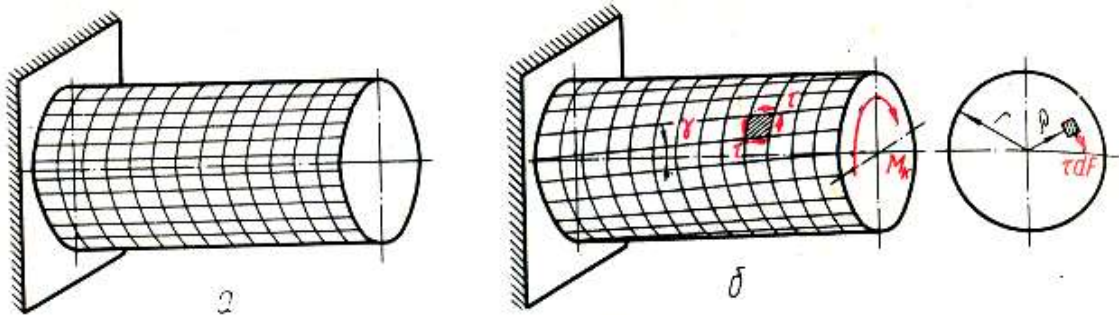


Рис. 60

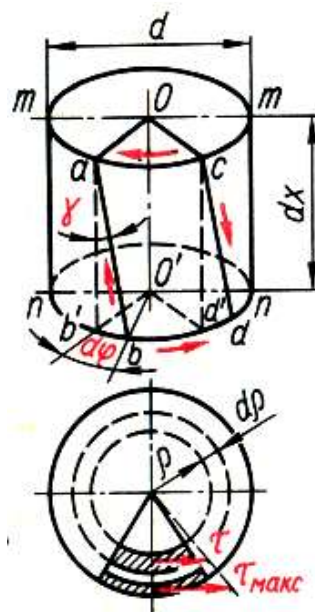


Рис. 61

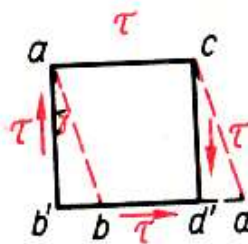


Рис. 62

Відносний кут закручування круглого стержня

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \quad (198)$$

де  $GI_p$  – жорсткість стержня при крученні, Н·м<sup>2</sup>,

$I_p$  – полярний момент інерції круглого стержня, який для суцільного стержня діаметром  $d$ , виражається формулою  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , а для трубчастого стержня з внутрішнім діаметром  $d_{\text{в}}$ , і зовнішнім  $d_{\text{з}}$   $I_p = \frac{\pi(d_{\text{з}}^4 - d_{\text{в}}^4)}{32}$

Якщо в межах циліндричної ділянки стержня довжиною  $l$  крутні моменти в перетинах не змінюються, то

$$\varphi = \theta l = \frac{M_x l}{GI_p} \quad (199)$$

Для визначення дотичного напруження  $\tau$  в будь-якій точці перетину стержня достатньо в формулу, що встановлює зв'язок між напруженнями і деформаціями  $\tau_r = G\theta r$  підставити вираз для  $\theta$  по формулі (198). Тоді

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p} \quad (200)$$

Максимальне дотичне напруження, що діє на периферії перетину стержня

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_x r}{I_p} = \frac{M_x}{W_p} \quad (201)$$

де  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$  - полярний момент опору для суцільного круглого перетину.

Встановивши формулу для визначення максимального дотичного напруження при крученні, можна записати рівняння міцності при крученні

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau] \quad (202)$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження при крученні (чистому зсуві).

Крім розрахунку на міцність вали розраховують і на жорсткість, обмежуючи погонні кути закручування певною допустимою величиною  $[\theta]$

$$\theta_{\max} = \frac{M_x}{GI_p} \leq [\theta] \quad (203)$$

## Лекція 9

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### Згин

Мета лекції: ознайомлення з послідовністю розрахунків на міцність і жорсткість при згині

План лекції

- 45. Нормальні напруження при плоскому згині прямого стержня
- 46. Дотичні напруження при згині
- 47. Розрахунок на міцність при згині
- 48. Диференціальне рівняння вигнутої осі
- 49. Визначення переміщень в балках по методу початкових параметрів

### Рекомендована література

- 25. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
- 26. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 27. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

### 4.1. Нормальні напруження при плоскому згині прямого стержня

Розглянемо випадок чистого плоского згину балки (рис. 63, а). Із шести внутрішніх силових факторів, які можуть діяти в її поперечних перетинах в загальному випадку згину, при чистому згині відмінний від нуля тільки згинаючий момент  $M$ . Проведемо поперечний перетин  $m-m$  на довільній відстані  $x$  від початку координат (рис. 63, а). В площині перетину (рис. 63, б) проведемо координатні осі  $y$  і  $z$ : ось  $y$  сполучимо із силовою лінією (лінією перетину силової площини з площиною перетину), а ось  $z$  проведемо на довільній поки що висоті, але перпендикулярно до осі  $y$ . Ось  $x$  направимо перпендикулярно до площини перетину. Виділимо в перетині елемент площі  $dA$ , координати якого  $y$  і  $z$ . В загальному випадку в елементі можуть виникати напруження  $\sigma$  і  $\tau$ . Однак при чистому згині всі зусилля і моменти, пов'язані з дотичними напруженнями –  $Q_y$ ,  $Q_z$  і  $M_x$  – дорівнюють нулю. На підставі виразів (67)-(72)  $dA$  буде діяти тільки зусилля  $\sigma dA = dN$ . Тому із всіх формул (67)-(72) залишаться тільки три (67), (70), (71).

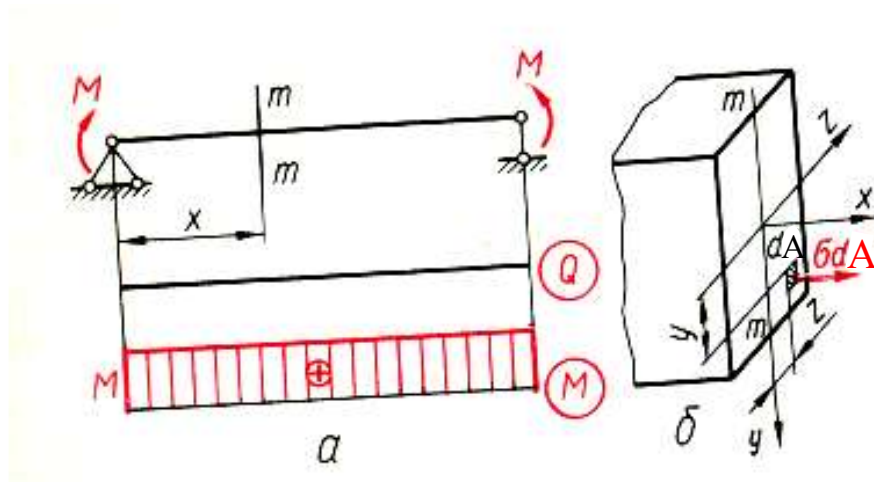
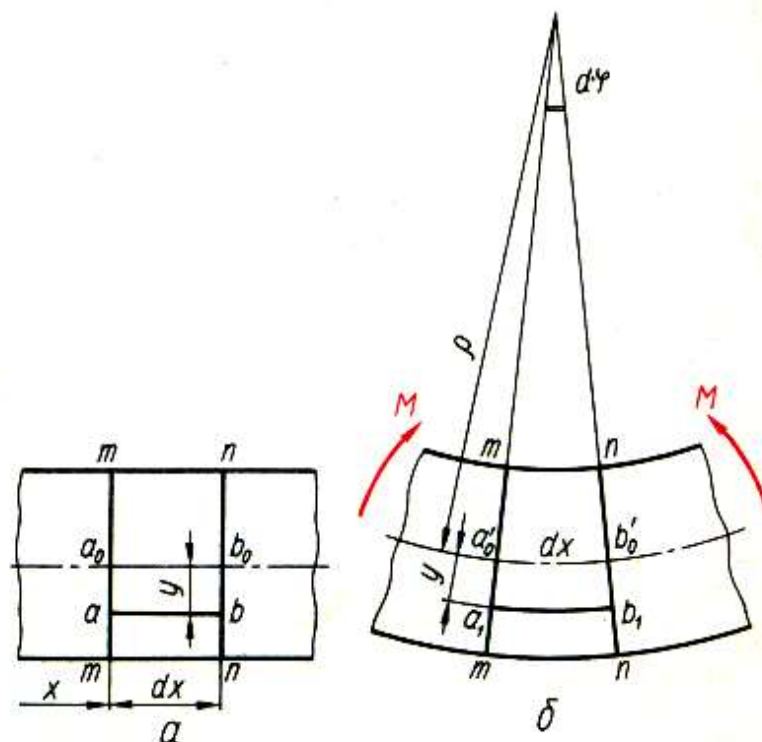


Рис. 63

Виділимо елемент двома суміжними поперечними перетинами m-m і n-n, на відстані  $dx$  одне від одного (рис. 64, а) і прийнявши до уваги гіпотезу плоских перетинів, розглянемо його деформований стан (рис. 64, б). Перетини m-m і n-n залишаються плоскими і повертаються на кут  $d\varphi$ . Елемент  $a_0b_0$  нейтрального шару перетворюється в дугу  $a'_0b'_0$  з радіусом  $\rho$ , а волокно  $ab$ , що перебуває на відстані  $y$  від нейтрального шару – в криволінійне волокно  $a_1b_1$  з радіусом кривизни  $\rho+y$ . Відносне видовження цього волокна

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab} \quad (204)$$



Але  $a_1b_1=(\rho+y)d\varphi$  і  $ab=dx$ , тому

$$\varepsilon = \frac{(\rho + \delta)d\varphi - dx}{dx} \quad (205)$$

Щоб спростити цей вираз, розглянемо волокно  $a_0b_0$ , що належить нейтральному шару. Його довжина  $a_0b_0=dx$ . Після деформації воно перетворюється в дугу  $a'_0b'_0=\rho d\varphi$ . Але волокна нейтрального шару не змінюють свої довжини при деформації, тому

$$dx=\rho d\varphi \quad (206)$$

Підставивши вираз (206) у вираз (205) і скоротивши на  $d\varphi$ , отримаємо

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\rho} \quad (207)$$

Таким чином, розгляд геометричної сторони задачі показав, що відносна повздовжня деформація пропорційна відстані волокна від нейтральної осі.

Виключимо  $\varepsilon$  із формули (207) і закону Гука  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ . В результаті будемо мати

$$\sigma = \frac{E}{\rho} \delta \quad (208)$$

Підставляючи залежність (208) в рівняння  $\int_A \sigma \delta dA = M$  і враховуючи, що  $E$  і  $\rho$  як величини, що не залежать від положення елемента  $dA$  в перетині, можна винести за знак інтегралу, отримаємо

$$\frac{E}{\rho} \int_A \delta^2 dA = M \quad (209)$$

Враховуючи, що  $\int_A \delta^2 dA = I_z$  є моментом інерції перетину відносно осі  $z$ , можемо останню формулу записати у вигляді

$$\frac{1}{\rho} = \frac{I}{I_z} \quad (210)$$

Підставивши формулу (210) у вираз (208), знайдемо, що

$$\sigma = \frac{I \delta}{2_z} \quad (211)$$

Формула (211) показує, що, яку б форму і розміри не мав перетин, напруження в точках нейтральної лінії дорівнюють нулю. Величина  $\sigma$  лінійно зростає по мірі віддалення від нейтральної лінії. При цьому напруження виявляються сталими по ширині перетину (вздовж лінії  $y=\text{const}$ ). Таким чином, епюра  $\sigma$  для будь-яких перетинів, що мають горизонтальну ось симетрії, завжди буде мати вигляд, представлений на рис. 65. Всі волокна, розташовані вище нейтральної лінії, виявляться стиснутими, а нижче неї – розтягнутими. Якщо згинаючий момент буде мати протилежний знак, то верхні волокна будуть розтягуватися, а нижні – стискатися.

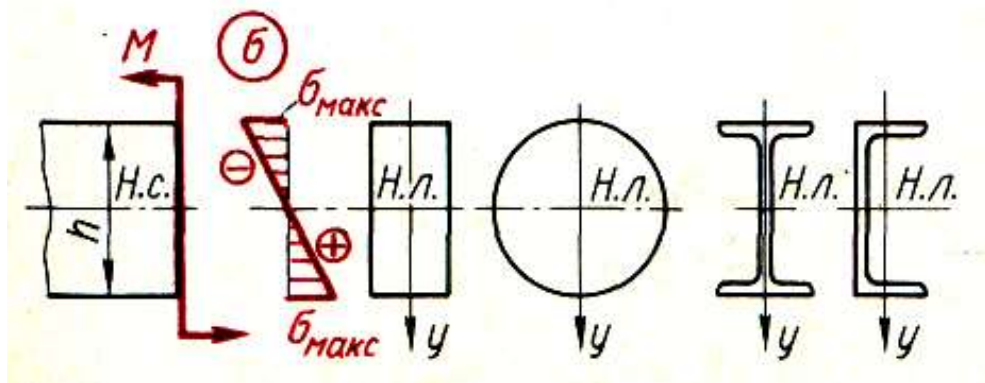


Рис. 65

Найбільшої величини ( $\sigma_{\max}$ ) напруження досягають в волокнах найбільш віддалених від нейтральної лінії, тобто у випадку симетрії перетину відносно горизонтальної осі  $z$  при  $y = \pm \frac{h}{2}$ . Підставляючи це значення  $y$

формулу (211) для абсолютної величини напруження отримуємо  $\sigma_{\max} = \frac{I}{2} \frac{h}{2}$ .

Позначимо відношення  $\frac{I}{h/2}$  через  $W$  і назовемо його осьовим моментом опору,  $\text{м}^3$ . Тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{I}{W} \quad (212)$$

Якщо перетин не має горизонтальної осі симетрії, то нейтральна лінія зміщена по відношенню до середини висоти перетину (рис. 66) і напруження

$\sigma_{\max}$  в крайніх верхніх і  $\sigma'_{\max}$  в крайніх нижніх волокнах не будуть однаковими

$$\sigma_{\max} = \frac{I}{W}; \sigma'_{\max} = \frac{I}{W'} \quad (213)$$

де  $W = \frac{I}{y_{\max}}, W' = \frac{I}{y'_{\max}}$

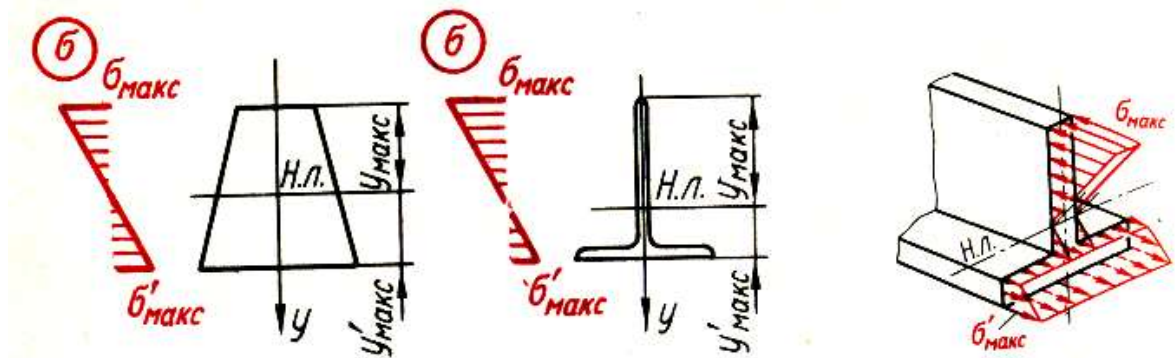


Рис. 66

## 4.2. Дотичні напруження при згині

При поперечному згині, коли в перетинах бруса діє  $Q$  і  $M$ , виникають не тільки нормальні напруження  $\sigma$ , але і дотичні напруження  $\tau$ .

Для визначення  $\tau$  в найпростішому випадку поперечного згину балки використовують формулу вперше отриману Д. І. Журавським, яка носить його ім'я.

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{bI_z} \quad (214)$$

Для довільного перетину (рис. 67) величини, що входять в формулу (214), мають наступні значення:  $Q=Q(x)$  – абсолютна величина поперечної сили в тому перетині, де визначаються дотичні напруження;  $I_z$  – момент інерції цього перетину відносно його нейтральної лінії;  $b=b(y)$  – ширина перетину на рівні, де визначають  $\tau$ ;  $S_z(y)$  – абсолютна величина статичного моменту відносно нейтральної лінії тієї частини площі  $A(y)$ , яка обмежується лінією, де визначають  $\tau$ , і краєм перетину.

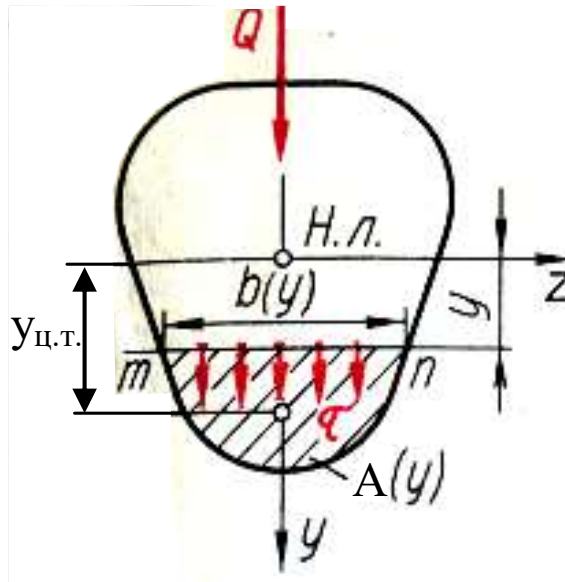


Рис. 67

### 4.3. Розрахунок на міцність при згині

При поперечному згині балки її матеріал перебуває в неоднорідному плоскому напруженому стані. Умова міцності має бути записана для так званої небезпечної точки балки, тобто тієї точки, де матеріал перебуває в найбільш напруженому стані. Небезпечною буде одна із наступних трьох точок: а) точка, де нормальне напруження досягає найбільшої величини; б) точка, де дотичне напруження досягає найбільшої величини; в) точка, де  $\sigma$  і  $\tau$ , хоч і не приймають найбільших значень, але в своїй комбінації створюють найбільш не вигідне сполучення, тобто найбільше еквівалентне напруження по прийнятій для розрахунку теорії міцності. При цьому таких точок може виявитися кілька.

Напружений стан в точці, розташовані в крайніх волокнах того перетину, де згинаючий момент має найбільше значення, лінійний і умова міцності запишеться так

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \quad (215)$$

Друга точка розташована на нейтральній лінії того перетину, де поперечна сила найбільша. В такій точці спостерігається чистий зсув і тому умова міцності прийме вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{bI} \leq [\tau] \quad (216)$$

Що стосується третьої точки, то положення її не стільки визначене. Але де б вона не була вибрана, в ній буде плоский напружений стан, при якому головні напруження розраховують по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]\end{aligned}\tag{217}$$

Вносячи ці величини у вирази для еквівалентних напружень по різних теоріям міцності, отримуємо умови міцності

$$\sigma_{\text{âââ}^2} = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \leq [\sigma]\tag{218}$$

$$\sigma_{\text{âââ}^{22}} = \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]\tag{219}$$

$$\sigma_{\text{âââ}^{222}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]\tag{220}$$

$$\sigma_{\text{âââ}^{2V}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]\tag{221}$$

$$\sigma_{\text{âââ}^M} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]\tag{222}$$

де  $m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}$

#### 4.4. Диференціальне рівняння вигнутої осі

В більшості випадків практичного розрахунку деталей, що працюють на згин, необхідно також виконувати розрахунок їх на жорсткість. *Під розрахунком на жорсткість розуміють оцінку пружної піддатливості балки під дією прикладених навантажень і підбір таких розмірів поперечного перетину, при яких переміщення не будуть перевищувати встановлених нормами границь.* Для виконання такого розрахунку необхідно визначати переміщення точок балки під дією будь-якого зовнішнього навантаження.

Розглянемо деформацію балки при плоскому згині. Ось балки (рис. 68) під дією навантаження, розташованого в одній із головних площин інерції (в

площині  $xOy$ ), викривляється в тій же площині, а поперечні перетини повертаються і одночасно отримують поступальні переміщення. Викривлена ось балки називається вигнутою віссю або пружною лінією (рис. 68, 69).

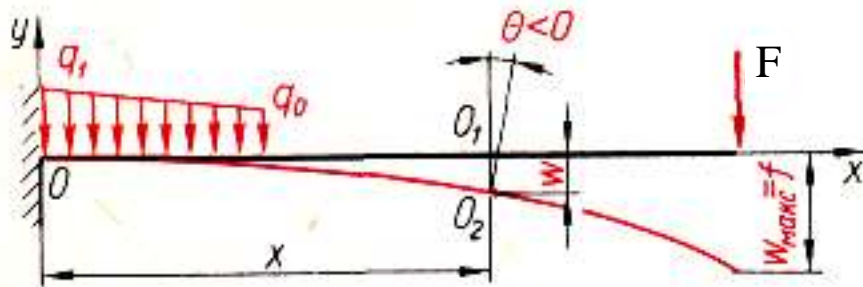


Рис. 68

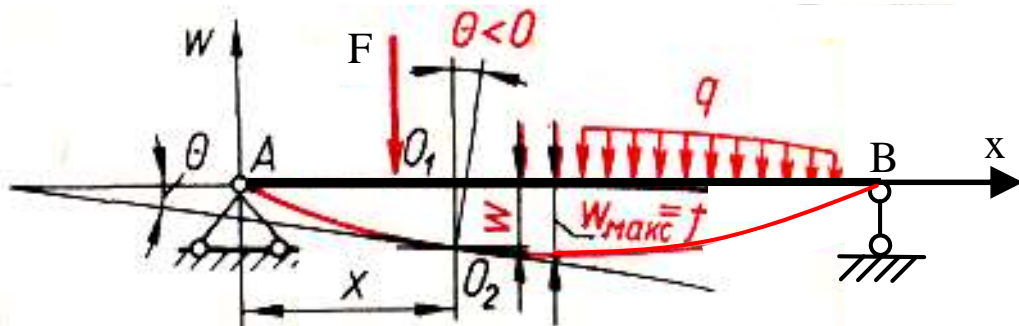


Рис. 69

Переміщення центру тяжіння перетину по напрямку, перпендикулярному до осі балки, називається прогином балки в даному перетині і позначаються  $w$ . Найбільший прогин називається стрілою прогину і позначається  $f$ .

Кут  $\theta$ , на який кожний перетин повертається по відношенню до свого початкового положення, називається кутом повороту перетину.

Замітимо, що довжина вигнутої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні бруса не змінюється, таким чином, при цьому відбувається зміщення її точок також і в напрямку осі  $x$  (переміщення  $O_1O_3$  на рис. 70). Однак в більшості випадків переміщення  $v$  настільки малі, що ними можна знехтувати.

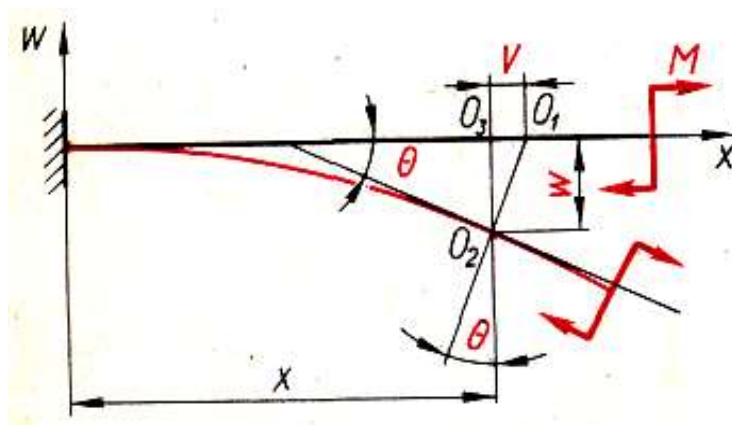


Рис. 70

Спрощене диференціальне рівняння пружної лінії

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (223)$$

в якому величина згинаючого моменту  $M(x)$  визначається для недеформованої балки. В подальшому рівняння (223) будемо називати *основним диференціальним рівнянням пружної лінії* (для малих деформацій). За допомогою нього можна визначати переміщення в балках при будь-яких умовах навантаження.

#### 4.5. Визначення переміщень в балках по методу початкових параметрів

Розглянемо певну частину балки довжиною  $l_1$  (рис. 71, а), провівши перетини в точках К і L. На рис. 71, б зображений цей відрізок, навантажений наступними навантаженнями, які найбільш часто зустрічаються:

а) зосередженим моментом  $M$  в перетині з абсцисою  $a$ ;

б) зосередженою силою  $F$  в перетині з абсцисою  $b$ ;

в) навантаженням, розподіленим по закону трапеції від перетину з абсцисою  $c$  до перетину з абсцисою  $d$ , інтенсивністю

$$q(x) = q_c + k(x - c)$$

де  $k$  – тангенс кута нахилу  $\beta$  дотичної до епюри навантаження (рис. 71, а)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{q_d - q_c}{d - c} = k$$

г) крім того, по кінцям частини балки, що розглядається, прикладені поперечні сили і згинаючі моменти, які замінюють дію уявно відкинутих частин балки.

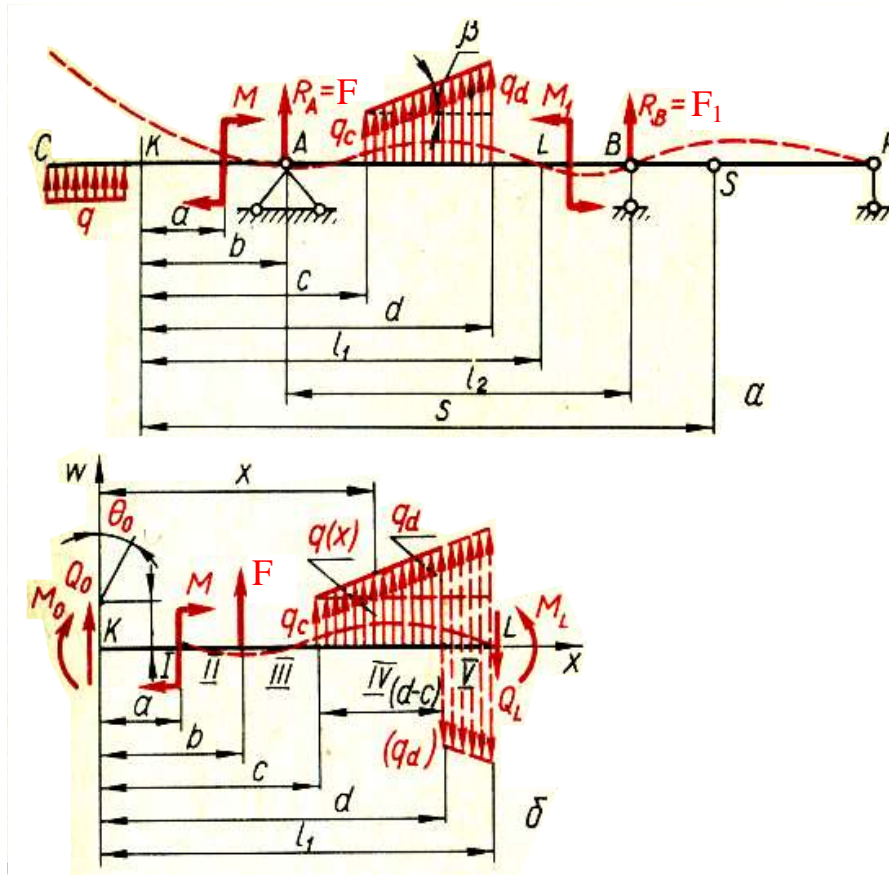


Рис. 71

Прогин  $\omega_0$  і кут повороту  $\theta_0$  є *початковими параметрами*.

Для випадку кількох моментів і сил, а також кількох ділянок розподіленого навантаження рівняння прогину в довільному перетині балки записують в наступній формі

$$\begin{aligned} \omega(\delta) = & \omega_0 + \theta_0 \delta + \frac{1}{A^2} \left[ \int_0^\delta \frac{\delta^2}{2!} + Q_0 \frac{\delta^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \right. \\ & + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \\ & \left. + \sum k \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(x-d)^5}{5!} \right] \end{aligned} \quad (224)$$

Рівняння (224) зазвичай називають універсальним рівнянням пружної лінії. При цьому мають на увазі, що це рівняння застосовується для будь-яких розрахункових схем балок.

Диференціюючи рівняння (224), отримуємо рівняння кутів повороту перетинів

$$\begin{aligned} \theta(\tilde{\delta}) = & \theta_0 + \frac{1}{\dot{A}^2} \left[ \dot{I}_0 \frac{\tilde{\delta}}{1!} + Q_0 \frac{\tilde{\delta}^2}{2!} + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \right. \\ & + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \\ & \left. + \sum k \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum k \frac{(x-d)^4}{4!} \right] \end{aligned} \quad (225)$$

## **Лекція 10**

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### **Складний опір**

Мета лекції: ознайомлення з послідовністю розрахунків на міцність і жорсткість при складному опорі

План лекції

50.Косий згин

51.Позацентровий розтяг (стиск)

52.Згин з крученням

### **Рекомендована література**

28. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.

29. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.

30. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

# 1. Косий згин

Від цих обох згинів у площині перерізу виникають нормальні напруження і тому їх можна просто алгебраїчно скласти. В силу того, що в більшості випадків дотичні напруження не відіграють суттєвої ролі, при розгляді косоного згину ми їх розглядати не будемо. І тоді

$$\sigma(x, y, z) = \sigma_{\text{пр}} + \sigma_{\text{кр}} = -\frac{M_{\text{пр}} \cdot y}{I_x} - \frac{M_{\text{кр}} \cdot z}{I_y} = -\frac{F \sin \varphi \cdot x \cdot y}{I_x} - \frac{F \cos \varphi \cdot x \cdot z}{I_y}$$

або, перетворюючи

$$\sigma(x, y, z) = -F \cdot x \cdot \left( \frac{\sin \varphi \cdot y}{I_x} + \frac{\cos \varphi \cdot z}{I_y} \right). \quad (10.1)$$

Зауважимо, що ця формула записана для балки, що розглядається у вибраній нами системі координат і не носить узагальненого змісту.

На рис. 10.3 зображено епюри напружень у перерізі балки „а” – при прямому згині і „б” – при косому.

Для того, щоб знайти точки, в яких виникнуть найбільші напруження, треба визначити положення нейтральної осі. Для цього прирівняємо вираз нормальних напружень до нуля.

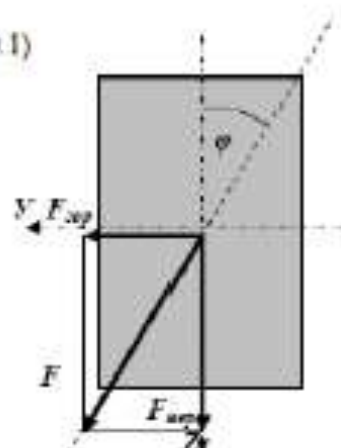


Рис.10.2. Складові сили в перерізі

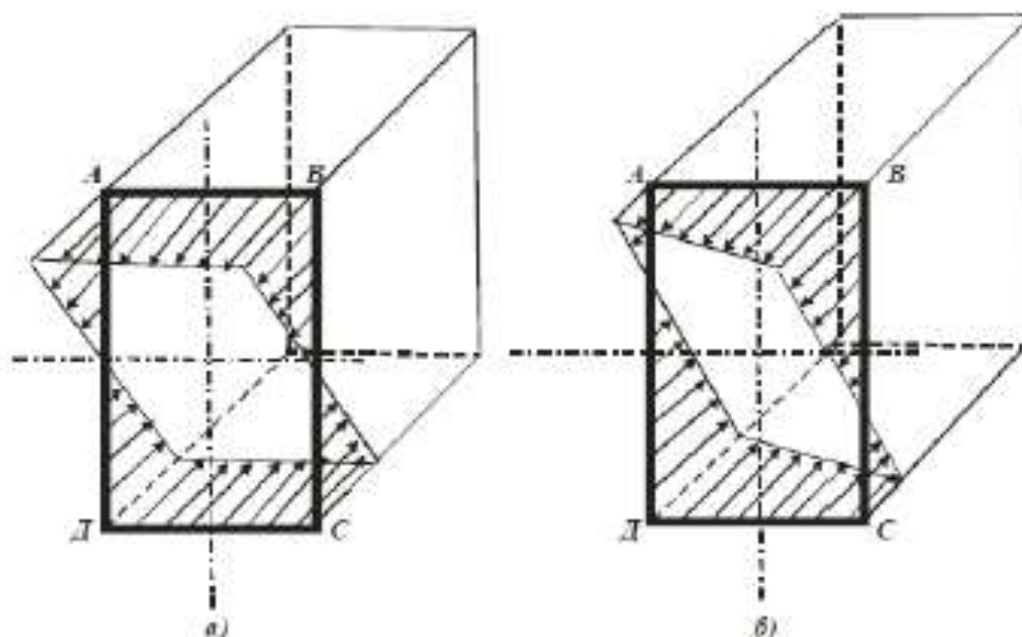


Рис. 10.3. Епюри розподілу напружень у перерізі:  
а) – при прямому згині, б) – при косому згині

У зв'язку з тим, що добуток  $Fx$  не дорівнює нулю, прирівняємо до нуля тільки вираз у дужках

$$\left( \frac{\sin \varphi \cdot y_0}{I_x} + \frac{\cos \varphi \cdot z_0}{I_y} \right) = 0, \quad (10.2)$$

де  $y_0, z_0$  – координати точок нейтральної осі.

## 2. Позацентри́вий розтяг (стиск)

Спробуємо дати відповідь на запитання: як це так може бути, щоб до стержня прикласти стискаюче навантаження, а він руйнувався від розтягуючих напружень? Або чому не такі вже й рідкісні випадки, коли стіни споруд та колони руйнуються внаслідок утворення тріщин в основі (причому, ці тріщини стають все ширшими, „розкриваються”, що вказує на наявність розтягуючих напружень)? Відповіді на ці запитання можна дати, розглянувши такий вид деформації, як позацентри́вий стиск (розтяг).

*Позацентри́вий стиск (розтяг)* – це випадок навантаження стержня, коли поздовжні сили діють по лінії, яка паралельна осі стержня та віддалена від неї на відстань  $e$ , яку називають *ексцентриситетом* (рис. 10.7 та 10.8).

З точки зору сукупності простих деформацій – це сумісна дія стиску (розтягу) та двох згинів відносно головних площин інерції (рис. 10.8).



Рис.10.7. Позацентри́вий стиск

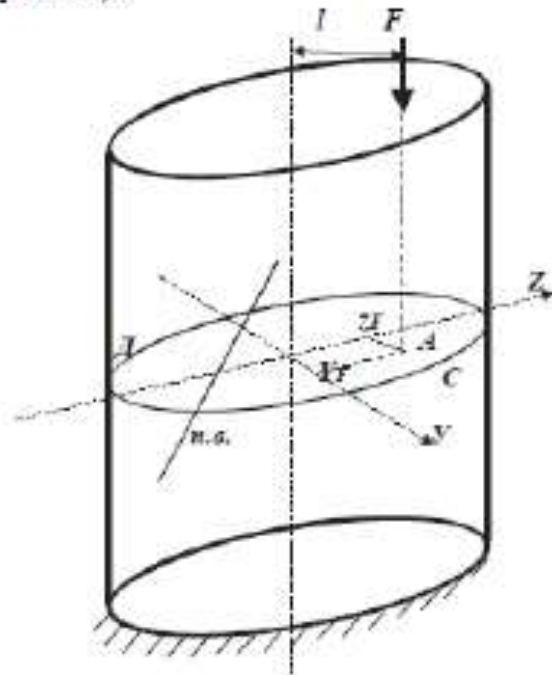


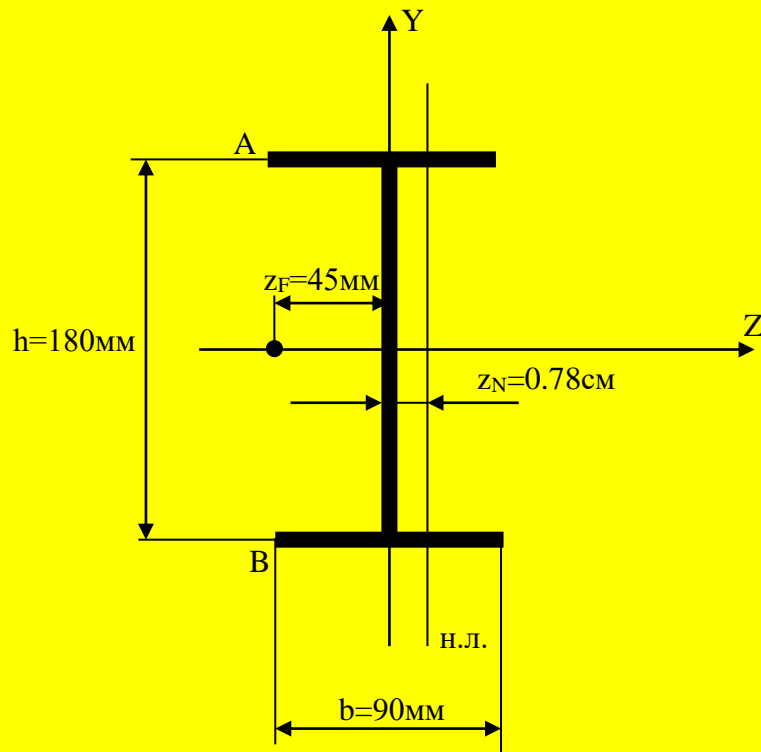
Рис.10.8. Позацентри́вий стиск.  
Розгляд перерізу стержня

*Зуваження:* домовимось обирати напрямки головних осей  $Y$  та  $Z$  таким чином, щоб проекція точки прикладання сили опинилася в I квадранті.

### 10.3.1. Напруження при позацентри́вому стиску(розтягу). Розрахунок на міцність.

Розглянемо, вказаний на рис. 10.7 та 10.8 переріз. Сила  $F$  не тільки стискає стержень, але й викликає згин через створення силую моментів відносно осей  $Y$  та  $Z$  – відповідно  $M_Y = F \cdot z_F$  та  $M_Z = F \cdot y_F$ .

### Задача 1



Двутавр №18 ( $i_z = 7.42 \text{ см}$ ,  $i_y = 1.88 \text{ см}$ ,  $A = 23.4 \text{ см}^2$ ),  $F = 7 \text{ т}$

Координати положення нейтральної лінії

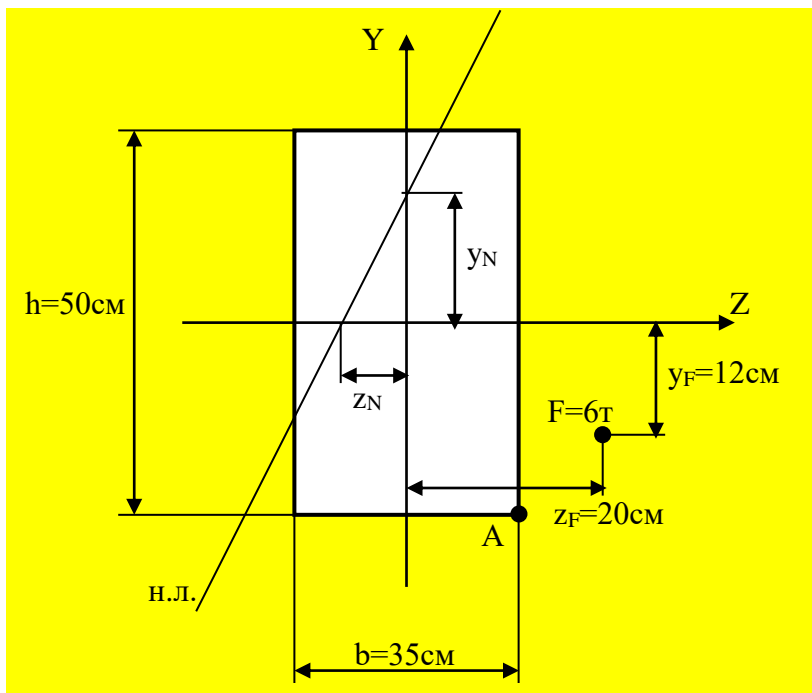
$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{7.42^2}{0} = \infty$$

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{1.88^2}{-4.5} = 0.78 \text{ см}$$

Напруження в точках А і В

$$\sigma = \frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{y \cdot y_F}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_F}{i_y^2} \right] = \frac{7000}{23.4} \left[ 1 + \frac{9 \cdot 0}{7.42^2} + \frac{(-4.5) \cdot (-4.5)}{1.88^2} \right] = 2015.2 \text{ кгс/см}^2$$

### Задача 2



Координати положення нейтральної лінії

$$y_n = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{208.33^2}{-12} = 17.36 \text{ см}$$

$$z_n = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{102.08^2}{20} = -5.1 \text{ см}$$

Площа поперечного перерізу

$$A = b \cdot h = 35 \cdot 50 = 1750 \text{ см}^2$$

Осьові моменти інерції

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{50 \cdot 35^3}{12} = 178645.83 \text{ см}^4$$

$$I_z = \frac{h^3 \cdot b}{12} = \frac{50^3 \cdot 35}{12} = 364583.33 \text{ см}^4$$

Квадрати радіусів інерції

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{178645.83}{1750} = 102.08 \text{ см}^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{364583.33}{1750} = 208.33 \text{ см}^2$$

Напруження в точці А

$$\sigma = \frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{y \cdot y_F}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_F}{i_y^2} \right] = \frac{6000}{1750} \left[ 1 + \frac{(-25) \cdot (-12)}{208.33} + \frac{17.5 \cdot 20}{102.08} \right] = 20.12 \text{ кг/см}^2$$

### 3. Згин з крученням

Інженерна практика показує, що вали, як правило, працюють не тільки на кручення, але й в умовах згину за рахунок власної ваги та радіальних зусиль, що виникають при передаванні валом потужностей. Питання оцінювання напружено-деформованого стану в цьому випадку ускладнюється такими факторами:

- радіальні зусилля можуть виникати в різних напрямках, що викликає появу згинальних моментів у різних площинах,
- виникнення в одному й тому ж перерізі, перпендикулярному до осі вала, не тільки дотичних напружень від кручення, але й нормальних напружень від згинів у різних площинах (одночасно зауважимо, що дотичними напруженнями, які виникають від згину, можна нехтувати, тому що вони є значно меншими ніж дотичні напруження від кручення).

Перше питання вирішують порівняно просто – всі моменти розбивають на складові відносно, наприклад, горизонтальної та вертикальної площин. Далі будують епюри згинальних моментів у цих площинах і за допомогою геометричного складання по перерізах (10.9) з'ясовують положення перерізу, в якому виникає максимальний згинаючий момент і значення цього моменту.

$$M_z = \sqrt{M_{гор.}^2 + M_{верт.}^2} \quad (10.9)$$

При цьому слід зауважити, що епюри сумарних моментів взагалі можуть мати нелінійний характер, але опуклість графіків буде спрямована у бік осі абсцис. Тобто, максимальних значень цей момент може досягати тільки на межах ділянок, що легко обчислити. Щодо орієнтації площин, в яких діятимуть сумарні згинальні моменти в різних перерізах, то це в більшості випадків не суттєво. Як правило, поперечним перерізом вала вибирають перерізи, де будь-яка центральна вісь є головною (круг, кільце, правильний многокутник).

#### 10.5. Застосування теорій міцності для оцінювання напруженого стану при сумісній дії згину та кручення

Що стосується другого зауваження, то, по-перше, є зрозумілим факт, що небезпечною зоною в перерізі буде зона перетину поверхневого шару вала з площиною, в якій виникає згинаючий момент в цьому перерізі, тому що в ній виникають як найбільші нормальні напруження від згину, так і найбільші дотичні від кручення. По-друге, питання про знаходження найнебезпечнішого перерізу та обчислення моменту в ньому, вирішується за допомогою теорій міцності (зазвичай III-ої теорії, теорії Мора або IV-ої – енергетичної теорії міцності).

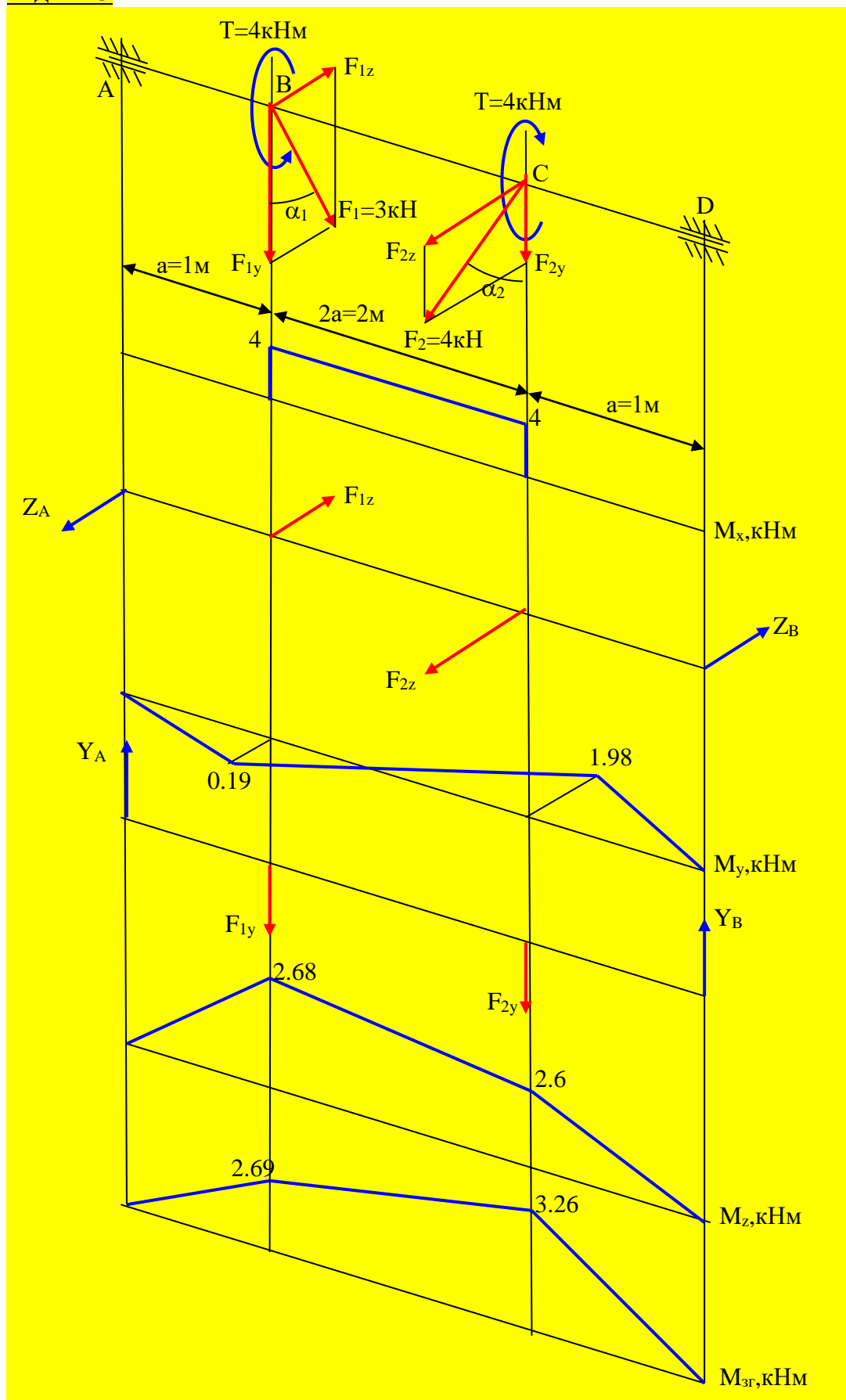
У зв'язку з тим, що розглядається питання сумісної дії нормальних і дотичних напружень, можна зробити висновок, що цей процес відобразиться тими ж залежностями, що й при аналізі складного напруженого стану за повної перевірки на міцність при згині.

Наприклад, розглянемо формулу (8.36) для критерію Мора

$$\sigma_{\alpha_0} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

$$\text{де } m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

### Задача 3



Сумарний згинаючий момент. Переріз В

$$M_{згB} = \sqrt{M_{yB}^2 + M_{zB}^2} = \sqrt{0.19^2 + 2.68^2} = 2.69 \text{ кНм}$$

Сумарний згинаючий момент. Переріз С

$$M_{згC} = \sqrt{M_{yC}^2 + M_{zC}^2} = \sqrt{1.98^2 + 2.6^2} = 3.26 \text{ кНм}$$

Приведений момент по четвертій теорії міцності. Переріз С

$$M_{прC}^{IV} = \sqrt{M_{згC}^2 + 0,75 \cdot M_{xC}^2} = \sqrt{3,26^2 + 0,75 \cdot 4^2} = 4,46 \text{ кНм}$$

Умова міцності

$$\sigma = \frac{M_{пр}^{IV}}{W} \leq [\sigma] \quad (1)$$

Осьовий момент опору

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1)

$$\frac{M_{пр}^{IV} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma]$$

Діаметр валу

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{прC}^{IV} \cdot 32}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{4.46 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.067 \text{ м} = 6,7 \text{ см}$$

## Лекція 11

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### **Загальні теореми про пружні системи. Загальні методи визначення переміщень**

Мета лекції: ознайомлення із загальними методами визначення переміщень

План лекції

- 53. Узагальнена сила та узагальнене переміщення
- 54. Лінійна пружна система
- 55. Теорема Клапейрона
- 56. Принцип можливих переміщень
- 57. Теорема про взаємність робіт
- 58. Теорема Лагранжа
- 59. Теорема Кастіліано
- 60. Інтеграл Мора. Спосіб Верещагіна

Рекомендована література

- 31. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
- 32. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 33. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

## 61. Узагальнена сила та узагальнене переміщення. Лінійна пружна система

Введемо поняття узагальної сили та узагального переміщення.

Узагальнена сила (далі просто – сила) – це сукупність будь-яких силових факторів. Це – і сила, і момент сили, і розподілене навантаження.

Узагальнене переміщення (далі просто – переміщення) – це будь-яке переміщення (формально – це множник при узагальненій силі у виразі роботи). Для моменту переміщенням є кут повороту, бо робота моменту є  $M\varphi$ . Рівномірно розподілене навантаження, прикладене до балки, прогин якої є  $v(z)$ , виконує роботу

$$A = \int qv(z)dz = q \int v dz = q\omega.$$

Тут узагальнене переміщення – це  $\omega$ , тобто площа, заключена між первісною віссю балки та зігнутих її положенням.

### 11.1. Лінійна пружна система

Лінійні пружні системи – це системи, елементи яких працюють у межах закону Гука, з'єднання реалізовані без тертя, а деформації настільки малі, що це дозволяє скласти рівняння статички для недеформованого стану.

За цих умов переміщення і сили зв'язані лінійною залежністю.

Для лінійних систем можна записати

$$P_i = \sum c_{ij} u_j, \quad (11.1)$$

або

$$u_i = \sum \delta_{ij} P_j, \quad (11.2)$$

де величини  $\delta_{ij}$  – коефіцієнти впливу та  $c_{ij}$  – коефіцієнти жорсткості пов'язані співвідношенням

$$c_{ij} = \frac{|\delta_{ji}|}{|\delta|},$$

де  $\delta$  – визначник, загальний елемент якого є  $\delta_{ij}$ , а  $|\delta_{ji}|$  – алгебраїчне доповнення цього елемента.

Визначники  $|\delta|$  та  $|c|$  повинні бути відмінними від нуля.

При цьому неважко показати, що  $c_{ji} = c_{ij}$ , а тому й  $\delta_{ji} = \delta_{ij}$ .

Тобто, матриці коефіцієнтів  $\delta_{ij}$  та  $c_{ij}$  є симетричними.

У лінійній системі напруження можна виразити лінійно через зовнішні сили. Тому потенціальна енергія  $W_p$  в загальному плані являє собою квадратичну форму від сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . В міру цього  $W_p$  є квадратичною формулою від переміщень.

Узагальненим цих понять є вираз

$$W = \frac{1}{2} \sum P_i u_i, \quad (11.3)$$

який носить назву *теорема Клатейрона*.

## 1. Теорема Клапейрона. Принцип можливих переміщень. Теорема про взаємність робіт

Враховуючи (11.1) та (11.2), можна записати

$$W = \frac{1}{2} \sum_i c_i u_i u_i ; \quad (11.4)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \delta_i P_i P_i . \quad (11.5)$$

Неважко пригадати, що розгляд виразу потенціальної енергії для складного напруженого деформованого стану (5.29) підтверджує ці висновки.

### 11.2. Принцип можливих переміщень

Якщо тіло під дією системи зовнішніх сил  $A$  і прикладених у точках з радіусами – векторами  $r_i$  знаходяться у рівновазі, то до цього тіла можна застосовувати принцип можливих переміщень. Треба мати на увазі, що на можливих переміщеннях будуть створювати роботу не тільки зовнішні, але й внутрішні сили.

Запишемо умови рівності нулю роботи сил на можливих, тобто на таких, що не заперечують зв'язкам, переміщеннях деформованого тіла:

$$\sum P_i \delta_i = \delta W . \quad (11.6)$$

У правій частині стоїть зміна пружної енергії, що відповідає даній системі можливих переміщень.

Величину  $\delta W$ , роботу внутрішніх сил в об'ємі  $V$  на можливих переміщеннях можна уявити як

$$\delta W = \int_V \delta \sigma dV , \quad (11.7)$$

де  $\delta \sigma$  – питома елементарна робота внутрішніх сил.

### 11.3. Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті)

Робота сил першої системи на переміщеннях від дії сил другої системи дорівнює роботі сил другої системи на переміщеннях від першої системи сил.

Нехай перша система сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , а друга система  $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ .

Переміщення точки прикладання сили номер  $S$  першої системи від дії сил другої системи

## 1. Теорема Лагранжа. Теорема Кастіліано

$$u_s' = \sum_{i=k+1}^n P_i' \delta_{si} \quad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Аналогічно

$$u_t' = \sum_{i=1}^k P_i' \delta_{ti} \quad (t = k+1, \dots, n).$$

Робота сил першої системи на переміщеннях точок їх прикладання від дві сил другої системи є

$$A' = \sum_{s=1}^k P_s' u_s' = \sum_{s=1}^k \sum_{i=k+1}^n P_s' P_i' \delta_{si}.$$

Аналогічно

$$A'' = \sum_{t=k+1}^n P_t' u_t' = \sum_{t=k+1}^n \sum_{i=1}^k P_t' P_i' \delta_{ti}.$$

Змінюючи порядок сумування та використовуючи симетрію коефіцієнтів  $\delta_{si}$ , отримаємо, що  $A' = A''$ , що й доводить теорему.

### 11.4. Теорема Лагранжа та Кастіліано

Нехай на тіло діють узагальнені сили  $P_1, P_2, \dots, P_n$  і при цьому узагальнені переміщення –  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

Тоді можна вважати

$$W = W(u_1, u_2, \dots, u_n) = W(P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Додамо переміщенням довільних змін  $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$ . При цьому елементарна робота зовнішніх сил дорівнює

$$\sum P_i \delta u_i.$$

Якщо уявити  $W$  через узагальнені переміщення, для варіації  $W$  можна записати

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i.$$

Використовуючи (11.6)

$$\sum \left( P_i - \frac{\partial W}{\partial u_i} \right) \delta u_i = 0 \quad (11.8)$$

Звідки

$$\boxed{P_i = \frac{\partial W}{\partial u_i}}, \quad (11.9)$$

тобто похідна енергії деформації по переміщенню дорівнює силі. Це й є теорема Лагранжа. Якщо ж записати  $W$  як функцію сил,

$$\begin{aligned} W &= W(P_1, \dots, P_n), \\ \Phi &= \sum P_i u_i - W. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Функція  $\Phi$  носить назву доповнюючої роботи. Записуючи варіації  $\Phi$ , отримаємо

$$\delta \Phi = \sum P_i \delta u_i + \sum u_i \delta P_i - \sum \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i.$$

## 1. Інтеграл Мора. Спосіб Верещагіна

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = P_i.$$

Тому

$$\delta \Phi = \sum u_i \delta P_i \quad (11.11)$$

Нехай функція  $\Phi$  виражена тільки через зовнішні сили

$$\Phi = \Phi(P_1; P_2; \dots P_n),$$

тоді

$$\delta \Phi = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \delta P_i.$$

Використовуючи (11.11) та помітивши, що варіації довільні, отримаємо

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \quad (11.12)$$

Ця формула відображає *теорему Кастільяно – похідна енергії деформації по силі дорівнює переміщенню*.

### 11.5. Інтеграл переміщень (інтеграл Мора)

Виходячи з формули Кастільяно, можна вивести формулу для визначення переміщень у стержневих системах, що працюють на розтяг – стиск, кручення та згин.

Запишемо формулу Кастільяно у варіаційній формі

$$\sum u_i \delta P_i = \delta W_p \quad (11.13)$$

Визначатимемо переміщення у точці з номером  $S$ .

Нехай всі сили залишаються незмінними, а варіюється тільки сила  $P_s$ . При цьому вона отримує приріст  $\delta P_s$ . Тоді зміну поздовжньої сили позначимо через  $N_s \delta P_s$ , зміну крутного моменту через  $T_s \delta P_s$ , а згинаючого моменту  $M_s \delta P_s$ . При цьому нехай ці  $N_s$ ;  $T_s$  та  $M_s$  – це відповідно поздовжня сила, крутний та згинальний моменти в т.  $S$ .

У лівій частині рівняння (11.13) отримаємо:

$$u_s \delta P_s.$$

Первісне значення  $W_p \in$

$$W_p = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l}{2EA} + \int_l \frac{T_z^2 dz}{2GI_p} + \int_l \frac{M_z^2 dz}{2EI_z}.$$

При цьому її приріст

$$W_p + \delta W_p = \sum \frac{(N_s + N_s \delta P_s)^2}{2EA} + \dots$$

Нехтуючи квадратом малої величини  $\delta P_s$  та скорочуючи її в (11.13), отримаємо

$$u_s = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N_s l}{EA} + \int_l \frac{T_z T_s dz}{GI_p} + \int_l \frac{M_z M_s dz}{EI_z} \quad (11.14)$$

Обчислення інтеграла Мора можна суттєво спростити у випадку, коли хоча б одна з епюр (для дійсного навантаження або одиничного) складається з прямих ліній і балка має постійну жорсткість ( $EI = \text{const}$ ) по довжині.

Розглянемо фрагмент епюр для якоїсь довільної балки (рис. 11.1)

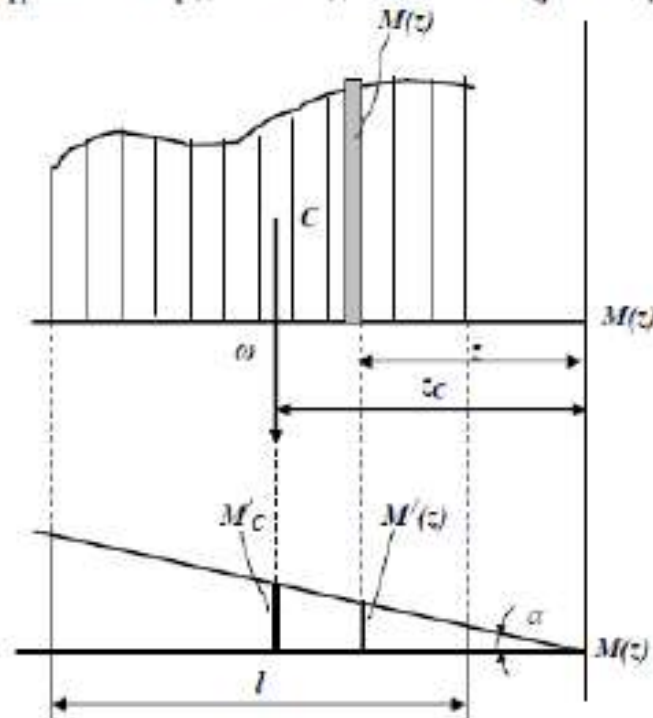


Рис. 11.1. Правило Верещагіна

Тоді інтеграл  $\int_l \frac{M_{(z)} M'_{(z)}}{EI} dz$  можна розглядати таким чином. Вираз  $M_{(z)} dz$  – являє собою диференціал площі епюри  $M_{(z)} - d\omega$ . Тобто,

$$M_{(z)} dz = d\omega.$$

В той же час, в силу прямолінійності епюри від одиничних силових факторів  $M'_{(z)}$

$$M'_{(z)} = z \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Тоді

$$\int_l \frac{M_{(z)} M'_{(z)}}{EI} dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_l z d\omega.$$

Останній інтеграл виражає статичний момент площі  $\omega$  відповідно осі, перпендикулярної до осі  $z$ , тому можна записати, що

## 2. Спосіб Верещагіна

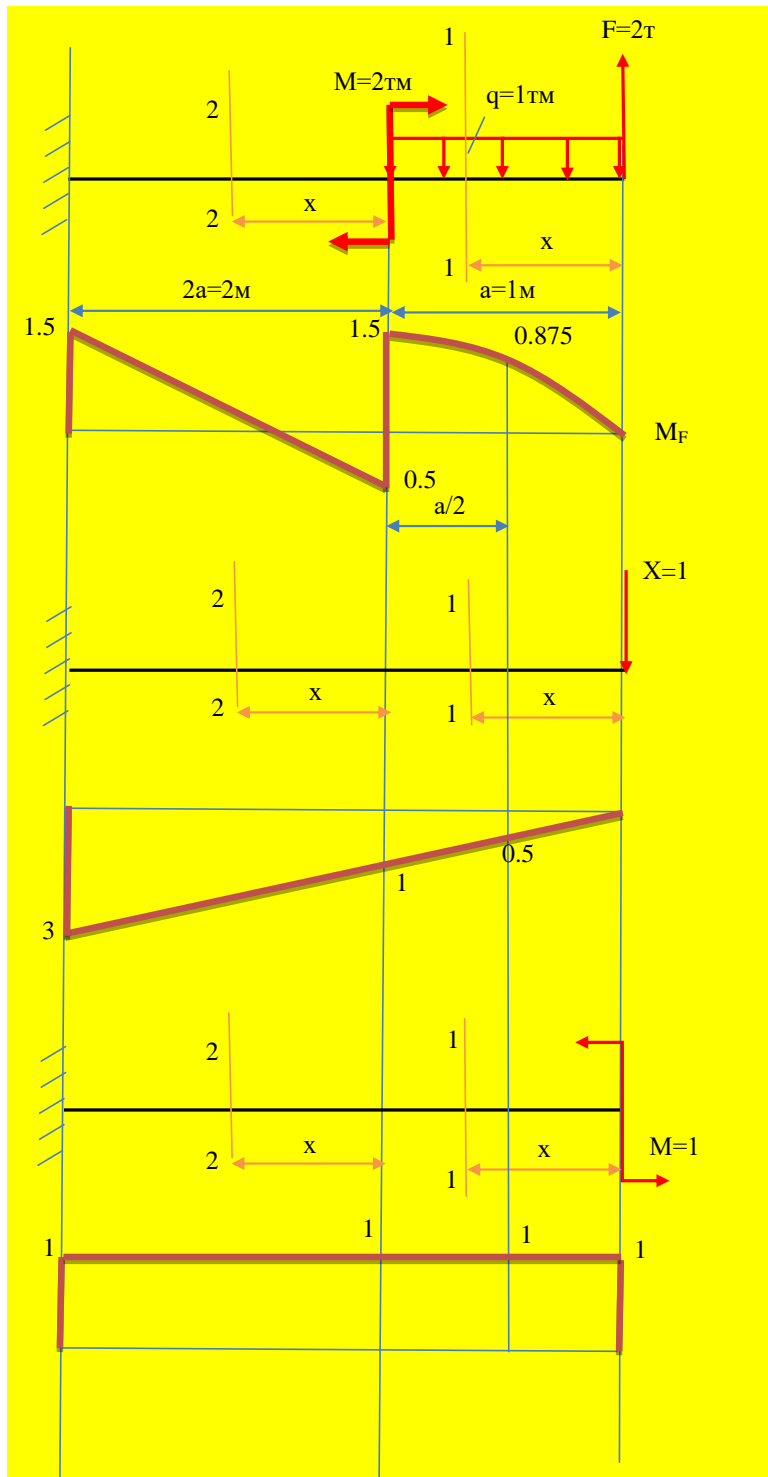
$$\Delta = -\frac{a}{6 \cdot E \cdot I} [1.5 \cdot 1 + 4 \cdot 0.875 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0] + \frac{2a}{6 \cdot E \cdot I} [-2 \cdot 1.5 \cdot 3 + 2 \cdot 0.5 \cdot 1 - 1.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 3] = -\frac{3.21}{E \cdot I}$$

$$\theta = \frac{a}{6 \cdot E \cdot I} [1.5 \cdot 1 + 4 \cdot 0.875 \cdot 1 + 0 \cdot 1] + \frac{2a}{6 \cdot E \cdot I} [2 \cdot 1.5 \cdot 1 - 2 \cdot 0.5 \cdot 1 + 1.5 \cdot 1 - 0.5 \cdot 1] = \frac{1.83}{E \cdot I}$$

Двотавр №24 ( $I_z=3460 \text{ см}^4$ ),  $E=2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$

$$\Delta = -\frac{3,21}{E \cdot I} = -\frac{3,21}{2 \cdot 10^7 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = -0,00464 \text{ м} = -0,464 \text{ см} = -4,64 \text{ мм}$$

$$\theta = \frac{1,83}{E \cdot I} = \frac{1,83}{2 \cdot 10^7 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,00264 \text{ рад}$$



## 1. Інтеграл Мора

Переріз 1-1

$$M_{F1} = F \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 2 \cdot x - \frac{1 \cdot x^2}{2} = 2 \cdot x - 0.5 \cdot x^2$$

$$M_{\Delta 1} = -X \cdot x = -1 \cdot x = -x$$

$$M_{\theta 1} = M = 1$$

Перепіс 2-2

$$M_{F2} = F \cdot (x + a) - q \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + x\right) - M =$$

$$= 2 \cdot (x + 1) - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right) - 2 =$$

$$= 2 \cdot x + 2 - 0.5 - x - 2 = x - 0.5$$

$$M_{\Delta 2} = -X \cdot (a + x) = -1 \cdot (a + x) = -a - x = -1 - x$$

$$M_{\theta 2} = M = 1$$

$$\Delta = \int_0^a \frac{M_{F1} \cdot M_{\Delta 1}}{E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{M_{F2} \cdot M_{\Delta 2}}{E \cdot I} dx =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \int_0^a M_{F1} \cdot M_{\Delta 1} dx + \int_0^{2a} M_{F2} \cdot M_{\Delta 2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \int_0^a (2 \cdot x - 0.5 \cdot x^2) \cdot (-x) dx + \int_0^{2a} (x - 0.5) \cdot (-1 - x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \int_0^a (-2 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x^3) dx + \int_0^{2a} (-x - x^2 + 0.5 + 0.5 \cdot x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \int_0^a (-2 \cdot x^2) dx + \int_0^a (0.5 \cdot x^3) dx + \int_0^{2a} (-x) dx + \int_0^{2a} (-x^2) dx + \int_0^{2a} (0.5) dx + \int_0^{2a} (0.5 \cdot x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{-2 \cdot a^3}{3} + \frac{0.5 \cdot a^4}{4} + \frac{-(2a)^2}{2} + \frac{-(2a)^3}{3} + 0.5 \cdot 2a + \frac{(0.5 \cdot (2a)^2)}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( -\frac{2}{3} + \frac{0.5}{4} - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 0.5 \cdot 2 + \frac{2}{2} \right) = -\frac{3,21}{E \cdot I}$$

$$\theta = \int_0^a \frac{M_{F1} \cdot M_{\theta 1}}{E \cdot I} dx + \int_0^{2a} \frac{M_{F2} \cdot M_{\theta 2}}{E \cdot I} dx =$$

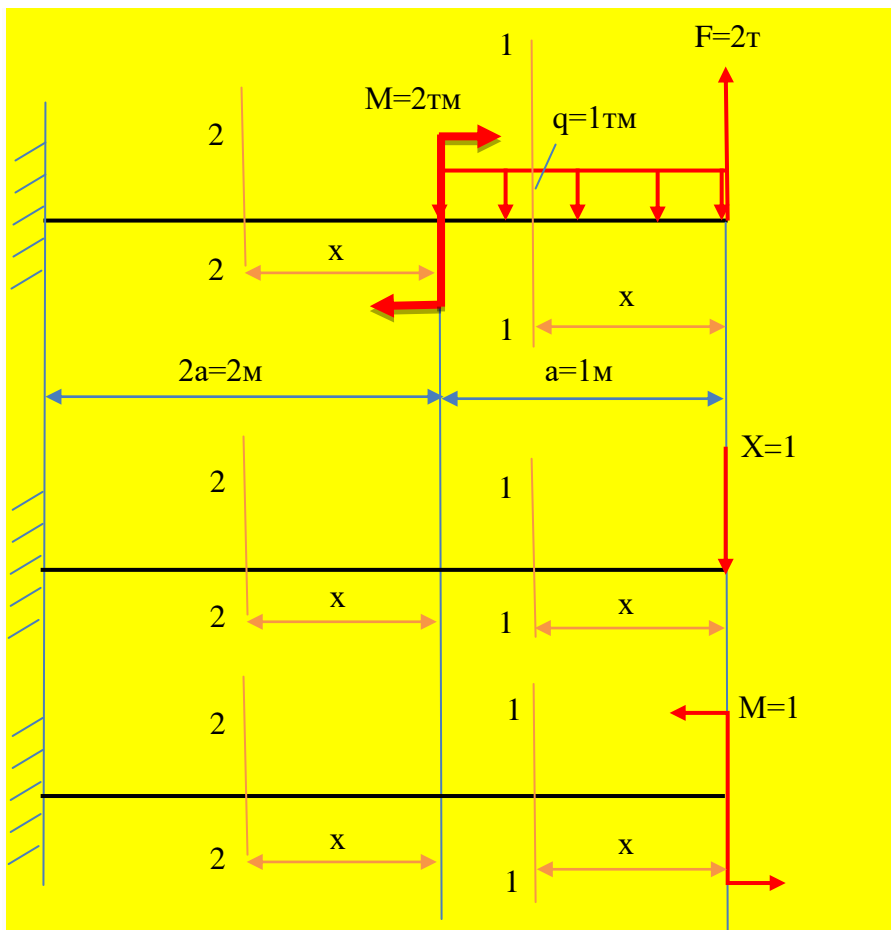
$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \int_0^a M_{F1} \cdot M_{\theta 1} dx + \int_0^{2a} M_{F2} \cdot M_{\theta 2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \int_0^a (2 \cdot x - 0.5 \cdot x^2) \cdot 1 dx + \int_0^{2a} (x - 0.5) \cdot 1 dx \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \int_0^a (2 \cdot x) dx + \int_0^a (-0.5 \cdot x^2) dx + \int_0^{2a} x dx - \int_0^{2a} (0.5) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{2 \cdot a^2}{2} - \frac{0.5 \cdot a^3}{3} + \frac{(2a)^2}{2} - 0.5 \cdot 2a \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{2}{2} - \frac{0.5}{3} + \frac{4}{2} - 1 \right) = \frac{1.83}{E \cdot I}$$



## **Лекція 12**

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### **Статично невизначені системи**

Мета лекції: ознайомлення з послідовністю розкриття статичної невизначеності

План лекції

62. Основи методу сил

63. Канонічні рівняння методу сил

#### **Рекомендована література**

34. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
35. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
36. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

## 64. Основи методу сил

Для визначення ступеня статичної невизначеності плоских систем можна використати формулу

$$S = 3k - m,$$

де  $S$  – ступінь статичної невизначеності;

$k$  – кількість замкнених контурів (за умов повної відсутності шарнірів);

$m$  – кількість шарнірів у перерахунку на одиницю.

Можна виділити такі етапи розв'язку статично невизначеної системи:

1. Встановлюємо ступінь статичної невизначеності (тобто, з'ясовуємо кількість «зайвих» невідомих).

2. Відкидаємо «зайві» зв'язки та замінюємо задану систему на *основну систему* (ту, що отримуємо при відкиданні «зайвих» зв'язків).

3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням та «зайвими» невідомими силами, що замінюють дію відкинутих зв'язків. Така система носить назву *еквівалентної*.

4. При цьому невідомі сили повинні бути підібрані таким чином, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації заданої статично невизначеної системи. Для цього можна прирівняти до нуля переміщення точок, в яких прикладаються «зайві» невідомі за напрямком їх дії. Розв'язуючи ці рівняння, отримуємо значення «зайвих» невідомих.

Наведена система розв'язку носить назву *методу сил*.

### 12.2. Канонічні рівняння методу сил

Допоміжні рівняння переміщень, які виражають рівність нулю переміщень за напрямком зайвих невідомих краще складати у так званій канонічній формі.

Для прикладу розглянемо систему, зображену на рис 12.1а. За «зайвий» зв'язок виберемо шарнірно-рухому опору в т.  $B$ .

Тоді, навантаживши основну систему заданим навантаженням та «зайвою» невідомою  $x_1$  в т.  $B$  (рис.12.1б), прирівнюємо до нуля повне переміщення точки  $B$  основної системи (рис.12.1в) за напрямком дії  $x_1$

$$\Delta_1 = \Delta_1(F, x_1) = 0. \quad (12.1)$$

Застосувавши принцип незалежності дій сил, отримаємо

$$\Delta_1 = \Delta_1(F) + \Delta(x_1).$$

Якщо позначити  $\delta_1$  переміщення за напрямком  $x_1$  від сили  $x_1 = 1$  (рис 12.1д), то

$$\Delta(x_1) = \delta_1 \cdot x_1.$$

Тоді рівняння (12.1) набуває виразу:

$$\delta_1 \cdot x_1 + \Delta_1(F) = 0. \quad (12.2)$$

Звідки:

$$x_1 = -\frac{\Delta_1(F)}{\delta_1}. \quad (12.3)$$

## 1. Канонічні рівняння методу сил

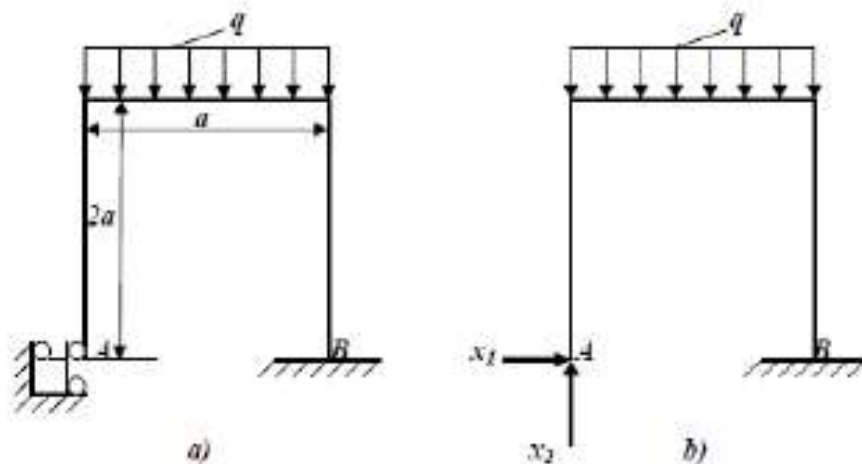


Рисунок 12.2. Вибір «зайвих» невідомих: а) – двічі статично невизначена рама; б) вибір «зайвих» невідомих  $x_1$  та  $x_2$

Це й є система канонічних рівнянь для двічі статично невизначеної системи. Аналогічні рівняння можна записати і для  $n$ -разів статично невизначеної системи.

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_1(F) &= 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_2(F) &= 0; \\ &\dots \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_n(F) &= 0. \end{aligned} \quad (12.6)$$

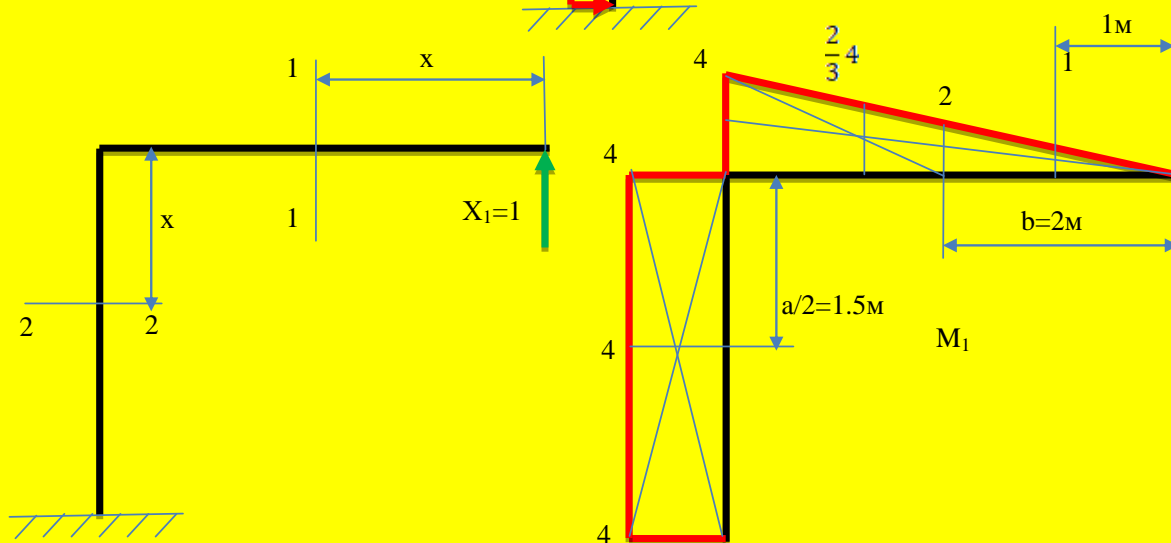
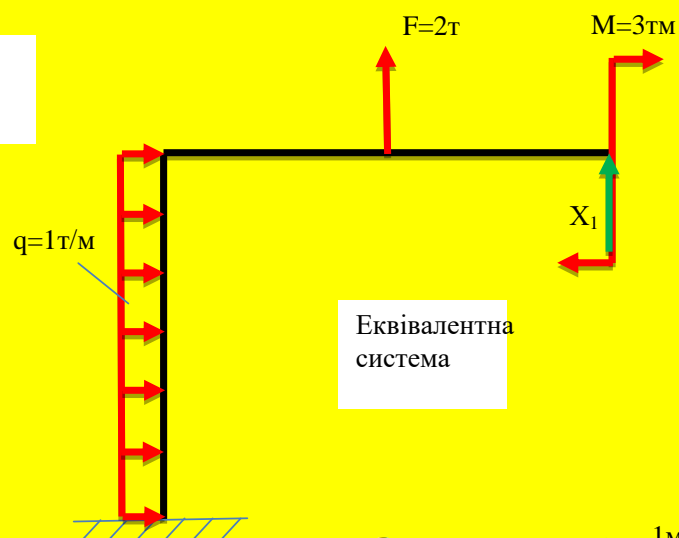
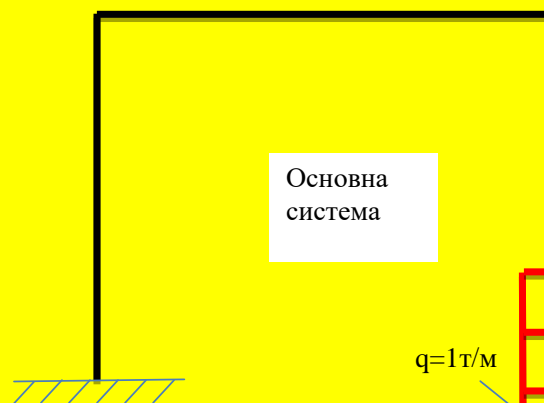
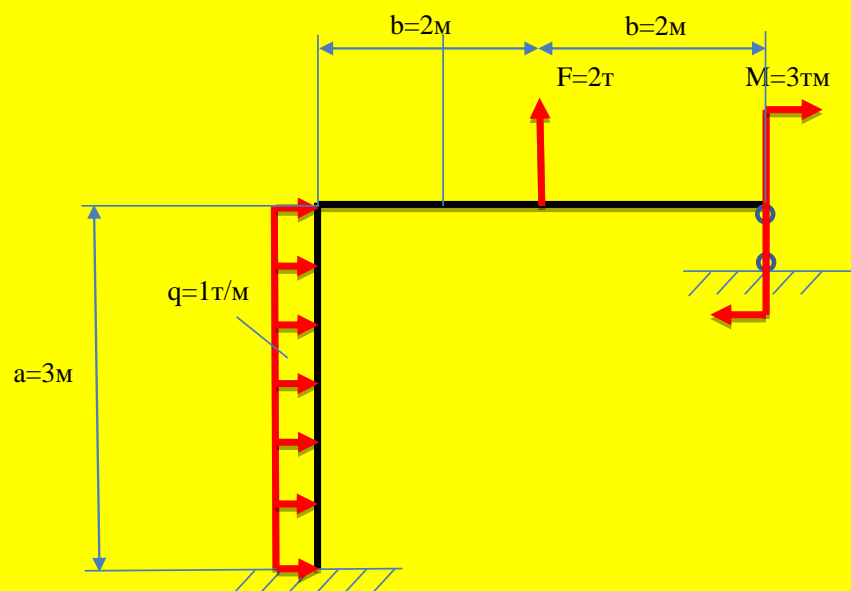
Переміщення  $\Delta_i(F)$  та  $\delta_{ij}$ , що входять у канонічні рівняння, найчастіше визначають за методом Мора або способом Верещагіна.

При цьому слід зауважити, що згідно з теоремою Бетті

$$\delta_{ik} \cdot x_k = \delta_{ki} \cdot x_i,$$

Тому, якщо розглядати випадок, коли  $\delta_{ik}$  та  $\delta_{ki}$  є переміщеннями від одиничних сил, то виходить, що

$$\delta_{ik} \cdot 1 = \delta_{ki} \cdot 1, \quad \text{тобто} \quad \delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (12.7)$$



Переріз 1-1 ( $0 \leq x \leq 4$ )

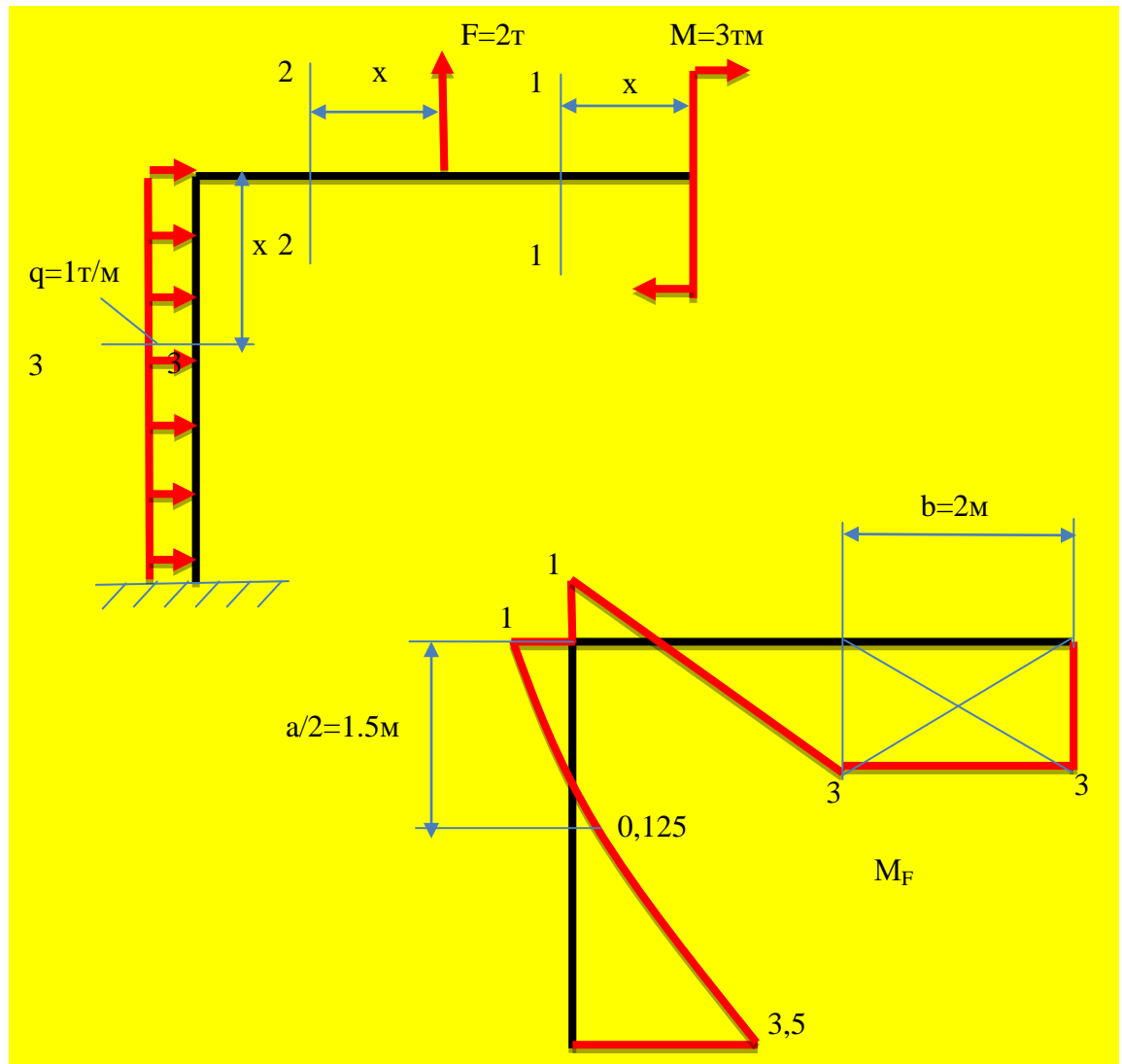
$$M_z = X_1 \cdot x$$

$$M_z(x=0) = 0$$

$$M_z(x=4) = X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$

Переріз 2-2 ( $0 \leq x \leq 3$ )

$$M_z = X_1 \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$$



Переріз 1-1 ( $0 \leq x \leq 2$ )

$$M_z = -M = -3$$

Переріз 2-2 ( $0 \leq x \leq 2$ )

$$M_z = -M + F \cdot x$$

$$M_z(x=0) = -M = -3$$

$$M_z(x=2) = -M + F \cdot 2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1$$

Переріз 3-3  $(0 \leq x \leq 3)$

$$M_z = -M + F \cdot 2 - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_z(x=0) = -M + F \cdot 2 = -3 + 2 \cdot 2 = 1$$

$$M_z(x=1.5) = -M + F \cdot 2 - \frac{q \cdot 1.5^2}{2} = -3 + 2 \cdot 2 - \frac{1 \cdot 1.5^2}{2} = -0.125$$

$$M_z(x=3) = -M + F \cdot 2 - \frac{q \cdot 3^2}{2} = -3 + 2 \cdot 2 - \frac{1 \cdot 3^2}{2} = -3.5$$

Ступінь статичної невизначенності

$$s = 3k - \text{ш} = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

Канонічні рівняння методу сил

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

Коефіцієнти канонічного рівняння

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] + \frac{1}{E \cdot I_z} [4 \cdot 3 \cdot 4] = \frac{69.33}{E \cdot I_z}$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{E \cdot I_z} [3 \cdot 2 \cdot 1] + \frac{2}{6 \cdot E \cdot I_z} [2 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4] +$$
$$+\frac{3}{6 \cdot E \cdot I_z} [1 \cdot 4 - 4 \cdot 0.125 \cdot 4 - 3.5 \cdot 4] = -\frac{16.67}{E \cdot I_z}$$

$$\frac{69.33}{E \cdot I_z} \cdot X_1 - \frac{16.67}{E \cdot I_z} = 0$$

$$69.33 \cdot X_1 - 16.67 = 0$$

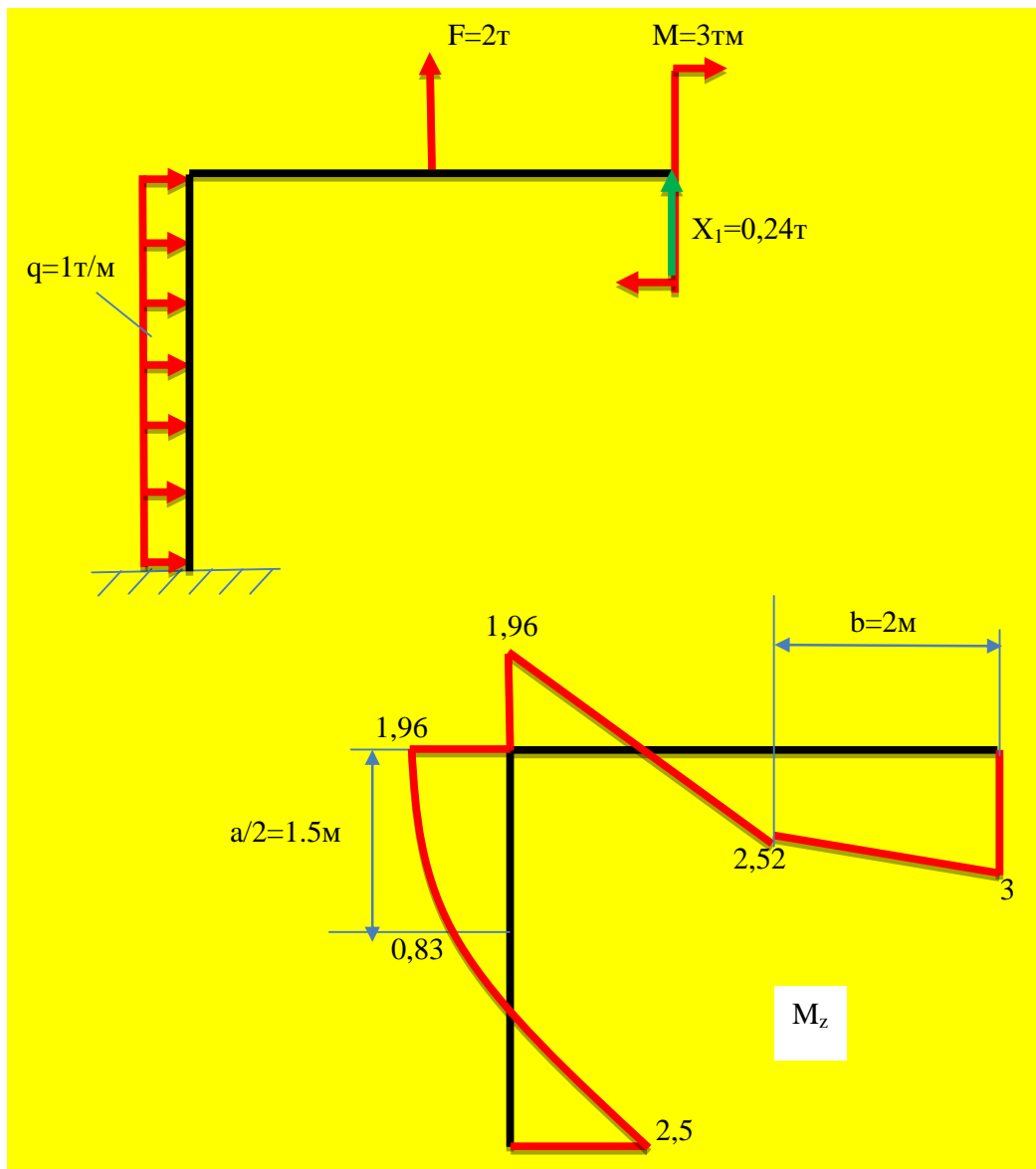
$$X_1 = \frac{16.67}{69.33} = 0.24 \text{ т}$$

Деформаційна перевірка

$$\Delta = -\frac{2}{6 \cdot E \cdot I_z} [2 \cdot 2.52 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 2.52 \cdot 0 + 3 \cdot 2] +$$

$$+\frac{2}{6 \cdot E \cdot I_z} [2 \cdot 1.96 \cdot 4 - 2 \cdot 2.52 \cdot 2 + 1.96 \cdot 2 - 2.52 \cdot 4] +$$

$$+\frac{3}{6 \cdot E \cdot I_z} [1.96 \cdot 4 + 4 \cdot 0.83 \cdot 4 - 2.5 \cdot 4] = -0.06 \approx 0$$



Умова міцності при згині

$$\sigma = \frac{M_{zmax}}{W_z} \leq [\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$$

$$W_z \geq \frac{M_{zmax}}{[\sigma]} = \frac{3 \cdot 10^5}{1600} = 187,5 \text{ см}^3$$

Приймаємо двотавр №20а ( $W_z = 203 \text{ см}^3$ )

Розрахунок перенапруження у випадку, якщо прийняти двотавр №20 ( $W_z = 184 \text{ см}^3$ )

$$\sigma = \frac{3 \cdot 10^5}{184} = 1630,43 \text{ кг/см}^2$$

Перенапруження

$$\frac{1630,43 - 1600}{1600} \cdot 100\% = 1,9\% \leq 5\%$$

## **Лекція 13**

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### **Стійкість стиснутих стержнів**

Мета лекції: ознайомлення з розрахунком на стійкість

План лекції

- 65. Поняття про стійкість стиснутих стержнів
- 66. Формула Ейлера для критичної сили
- 67. Вплив способу закріплення кінців стержня
- 68. Межі застосування формули Ейлера

Рекомендована література

- 37. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
- 38. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 39. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

## 69.Поняття про стійкість стиснутих стержнів

*Поняття про стійкість стиснутих стержнів. Формула Ейлера для критичної сили. Вплив способу закріплення кінців стержня. Можливі застосування формули Ейлера і побудова повного графіка критичних напружень.*

### 14.1. Поняття про стійкість стиснутих стержнів

У попередньому викладі ми визначали поперечні розміри стержнів з умов міцності. Проте руйнування стержня може відбутися не тільки тому, що буде порушена міцність, але і тому, що стержень не збереже тієї форми, яка йому задана конструктором, при цьому зміниться і характер напруженого стану в стержні.

*Стійкість – це здатність елементів конструкцій чинити опір зовнішнім навантаженням, зберігаючи первісну форму рівноваги.*

Найтипівішим прикладом є робота стержня, стиснутого силами  $F$ . До цих пір для перевірки міцності ми мали умову  $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$ ,

де  $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{k_s}$  (для пластичного матеріалу) або  $[\sigma] = \frac{\sigma_a}{k_a}$  (для крихкого матеріалу).

Ця умова припускає, що стержень весь час, аж до руйнування його напруженнями  $\sigma_s$  або  $\sigma_a$ , працює на осьовий стиск. Вже найпростіший досвід показує, що далеко не завжди можливо зруйнувати стержень шляхом доведення напружень стиску до межі текучості або до межі міцності матеріалу.

Якщо ми піддамо поздовжньому стиску тонку дерев'яну лінійку, то вона може зламатися, зігнувшись, причому, перед зломом стискаючі сили, за яких відбудеться руйнування лінійки, будуть значно менші за ті, що викликали б при простому стиску напруження, рівні межі міцності матеріалу. Руйнування лінійки відбудеться тому, що вона не зможе зберегти надану їй форму прямолінійного, стиснутого стержня, а викривиться, що викличе появу згинаючих моментів від стискаючих сил  $F$  і, отже, додаткові напруження від згину – лінійка втрапить стійкість.

Тому для надійної роботи конструкції мало, щоб вона була міцна; треба, щоб всі її елементи були стійкі: вони повинні при дії навантажень деформуватися в таких межах, щоб характер їх роботи залишався незмінним. Тому у багатьох випадках, зокрема, для стиснутих стержнів, крім перевірки на міцність, необхідна і перевірка на стійкість. Для здійснення цієї перевірки треба ближче ознайомитися з умовами, за яких стійкість прямолінійної форми стиснутого стержня порушується.

Візьмемо достатньо довгий в порівнянні з його поперечними розмірами стержень, шарнірно прикріплений до опор (рис. 14.1), і навантажимо його згори центральною силою  $F$ , що поступово зростає. Очевидно, що поки сила  $F$  порівняно мала, стержень зберігатиме прямолінійну форму. При спробах відхилити його убік, наприклад, шляхом прикладання короткочасно діючої горизонтальної сили, він після ряду коливань повертатиметься до первинної прямолінійної форми, як тільки буде знято додаткове навантаження, що викликало відхилення. При поступовому збільшенні сили  $F$  стержень все повільніше повертатиметься до первинного положення при перевірках його стійкості. Нарешті, можна довести силу  $F$  до такої величини, при якій стержень, після невеликого відхилення його убік, вже не випрямиться, а залишиться викривленим. Якщо, не забираючи сили  $F$ , випрямити стержень, він вже, як правило, не зможе зберегти прямолінійну форму. Іншими словами, при цьому значенні сили  $F$ , званому

## 1. Формула Ейлера для критичної сили

Інакше кажучи, навантаження, здатне утримати децю викривлений стержень у рівновазі, теоретично може мати цілий ряд значень. Оскільки відшукуємо (цікаве з практичної точки зору) найменше значення осової стискаючої сили, при якій стає можливим подовжній згин, то слід прийняти  $n = n_{\min}$ .

Перший корінь  $n = 0$  вимагає, щоб  $F_k$  дорівнювала нулю, що не відповідає початковим даним задачі. Тому цей корінь повинен бути відкинутий і найменшим коренем треба взяти значення  $n = 1$ . Але саме можливість цієї величини перевищувати значення "1" можна пояснити, наприклад, той випадок, коли за допомогою потужного преса неможливо втиснути цвях у дерев'яну дошку, в той час, як досвідчений майстер може забити такий цвях одним сильним і точним ударом (запропонувати аудиторії розібратися з цим прикладом).

Тоді отримаємо:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (14.9)$$

Це — так звана формула Ейлера для стиснутого стержня з шарнірно-опертизми кінцями. Значенню критичної сили (14.9) відповідає вигин стержня по синусоїді з однією напівхвилею (14.5)

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad (14.10)$$

Значенням критичної сили вищих порядків відповідають викривлення по синусоїдах з двома, трьома і т.д. напівхвилями (рис. 14.3):

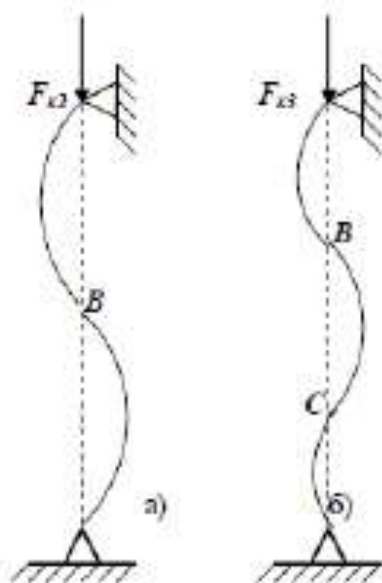


Рис. 14.3. Викривлення осі  
а) при  $n=2$ ; б) при  $n=3$

$$\left. \begin{aligned} F_k &= \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{2\pi}{l}; y = a \sin \frac{2\pi x}{l} \\ F_k &= \frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; k = \frac{3\pi}{l}; y = a \sin \frac{3\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Таким чином, чим більше точок перегину матиме синусоїдально-викривлена вісь стержня, тим більшою повинна бути критична сила. Більш повні дослідження показують, що форми рівноваги, які визначаються формулами (14.11), нестійкі; вони переходять в стійкі форми лише за наявності проміжних опор в точках B і C (рис. 14.3).

Таким чином, поставлена задача розв'язана; для нашого стержня найменшу критичну силу визначають за формулою:

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

а зігнута вісь являє собою синусоїду

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Величина постійної інтегрування "а" залишилася невизначеною; фізичне значення її з'ясується, якщо в рівнянні синусоїди покласти  $x = l/2$ ; тоді  $y_{\max}$  (тобто, посередині довжини стержня) набуде значення

$$y_{\max} = f = a.$$

Тобто,  $a$  — це прогин стержня в перетині посередині його довжини. Оскільки при критичному значенні сили  $F$  рівновага зігнутого стержня можлива за різних відхилень його

## 1. Вплив способу закріплення кінців стержня

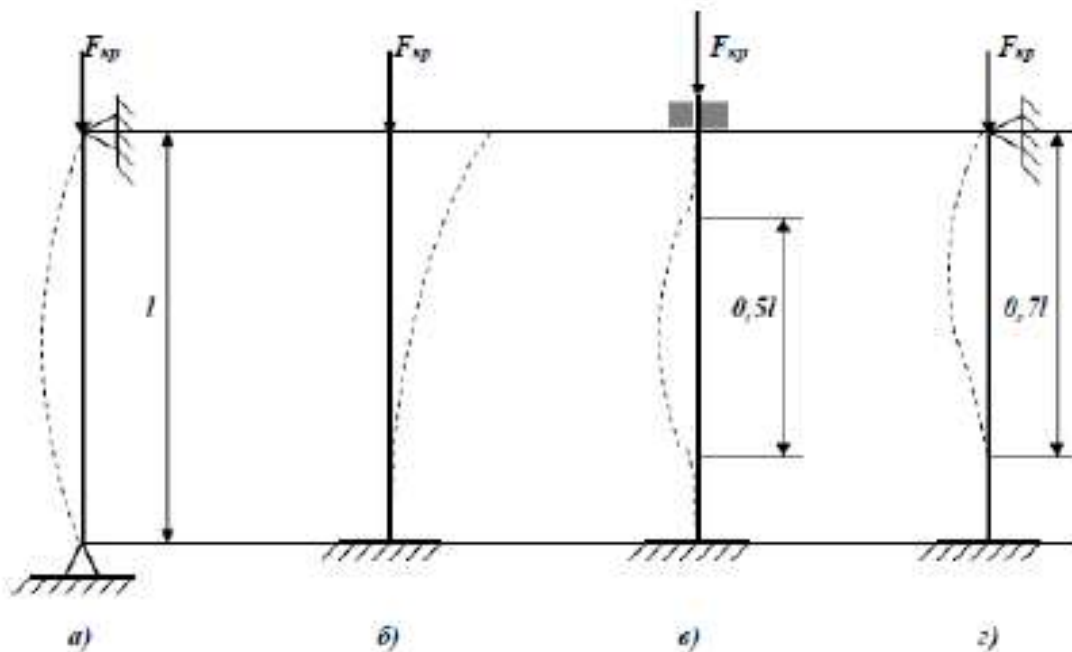


Рис. 14.4. Висин осі при різних способах закріплення:

а) –  $\mu = 1$ ; б) –  $\mu = 2$ ; в) –  $\mu = 0,5$ ; г) –  $\mu = 0,7$

де  $\mu$  — коефіцієнт приведення довжини, що відповідно дорівнює:

- при шарнірних кінцях (основний випадок)  $\mu = 1$ ;
- одному вільному, іншому жорстко защемленому кінцях  $\mu = 2$ ;
- обох жорстко закріплених кінцях  $\mu = 1/2$ .

Для стержня, зображеного на рис.14.4г, з одним жорстко закріпленим, а іншим шарнірно-опертим кінцями, коефіцієнт  $\mu$  приблизно дорівнює  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ , а критична сила:

$$F_k \approx \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2} \approx 2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad (14.15)$$

Величину  $\mu l$  називають *приведеною (вільною) довжиною*. За допомогою коефіцієнта приведення довжини будь-який випадок конкретного виконання опор стержня можна звести до основного. Треба лише при обчисленні гнучкості замість дійсної довжини стержня ввести в розрахунок приведену довжину  $\mu l$ . Поняття про приведену довжину вперше ввів професор Петербурського інституту інженерів шляхів сполучення Ф. Ясинський.

## 1. Межі застосування формули Ейлера

Здавалося б, що одержані в попередніх параграфах результати вирішують задачу перевірки стиснутого стержня на стійкість і залишається вибрати лише коефіцієнт запасу  $k$ . Проте це далеко не так. Найближче ж вивчення числових величин, отриманих за формулою Ейлера, показує, що вона дає правильні результати лише у певних межах.

У таблиці 14.1. наведено величини критичних напружень, обчислених при різних значеннях гнучкості для сталі Ст3, яку, як правило, використовують в металевих конструкціях.

Графічно залежність  $\sigma_k$  від  $\lambda$ , розрахована за формулою (14.12) представлена на рис.14.5. Ця залежність представляється гіперболічною кривою, так званою «гіперболою Ейлера». При використанні цієї кривої треба враховувати, що формулу (14.12) одержано за допомогою інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки, тобто, в припущенні, що напруження в стержні у момент втрати стійкості не перевищують межі пропорційності.

Отже, ми не маємо права користуватися величинами критичних напружень, обчислених за формулою Ейлера, якщо вони виходять більшими за цю межу для даного матеріалу. Інакше кажучи, формулу Ейлера можна застосовувати лише за умови:

$$\sigma_k \leq \sigma_{\text{пр}} \quad \text{або} \quad \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пр}} \quad (14.17)$$

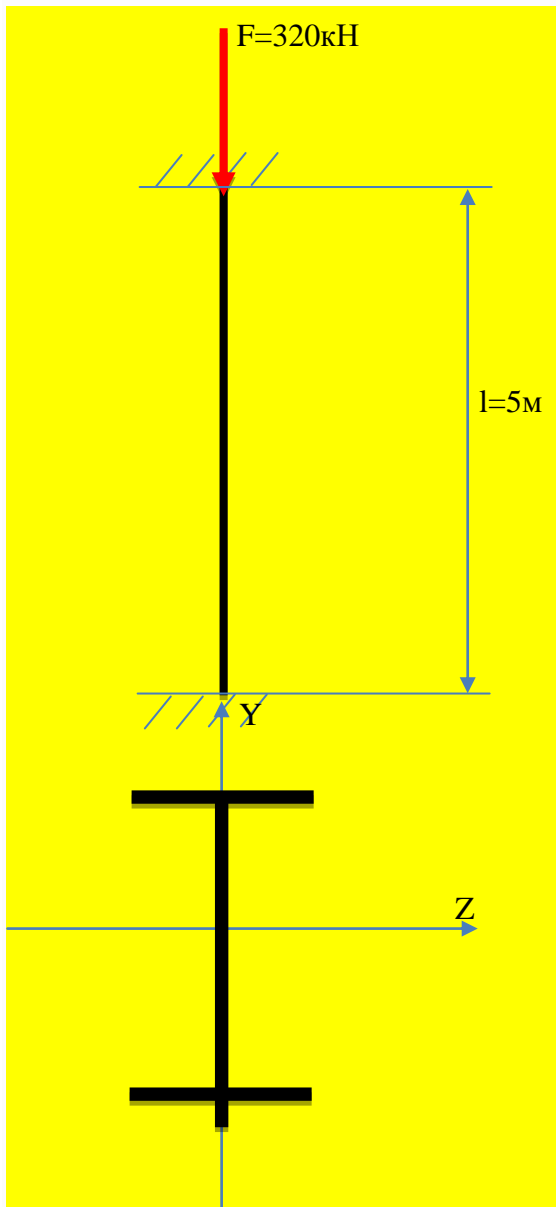
Критичні напруження  $\sigma_k$

Таблиця 14.1.

Значення гнучкості $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Критичні напруження $\sigma_k$ при $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$
150	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(150)^2} = 87,7(\text{МПа})$
100	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(100)^2} = 200(\text{МПа})$
80	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(80)^2} = 330(\text{МПа})$
50	$\sigma_k = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(50)^2} = 800(\text{МПа})$

Якщо з нерівності (14.17) виразити гнучкість  $\lambda$ , то умова можливості використання формули Ейлера одержить інший вигляд:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пр}}}} \quad (14.18)$$



$$[\sigma]=160\text{МПа}$$

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma]$$

Наближення 1 ( $\varphi_1=0,5$ )

$$A = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2$$

Приймаємо двотавр №27 ( $A=40,2 \text{ см}^2$ ,  $i_y=2.54 \text{ см}$ )

Гнучкість

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{0.5 \cdot 500}{2.54} = 98.5$$

$\lambda$	$\varphi$
90	0.69
100	0.6

$$\varphi_1' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{100 - 90} \cdot (98,5 - 90) = 0,614 \geq \varphi_1 = 0,5$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,614}{2} = 0,557$$

Наближення 2 ( $\varphi_2=0,557$ )

$$A = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,557 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36 \text{ см}^2$$

Приймаємо двотавр №24а ( $A=37,5 \text{ см}^2$ ,  $i_y=2.63 \text{ см}$ )

Гнучкість

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{0.5 \cdot 500}{2.63} = 95$$

$\lambda$	$\varphi$
90	0.69
100	0.6

$$\varphi_2' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{100 - 90} \cdot (95 - 90) = 0,645 \geq \varphi_2 = 0,557$$

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,557 + 0,645}{2} = 0,601$$

Наближення 3 ( $\varphi_3=0,601$ )

$$A = \frac{F}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,601 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2$$

Приймаємо двотавр №24 ( $A=34,8 \text{ см}^2$ ,  $i_y=2.37 \text{ см}$ )

Гнучкість

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{0.5 \cdot 500}{2.37} = 105$$

$\lambda$	$\varphi$
100	0.6
110	0.52

$$\varphi_3' = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{110 - 100} \cdot (105 - 100) = 0,56 \geq \varphi_3 = 0,601$$

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_3' \cdot A} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,56 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4}} = 164 \text{ МПа}$$

$$\frac{164 - 160}{160} \cdot 100\% = 2,5\% \leq 5\%$$

## Лекція 14

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### **Елементи теорії тонкостінних оболонок. Розрахунок при ударних навантаженнях**

Мета лекції: ознайомлення з послідовністю розрахунків тонкостінних оболонок та при ударних навантаженнях

План лекції

70. Елементарна теорія удару

71. Загальний метод обчислення напружень при ударі

72. Окремі випадки обчислення напружень і перевірки міцності при ударі

Рекомендована література

40. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.

41. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.

42. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

## 73. Елементарна теорія удару

Явище удару спостерігається у випадку, коли швидкість даної частини конструкції або частин, що до неї дотикаються, змінюється в дуже короткий період часу.

При забиванні палі вантаж падає з деякої висоти на верхній торець палі і занурює її в ґрунт; баба зупиняється майже миттєво, виконуючи удар. Аналогічні явища відбуваються при куванні; удар сприймають і виріб, що кується, і шток молота з бойком, оскільки останній дуже швидко зупиняється при зіткненні з виробом. Під час удару між об'єктами, що співударяються, виникає величезний взаємний тиск. Швидкість ударяючого тіла за дуже короткий проміжок часу змінюється і в окремому випадку падає до нуля, тобто зупиняється. Значить, на нього від деталі, що ударяється, передаються дуже великі прискорення, спрямовані у бік, зворотний його руху, тобто передається реакція  $P_d$ , яка дорівнює добутку маси ударяючого тіла на це прискорення.

Позначаючи це прискорення через  $a$ , можна написати, що реакція  $P_d = \frac{Q}{g}a$ , де  $Q$  — вага ударяючого тіла. По закону рівності дії та протидії на частину конструкції, що ударяється, передається така ж сила, але спрямована в протилежний бік (рис. 15.6). Ці сили і викликають напруження в обох тілах.

Таким чином, у частині конструкції, що ударяється, виникають такі напруження, неналежні до неї була прикладена сила інерції ударяючого тіла. Ми можемо обчислити ці напруження, розглядаючи силу інерції  $P_d$  як статичне навантаження нашої конструкції. Ускладнення полягає в обчисленні цієї сили інерції. Тривалості удару, тобто величини того проміжку часу, в перебігу якого відбувається падіння швидкості до нуля, ми не знаємо. Тому залишається невідомою величина прискорення  $a$ , а, отже, і сили  $P_d$ . Таким чином, хоча обчислення напружень при ударі є частковим випадком задачі обліку сил інерції, проте для обчислення сили  $P_d$ , пов'язаних з нею напружень і деформацій тут доводиться застосовувати інший метод і користуватися законом збереження енергії.

При ударі відбувається дуже швидко перетворення одного виду енергії в інший: кінетична енергія ударяючого тіла перетворюється в потенціальну енергію деформації. Виразивши цю енергію у функції сили  $P_d$  або напружень, або деформацій, отримаємо можливість обчислити ці величини.

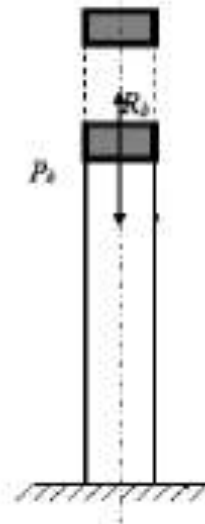


Рис. 15.6. Сили в перерізі, що виникають при ударі

## 1. Загальний метод обчислення напружень при ударі

А. Припустимо, що дуже коротке тіло  $A$  вагою  $Q$ , деформацією якого можна нехтувати, падаючи з деякої висоти  $H$ , ударяє по іншому тілі  $B$ , що спирається на пружну систему  $C$  (рис.15.7). В окремому випадку це може бути падіння вантажу на кінець призматичного стержня, інший кінець якого закріплений (поздовжній удар), падіння вантажу на балку, що лежить на опорах (згинаючий удар), і т.п.

Протягом дуже короткого проміжку часу пружна система  $C$  дещо деформується. Позначимо через  $\delta_s$  переміщення тіла  $B$  (місцевою деформацією якого нехтуватимемо) в напрямі удару. В згаданих окремих випадках при поздовжньому ударі за переміщення  $\delta_s$  відповідно потрібно оцінювати

$A$  поздовжню деформацію стержня  $\Delta l_s$ , при згинаючому ударі — прогин балки  $f_s$  в перетині,

що ударяється, і т.п. У результаті удару в системі  $C$  виникнуть напруження  $p_s$  ( $\sigma_s$  або  $\tau_s$  — залежно від виду деформації).

Вважаючи, що кінетична енергія  $T$  ударяючого тіла повністю переходить у потенціальну енергію  $U_s$ , деформації пружної системи можемо написати

$$T = U_s. \quad (15.12)$$

Оскільки до моменту закінчення деформації ударяюче тіло пройде шлях  $H + \delta_s$ , то його запас енергії вимірюватиметься проведеною їм роботою  $A_s$  і

дорівнюватиме

$$T = A_s = Q(H + \delta_s). \quad (15.13)$$

Обчислимо тепер  $U_s$ . При статичній деформації потенціальна енергія  $U_s$  чисельно дорівнює половині добутку діючої сили на відповідну деформацію

$$U_s = \frac{1}{2} Q \delta_s. \quad (15.14)$$

Статичну деформацію  $\delta_s$  в перетині, що ударяється, можна обчислити за законом Гука, який в загальному вигляді можна записати так:

$$\delta_s = Q : c \quad \text{або} \quad Q = c \delta_s.$$

Тут  $c$  — деякий коефіцієнт пропорційності (званий іноді жорсткістю системи). Він залежить від властивостей матеріалу, форми і розмірів тіла, виду деформації і положення перетину, що ударяється. При простому розтягу або стиску  $\delta_s = \Delta l_s = \frac{Ql}{EA}$  і  $c = \frac{EA}{l}$ , при згині балки, шарнірно закріпленої по кінцях, зосередженою силою  $Q$  посередині прольоту

$$\delta_s = f_{\text{max}} = \frac{Ql^3}{48EI} \quad \text{і} \quad c = \frac{48EI}{l^3}.$$

Таким чином, формулу (15.14) можна переписати так:

$$U_s = \frac{1}{2} Q \delta_s = \frac{c}{2} \delta_s^2.$$

В основі цієї формули лежать дві передумови:

а) — справедливості закону Гука та б) — поступове (від нуля до остаточного значення) зростання сили  $Q$ , напружень  $p_s$  та пропорційних їм деформацій  $\delta_s$ .

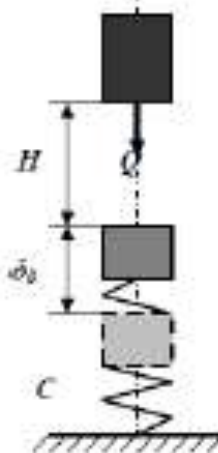


Рис.15.7. Переміщення при ударі

## 1. Окремі випадки обчислення напружень і перевірки міцності при ударі

### 15.7.1. Випадок позовжнього удару.

Вигляд виведених вище формул показує, які великі якісні відмінності тягне за собою кількісна зміна часу дії сили на тіло.

Розглянемо деякі випадки удару при найпростіших деформаціях. При цьому для знаходження коефіцієнта динамічності застосуємо основні формули (15.21) і (15.23).

Для визначення  $\delta_d$ ,  $P_d$  і  $P_0$  використовуємо залежності

$$\delta_d = K_d \delta_s; \quad P_d = K_d P_s; \quad P_0 = K_d Q.$$

У разі позовжнього розтягуючого або стискаючого удару (рис. 15.8)

$$\delta_s = \Delta l_s = \frac{Ql}{EA}; \quad P_s = \sigma_s = \frac{Q}{A};$$

$$U_s = \frac{Q^2 l}{2EA} = \frac{\sigma_s^2 Al}{2E} = \frac{\Delta l_s^2 EA}{2l}$$

Для обчислення динамічного коефіцієнта  $K_d$  можна вибрати один із таких виразів:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_s}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EA}{Q^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_s^2 Al}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_s^2 EA}} \quad (15.27)$$

Після цього без ускладнень обчислимо  $\Delta l_d$ ,  $\sigma_d$  і  $P_d$ .

Наближена формула для обчислення коефіцієнтів динамічності та напружень в даному випадку набуває вигляду:

$$K_d = \frac{1}{\sigma_s} \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{Al}} \quad \text{і} \quad \sigma_d = \sigma_s K_d \sqrt{\frac{2T_0 E}{Al}} \quad (15.28)$$

Відзначимо, що, як при статичному, так і при динамічному навантаженні напруження в стиснутому стержні залежить від величини стискаючої сили і від площі поперечного перетину стержня.

Але при статичній дії вантажу  $Q$  сила, що передається на стержень, дорівнює  $Q$  і не залежить від розмірів і матеріалу стержня, при ударі ж величина сили  $P_d$ , що викликає напруження в стержні, залежить від прискорення, що передається від тіла, що ударяється, на ударяюче, тобто, від величини проміжку часу, протягом якого змінюється швидкість ударяючого тіла. У свою чергу цей проміжок часу залежить від величини динамічної позовжньої деформації  $\Delta l_d$ , від податливості стержня. Чим ця величина більша, тобто чим менше модуль  $E$  і чим більша довжина стержня  $l$ , тим більша тривалість удару, менше прискорення і менше тиск  $P_d$ .

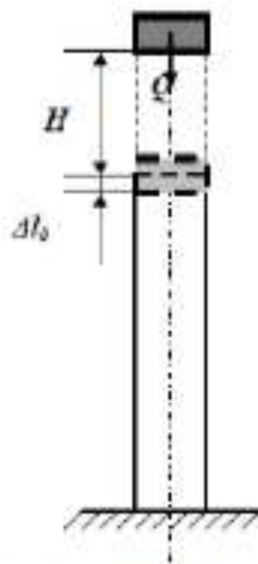


Рис. 15.8. Позовженті удар

Таким чином, при рівномірному розподілі напружень, однаковому в усіх перетинах стержня, динамічне напруження зменшуватиметься зі збільшенням площі поперечного перетину стержня і зі збільшенням його податливості (тобто зі збільшенням довжини і зменшенням модуля пружності  $E$ ), саме тому пом'якшують удар ресори і пружини, розташовані між деталями, що вдаряються. Все це і відображають наведені вище формули. Зокрема, виходячи з формул (15.28), з відомим наближенням можна вважати, що при подовжньому ударі величина напружень залежить вже не від площі, а від об'єму стержня.

Знайшовши за формулами (15.19) і (15.27) або (15.28) величину динамічного напруження, можемо написати умову міцності у вигляді

$$\sigma_d \leq [\sigma_d], \quad (15.29)$$

де  $[\sigma_d]$ —допустима величина нормальних напружень при ударі, яка дорівнює для пластичного матеріалу  $[\sigma_d] = \frac{\sigma_{\text{п}}}{k_p}$ . Величину коефіцієнта запасу  $k_p$  можна б було вибрати такою, яка б дорівнювала величині основного коефіцієнта запасу  $k_s$  при статичній дії навантажень, оскільки динамічність навантаження вже відображена у формулах (15.27) і (15.28). Проте, зважаючи на деяке спрощення висловленого методу розрахунку, цей коефіцієнт приймають дещо підвищеним—до 2. Крім того, зазвичай, у цих випадках застосовують матеріал вищої якості (стосовно однорідності й пластичних властивостей).

### 15.7.2. Згинаючий удар

При згині величина статичної деформації  $\delta_s$ , балки  $f_s$ , що є статичним прогином, в місці удару залежить від схеми навантаження і умов закріплення балки.

Наприклад, для балки з прольотом  $l$ , шарнірно закріпленої по кінцях, що отримує посередині прольоту удар від падаючого з висоти  $H$  вантажу  $Q$  (рис.15.9а), отримаємо:

$$\delta_s = f_{s\max} = \frac{Ql^3}{48EJ};$$

$$P_s = \sigma_{s\max} = \frac{Ql}{4W};$$

$$U_s = \frac{Qf_{s\max}}{2} = \frac{Q^2 l^4}{96EJ}.$$

Для консолі, що отримує удар від вантажу  $Q$ , який падає на вільний кінець консолі (рис.15.9б)

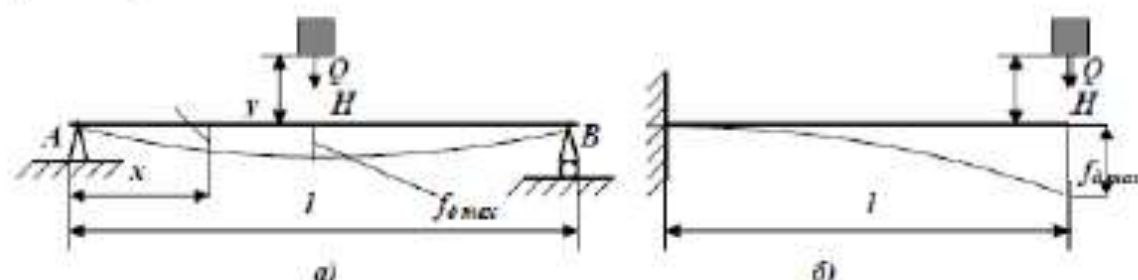


Рис.15.9. Удар при згині: а)— на двоопорній балці; б)— на консолі

### 15.7.3. Удар, що скручує.

Розглянемо тепер задачу визначення напружень при ударі, що скручує. Якщо вал, що обертається, раптово зупиняється гальмуванням одного з його кінців, а на іншому його кінці на нього передається жива сила маховика  $T_0$ , що скручує вал, то напруження також можуть бути визначені вказаним вище методом. Вал скручуватиметься двома парами сил (сили інерції маховика і сили гальмування) з моментом  $M$ . У даному випадку

$$\delta_c = \varphi_c = \frac{Ml}{GJ_p}, \quad p_c = \tau_{c\max} = \frac{M}{W_p}$$

і

$$U_c = \frac{M^2 l}{2GJ_p} = \frac{\tau_{c\max}^2 l W_p^2}{2GJ_p} = \frac{\varphi_{c\max}^2 GJ_p}{2l},$$

тому

$$\delta_s = \varphi_s = K_s \varphi_c = \varphi_c \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 l}{GJ_p}}$$

і

$$p_s = \tau_{s\max} = K_s \tau_{c\max} = \tau_{c\max} \sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 GJ_p}{l W_p^2}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 l G}{Al}},$$

оскільки

$$J_p = \frac{\pi^4}{2}, \quad W_p = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{та} \quad \frac{J_p}{W_p^2} = \frac{2}{\pi^2} = \frac{2}{A}.$$

Маючи на увазі, що жива сила маховика  $T_0$  дорівнює

$$T_0 = \frac{J_0}{2} \omega^2,$$

де  $J_0$  — момент інерції маси маховика, а  $\omega$  — кутова швидкість, можна записати

$$\tau_{s\max} = \omega \sqrt{\frac{2J_0 G}{Al}}. \quad (15.35)$$

## **Лекція 15**

Вид лекції: ознайомча

Кількість годин, передбачених робочою програмою: 2 год

Тема лекції:

### **Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень**

Мета лекції: ознайомлення з послідовністю розрахунків при повторно-змінних напруженнях

План лекції

- 74. Явище втоми матеріалів
- 75. Методи визначення межі витривалості
- 76. Симетричні та несиметричні цикли
- 77. Діаграми втоми
- 78. Діаграма граничних напружень

Рекомендована література

- 43. Деревенько І. А. Опір матеріалів. Частина 1 / І. А. Деревенько, Р. І. Сивак. – ВНАУ, 2020. – 308 с.
- 44. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.
- 45. Мильніков О.В. Опір матеріалів. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2010. – 257с.

## 79. Явище втоми матеріалів

Опір матеріалів дії навантажень, змінних у часі за величиною або за знаком, істотно відрізняється від опору дії статичного навантаження. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються за значно меншими рівнями напружень, ніж під дією статичних навантажень. Типовим прикладом деталі, що знаходиться під дією змінних навантажень, є шток поршневої машини, знак напружень в якому змінюється відповідно до зміни напрямку руху поршня.

Практикою встановлено: якщо елемент конструкції багато разів піддавати змінному навантаженню певного рівня, то після деякого числа змін напружень у ньому з'явиться тріщина, яка поступово розвиватиметься. Врешті-решт деталь руйнуватиметься, не маючи при цьому помітних залишкових деформацій навіть у випадку, коли її матеріал високопластичний.

Число циклів до появи першої тріщини і до повного руйнування стержня буде тим більше, чим менше напруження. Характерно, що руйнування матеріалу під дією повторно змінних навантажень може відбутися при напруженнях, нижчих від межі текучості. Руйнування матеріалу під дією повторно змінних напружень називають *руйнуванням від втоми* (втомлю).

*Взагалі ж втомленістю (або втомлю) матеріалу (зокрема, металів) називають явище руйнування в результаті поступового накопичування в них пошкоджень, що призводять до виникнення втомної тріщини при багатократному повторенні навантажень.*

Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно змінних напружень називають *витривалістю* матеріалу.

Вивчення питань втоми матеріалів має надзвичайно велике значення. Такі відповідальні деталі, як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни двигунів, веслувальні гвинти, клапанні пружини, повітряні гвинти, поршнєві пальці й багато інших деталей виходять з ладу в основному внаслідок руйнувань втомного характеру.

Втомне руйнування спостерігається за наявності однієї з таких двох особливостей додатку навантаження:

- 1) багатократного додатку навантаження одного знака, наприклад, періодичного, що змінюється від нуля до максимуму (рис.16.1а);
- 2) багатократного повторення навантаження, що періодично змінюється не тільки за величиною, але й за знаком (знакозмінного навантаження), коли на витривалість матеріалу одночасно впливають і повторність, і змінність навантаження. При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (рис.16.1б) й зміну навантаження за несиметричним циклом (рис.16.1в,г).

Для руйнування від втоми недостатньо змінності напружень. Необхідно також, щоб напруження мали певну величину.

*Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якій довільно великій кількості повторень змінних напружень, називають межею витривалості або межею втоми.*

Злам деталі від втоми має характерний вигляд. На ньому майже завжди можна спостерігати дві зони. Одна з них гладка, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини, інша — грубозерниста, утворилася при остаточному зламі послабленого

## 1. Методи визначення межі витривалості. Діаграми втоми

Щоб визначити межу витривалості того або іншого матеріалу, потрібно на відповідній випробувальній машині випробувати партію зразків з даного матеріалу в кількості не менше 6–12 шт. Для цього найчастіше беруть гладкі циліндричні зразки діаметром 7–10 мм.

Межі витривалості матеріалу при вибраній характеристиці циклу  $r$ , зрозуміло, будуть різними залежно від виду деформації, при якій випробовують зразки, тобто, в залежності від того, при змінних напруженнях розтягу-стиску, змінному крученні, згині або в умовах складного напруженого стану їх випробовують. Тому, ставлячи перед собою мету отримання межі витривалості, слід наперед вказати, при якому виді деформації і характері зміни напруження за цикл вимагається визначити межу витривалості.

Відповідно до поставлених вимог вибирають необхідну випробувальну машину. В принципі при випробуванні за умов згину ця машина являє собою пристрій, схожий на токарний верстат з двома шпинделями, осі яких розташовані під певним кутом (що регулюється) одна до другої. Крім того, ця машина обов'язково повинна бути обладнана лічильником циклів.

В лабораторних умовах симетричний цикл здійснити найпростіше. При обертанні зразка його зовнішні волокна сприйматимуть поперемінно то розтяг (коли вони розташовані знизу), то стиск (при повороті зразка на  $180^\circ$ ).

Кількість обертів за хвилину найпоширеніших втомних машин зазвичай – 3000 об/хв (частота 50 Гц). Тому випробування на втомленість з метою отримання межі витривалості вимагає тривалого часу, обчислюваного тисячами безперервної роботи машини. За останній час у багатьох випадках при дослідженні витривалості матеріалів і конструктивних деталей застосовують більш швидкохідні машини – 100–500 Гц, а в деяких випадках і 20000 Гц (ультразвукові частоти). В останньому випадку для випробування потрібні тільки десятки хвилин.

При випробуванні партії зразків з метою отримання межі витривалості необхідно давати такі навантаження на окремі зразки, щоб вони руйнувалися, витримавши різну кількість циклів навантаження.

### 1. Діаграма граничних напружень

Щоб охарактеризувати здатність опору матеріалу дії змінних напружень з різною асиметрією циклу, будують так звану діаграму граничних напружень (рис 16.5). В ній по осі абсцис відкладають середнє напруження циклу  $\sigma_r$ , а по осі ординат — найбільше  $\sigma_{max}$  і найменше  $\sigma_{min}$  напруження циклу (діаграма Сміта). Їх граничні значення  $\sigma_{rmax}$ ,  $\sigma_{rmin}$ ,  $\sigma_r$  визначають за даною характеристикою циклу дослідним шляхом у результаті побудови кривих втомленості.

Зазвичай починають із симетричного циклу ( $r = -1$ ). Граничним напруженням у цьому випадку буде межа витривалості  $\sigma_{-1}$ . Отже,

$$\sigma_{-1max} = \sigma_{-1}, \quad \sigma_{-1min} = -\sigma_{-1}, \quad \sigma_{-1} = 0.$$

Цьому циклу на діаграмі відповідають точки  $A$  і  $A'$  на осі ординат.

Випробувавши партію зразків з даного матеріалу при певному значенні характеристики циклу  $r = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ , визначимо найбільше і найменше значення напружень, при яких матеріал працює на межі витривалості  $\sigma_r$ , тобто

$$\sigma_{rmax} = \sigma_r; \quad \sigma_{rmin} = r \sigma_r; \quad \sigma_r = \frac{\sigma_{rmax} + \sigma_{rmin}}{2}.$$