

Міністерство аграрної політики України

Вінницький національний аграрний університет

Кафедра вищої математики, інформатики
та математичних методів в економіці

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ САМОСТІЙНОЇ
РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів всіх спеціальностей ВНАУ

Вінниця-2011

УДК 517

Методичне забезпечення самостійної роботи студентів з вищої математики. Навчально-методичний посібник для студентів всіх спеціальностей /Дубчак В.М.- Вінниця: ВНАУ, 2011.-162 с.

Укладач:

Дубчак В.М., к.т.н., доцент кафедри
вищої математики, інформатики та
математичних методів в економіці

Рецензенти:

Михалевич В.М., д.т.н., професор, зав. кафедрою
вищої математики ВНТУ,
Джеджула О.М., д.п.н., професор кафедри ЗТД
ВНАУ

Коротка анотація

Посібник містить перелік типових стандартних практичних завдань з вищої математики, по кожному з яких пропонується 100 незалежних варіантів, з метою організації самостійної, домашньої, розрахунково-графічної роботи. Матеріали посібника можуть бути використані для організації роботи студентів всіх спеціальностей університету, які вивчають основи вищої математики.

НАУКОВО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ
Рекомендовано науково-методичною радою
Вінницького національного аграрного університету
Протокол № ____ від «__» _____ 2011 р.

ЗМІСТ

Вступ	4
Короткий теоретичний курс	5
Модуль 1	
1. Системи алгебраїчних рівнянь, методи їх розв'язку	58
2. Вектори, типи добутку векторів	70
3. Пряма на площині	83
4. Площина в просторі	84
Модуль 2	
5. Границі функцій, розкриття неозначених границь	90
6. Похідні функцій, їх обчислення	123
Модуль 3	
7. Дослідження функцій і побудова їх графіків методами диференціального числення	142
8. Неозначений інтеграл, методи інтегрування функцій	147
Література	162

ВСТУП

Навчальний посібник призначений для організації самостійної, домашньої, розрахунково-графічної роботи студентів всіх спеціальностей, в навчальній програмі яких присутні початкові розділи вищої математики, такі як лінійна алгебра, аналітична геометрія, теорія неозначених границь, основи диференціального та інтегрального числення. В роботі приведені короткі теоретичні матеріали, а по кожному із наведених завдань пропонується по 100 незалежних варіантів для організації самостійного розв'язку. В кінці роботи приведено перелік рекомендованої літератури для виконання даних завдань.

Розділ 1

Лінійна алгебра

1.1 Матриці. Дії над матрицями. Визначники.

Матрицею розмірів $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, які розташовані в m рядках і n стовпцях та називаються елементами матриці.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

де a_{ij} – елементи матриці, i – номер рядка, j – номер стовпця

Множення матриці на число:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сума (різниця) двох матриць:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & \dots & a_{3n} \pm b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$$

* Дана дія виконується тільки для матриць однакової розмірності.

Добуток двох матриць:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, \text{ де } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

* Дана дія можлива тільки при умові, якщо кількість рядків першої матриці відповідає кількості стовпцям другої матриці.

Транспонування матриці:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Визначник матриці другого порядку:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Визначник матриці третього порядку (правило трикутників):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Теорема розкладання:

Якщо A – квадратна матриця, то її визначник дорівнює сумі добутків елементів будь – якого стовпця (рядка) на їх алгебраїчне доповнення.

*Теорема розкладу дає можливість обчислювати визначники вищих порядків.

Обернена матриця:

Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до квадратної невинродженої матриці A , якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1

Знайти значення виразу $Y = -3A + B^T$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Розв'язок.

$$Y = -3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -15 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -15 & -23 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2

Знайти добуток двох матриць $C \cdot D$, де

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) & 1 \cdot (-4) + 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 2 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot (-4) + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & (-1) \cdot 7 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 0 \cdot (-4) + 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 2 & 0 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ -1 & 0 & -13 \\ -2 & 4 & -15 \end{pmatrix}$$

Приклад 3

Знайти: $\det A$, $\det D$.

Розв'язок.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 5 = 29;$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 7 + (-4) \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot 7 - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) \cdot (-3) =$$

$$= 18 + 14 - 14 - 12 = 6$$

Приклад 4

Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язок.

Обчислимо:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5. \quad \det A \neq 0 \quad \text{— обернена матриця існує.}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1} , побудована нами, справді є оберненою до матриці A . Знайдемо AA^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 1.

1. Знайти значення виразу:

$$X = A^T - 4B$$

2. Знайти добуток двох матриць: $D \cdot C$

3. Знайти $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det D$.

($\det C$, $\det D$ визначити двома способами:

методом трикутників та за теоремою розкладу)

4. Знайти обернені матриці A^{-1} , B^{-1} , C^{-1} , D^{-1} та зробити перевірку.

Варіанти завдань для самостійного виконання.

$$1. A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 6 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -6 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
5. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
6. A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
7. A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
8. A &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
9. A &= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
10. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
11. A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 3 & 8 & -1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
12. A &= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
13. A &= \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
14. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 9 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\
15. A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 8 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
16. A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
17. A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\
18. A &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
19. A &= \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 6 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\
20. A &= \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -6 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
21. A &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22. A &= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
23. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
24. A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
25. A &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
26. A &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -7 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
27. A &= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\
28. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
29. A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 3 & 8 & -1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
30. A &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.2 Системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язків.

Система лінійних рівнянь - сукупність скінченної кількості лінійних рівнянь, розв'язком яких вважають точку, що є розв'язком кожного її рівняння. Зокрема, систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними (невідомими) записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

де a_{ij} і b_i - задані коефіцієнти системи. Числа b_i називають також вільними членами системи.

1. Метод Крамера.

Формули Крамера для системи (1) мають вигляд:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}, \text{ де}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ - визначник системи (1), а}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \text{ - визначники, які дістають з}$$

визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Приклад 1.

Користуючись формулами Крамера, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 3x + y - 3z = -8 \\ 3x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Розв'язок. Обчислимо визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 41, \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -41,$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 82$$

Тоді за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1,$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{41} = 0,$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2$$

Таким чином, $x = -1$, $y = 0$, $z = 2$ - розв'язок системи.

2. Матричний метод

Система лінійних рівнянь можна записати у вигляді матричної рівності

$$A \cdot X = B$$

де A - квадратна матриця n - порядку, складена з коефіцієнтів при невідомих, X - матриця розмірності $(n \times 1)$, складена з невідомих; B - матриця розмірності $(n \times 1)$, складена з вільних членів.

Розв'язком не виродженої системи лінійних рівнянь записаної у вигляді матричної рівності знаходять за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Приклад 2

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

методом оберненої матриці.

Розв'язок

Запишемо систему в матричному вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A обернену ми побудували в попередньому прикладі, тому маємо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \\ 2 - \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \\ 0 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ — розв'язок системи.

Завдання 2

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера.
2. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом.
3. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

Варіанти завдань для самостійного виконання.

$$1. \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2y - z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -x + y + 2z = 5 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + 2z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 4y - 6z = -11 \\ 2x - 7y + 5z = 8 \\ 6x + 3y - 2z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 2 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 4x + 2y - 3z = -5 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y - 2z = 3 \\ x + 3y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ x - 3y + 2z \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 5x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 2y - 2z = 3 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x + 4y - z = -4 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ -x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 3y - 8z = -7 \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x + y + 4z = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ -x + y - 2z = -4 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ y + z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + y = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \\ 3x - 2y + 5z = 20 \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - 2y - 2z = -11 \\ -x + 5z = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} 5x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 2z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ x - 3y + 2z = -2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ x - 3y + 2z = -2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ -x + y - 2z = -4 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2y - z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y + 2z = 5 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + 2z = -2 \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y - 6z = -11 \\ 2x - 7y + 5z = 8 \\ 6x + 3y - 2y = 18 \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} 4x + y - 3z = 2 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y - z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} -2x + y - 2z = 3 \\ x + 3y + z = 2 \\ 3x - y + 2y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 2y - 3z = -5 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ x - 3y + 2z \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x - 2y - 2z = 3 \\ -x + y + z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y - z = -4 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ -x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$25. \quad \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 3y - 8z = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$26. \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ -x + y - 2z = -4 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x + y + 4z = 17 \end{cases}$$

$$27. \quad \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 6 \\ x - 2y + z = 2 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

$$28. \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \\ 3x - 2y + 5z = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + y = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - 2y - 2z = -11 \\ -x + 5z = 16 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 3z = -1 \\ .3x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y + 3z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 2z = -4 \end{cases}$$

Розділ 2

Аналітична геометрія

2.1. Вектори, типи добутків векторів та методи їх розв'язування.

До лінійних належать такі операції над векторами:

- множення вектора на скаляр $\alpha \in R$. При цьому одержаний вектор $\alpha \vec{a}$ геометрично, залежно від величини і знака α , розтягується, стискається, змінює напрям ($\alpha < 0$);
- додавання векторів. Дія виконується за правилом паралелограма або трикутника.

Якщо вектор задано в координатній формі, то у разі множення його на скаляр всі координати треба помножити на цей скаляр, а в разі додавання — додати відповідні його координати.

Скалярного добутку векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |b| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$;

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\text{Кут } \varphi \text{ між векторами: } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

умови паралельності $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ та перпендикулярності $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ двох векторів.

За використання векторного добутку слід пам'ятати, що він некомутативний, а його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах-множниках. Знаходять векторний добуток за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Геометричний зміст мішаного добутку полягає в тому, що його модуль дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах добутку.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

У зв'язку з цим його часто використовують для знаходження об'єму і перевірки компланарності трьох векторів

Приклад 1.

Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{q}| = 3$ і $\widehat{\vec{p}\vec{q}} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язок.

З визначення операції додавання векторів відомо, що одна діагональ паралелограма $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 6\vec{p} - \vec{q}$, а друга $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$. Довжина довільного вектора визначається за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$. Тоді:

$$|d_1| = \sqrt{(6\vec{p} - \vec{q})^2} = \sqrt{36(\vec{p})^2 - 12\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2} = \sqrt{36(2\sqrt{2})^2 - 12 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos \frac{\pi}{4} + 9} = 15;$$

$$|\vec{d}_2| = \sqrt{(4\vec{p} + 5\vec{q})^2} = \sqrt{16\vec{p}^2 + 40\vec{p} \cdot \vec{q} + 25\vec{q}^2} = \sqrt{16 \cdot (2\sqrt{2})^2 + 40 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos \frac{\pi}{4} + 25 \cdot 9} = \sqrt{593}.$$

Приклад 2.

Дано три послідовні вершини паралелограма: $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Знайти його четверту вершину D і кут між діагоналями.

Розв'язок.

Нехай шукана вершина має координати $D(x, y, z)$. З умови колінеарності векторів \vec{AD} і \vec{BC} маємо: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = z$, або $x = 2z - 3$; $y = 3z - 2$. Згідно з властивостями паралелограма $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$ або $\sqrt{4z^2 + 9z^2 + z^2} = \sqrt{14} \Rightarrow z = 1$; $x = -1$; $y = 1$; $D(-1; 1, 1)$. Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно сумі і різниці векторів-сторін $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB} = (8; 2; 2)$; $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = (-4; 4; 0)$. Кут між діагоналями знайдемо за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{BD}|}{|\vec{AC}| |\vec{BD}|} = \frac{-32 + 8}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{32}} = -\frac{1}{2}; \text{ отже, } \varphi = 120^\circ.$$

Приклад 3.

Знайти площу паралелограма, діагоналями якого є вектори $2\vec{m} - \vec{n}$ і $4\vec{m} - 5\vec{n}$, де \vec{m} і \vec{n} — одиничні вектори, а кут між ними дорівнює 45° .

Розв'язок.

Позначимо через \vec{a} і \vec{b} сторони паралелограма, тоді $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$, звідки $\vec{a} = 3\vec{m} - 3\vec{n}$; $\vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}$. Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\text{Отже, } S = |(3\vec{m} - 3\vec{n}) \times (-\vec{m} + 2\vec{n})| = 3|m \times n| = 3 \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 4.

Знайти площу і висоту BD трикутника, вершинами якого є: $A(1; -2; 8)$; $B(0; 0; 4)$; $C(6; 2; 0)$

Розв'язок

Знайдемо вектори $\vec{AB} = (-1; 2; -4)$ і $\vec{AC} = (5; 4; -8)$. Модуль їх векторного добутку буде дорівнювати подвоєній площі трикутника:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}; \text{ звідки } s = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 7\sqrt{5}.$$

$$\text{Знайдемо висоту трикутника: } |\vec{AC}| = \sqrt{105}; \quad h = \frac{2s}{|\vec{AC}|} = \frac{2}{3} \sqrt{21}.$$

Приклад 5.

Для піраміди з вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ обчислити об'єм, площу грані ABC і висоту, опущену на цю грань.

Розв'язок.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AO} = (-5; -2; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-4; 0; 4)$. Модуль мішаного добутку $|\overrightarrow{AO} \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = \left| \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| = 84$ у шість разів більший за об'єм піраміди, побудованої на векторах \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , тобто $V_{\text{пір}} = 14$ куб.од. Для обчислення площі гра-
ні ABC знайдемо $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| = 12\sqrt{3}$. Тоді $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$, а висота піраміди $h = \frac{3V}{S} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Варіанти завдань для самостійного виконання.

1. Знайти кут між векторами $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
2. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ і $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ будуть перпендикулярними, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
3. Визначити кути трикутника з вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ і $C(0; 0; 5)$.
4. У трикутнику з вершинами $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(1; -1)$ знайти кут, утворений стороною OB і медіаною OM .
5. Який кут утворюють одиничні вектори \vec{s} і \vec{t} , якщо вектори $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ і $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаємно перпендикулярні?
6. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$ на вісь, що має напрям вектора $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, де \vec{m} і \vec{n} взаємно перпендикулярні орти. Обчислити кути між віссю проекції і ортами \vec{m} та \vec{n} .
7. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.
8. Обчислити $(\vec{a} - \vec{b})^2$, якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{b}| = 4$; $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.
9. Дано компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, причому $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ і $(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$.
Обчислити модуль вектора $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
10. Задано вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Знайти $\text{pr}_{\vec{b}}\vec{a}$ і $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$.
11. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$.
12. Дано вектор $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$. Знайти $\cos(\vec{a}, \vec{m})$ і $\cos(\vec{a}, \vec{n})$.
13. Дано точки $A(3; -3; -2)$; $B(0; -3; 4)$; $C(0; -3; 0)$; $D(0; 2; -4)$. Побудувати вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ та знайти $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{b}$.
14. Визначити кут між бісектрисами двох плоских кутів правильного тетраедра, які проведені з однієї вершини.
15. З вершини прямокутника зі сторонами 6 і 4 проведено прямі, що ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут між ними.

16. Обчислити площу і висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$.
17. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут, що дорівнює 45° . Знайти площу і одну з висот трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$.
18. Обчислити висоту AD і площу трикутника з вершинами в точках $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ і $C(4; 5; -2)$.
19. Обчислити синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.
20. Обчислити проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на напрям вектора $\vec{b} = (\vec{j} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.
21. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.
22. Чи знаходяться точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$, $D(5; 0; -6)$ в одній площині?
23. Знайти об'єм тетраедра, побудованого на векторах \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , якщо ці вектори направлені за бісектрисами координатних кутів і довжина кожного з них дорівнює 2.
24. Дано піраміду з вершинами $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$ і $D(2; 3; 8)$. Обчислити її об'єм і висоту, опущену на грань ABC .
25. Довести, що при будь-яких $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектори $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарні.
26. Дано піраміду з вершинами $A(2; 7; 0)$, $B(0; 3; -2)$, $C(-1; 0; 3)$ і $D(2; -3; 4)$. Обчислити її об'єм і висоту, опущену на грань ABC .
27. Обчислити висоту AD і площу трикутника з вершинами в точках $A(-1; 3; -4)$, $B(3; 0; 7)$ і $C(5; 5; -2)$.
28. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут, що дорівнює 45° . Знайти площу і одну з висот трикутника, побудованого на векторах $3\vec{a} + 2\vec{b}$ і $2\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$.
29. Дано піраміду з вершинами $A(2; 1; 6)$, $B(0; -3; 2)$, $C(1; 0; 3)$ і $D(2; 3; 8)$. Обчислити її об'єм і висоту, опущену на грань ABC .
30. Обчислити висоту AD і площу трикутника з вершинами в точках $A(2; 3; 3)$, $B(1; -2; 6)$ і $C(4; 8; -2)$.

2.2 Пряма на площині

Пряма лінія на площині XOY - множина точок $M(x; y)$, що задовольняють рівняння $Ax + By + D = 0$, де A, B, D – задані коефіцієнти прямої, причому $A^2 + B^2 > 0$.

Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має вектор нормалі $\vec{N} = (A; B)$ має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (1)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві різні точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ таке:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (2)$$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0; y_0)$ у заданому напрямку

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ — кутовий коефіцієнт прямої, α — кут між прямою і віссю OX .

Якщо прямої l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовим коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то кут φ між ними обчислюється по формулі:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Умова паралельності прямих l_1 і l_2 має вид $k_1 = k_2$, а умова їх перпендикулярності $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. Якщо прямі ℓ_1 і ℓ_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ кута між ними обчислюється по формулі

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|,$$

умова їх паралельності $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$,

умова їх перпендикулярності $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $A_x + B_y + C = 0$ обчислюється по формулі $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$.

Приклад 1.

Дано трикутник із вершинами $A(1, -2)$, $B(5; 4)$ і $C(-2; 0)$. Скласти рівняння медіани CM , висоти BN та бісектриси AP .

Розв'язок. Якщо $M(x_1; y_1)$ — середина сторони AB , то $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$, $y_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$ і звідси $M(3; 1)$.

Тепер рівняння медіани CM знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $C(-2; 0)$ і $M(3; 1)$. Маємо за формулою (2):

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{1-0}, x-5y+2=0.$$

Оскільки висота BN проходить через точку B і має вектор нормалі $\vec{AC} = (-2-1; 0+2) = (-3; 2)$, то за формулою (1) дістанемо рівняння прямої BN :

$$-3(x-5) + 2(y-4) = 0 \text{ або } 3x-2y-7=0.$$

Для визначення рівняння прямої AP скористаємося властивістю бісектриси :

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Маємо $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, $AC = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, тому

$$\frac{BP}{PC} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 2.$$

Оскільки точка $P(x; y)$ ділить відрізок BC у відношенні $\lambda = 2$, то за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \text{ дістанемо } x = \frac{5 + 2(-2)}{1 + 2} = \frac{1}{3}, y = \frac{4 + 2 \cdot 0}{1 + 2} = \frac{4}{3} \text{ і тоді,}$$

$$P\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Отже, рівняння бісектриси AP , знайдемо як рівняння прямої, що проходить

через дві точки $A(1;-2)$ і $P\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$. (формула 2).

Маємо

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \text{ або } \frac{10}{3}(x-1) = -\frac{2}{3}(y+2) \text{ або } 5x + y - 3 = 0.$$

Завдання 4

Знайти рівняння висоти, медіани і бісектриси трикутника зі сторонами

Варіанти завдань для самостійного виконання

1. $x+3y+3=0$, $x-2y+1=0$, $2x-5y+1=0$.
2. $2x-y+1=0$, $x-2y-1=0$, $x+y+2=0$
3. $3x+y+4=0$, $x-y+1=0$, $x+2y+2=0$.
4. $2x-y+1=0$, $3x-2y-1=0$, $x+3y=0$.
5. $x-2y+3=0$, $2x+1=0$, $x+3y+1=0$
6. $x+3y-6=0$, $3x-y+2=0$, $x-2y-1=0$
7. $2x-y+3=0$, $x+5y-7=0$, $3x-2y+6=0$.
8. $5x-2y+6=0$, $4x-y+3=0$, $x+3y-7=0$.
9. $x+2y+3=0$, $3x-7y+9=0$, $5x-3y-11=0$.
10. $5x-3y-15=0$, $x+5y-3=0$, $3x+y+5=0$.
11. $18x+6y-17=0$, $14x-7y+15=0$, $5x+10y-9=0$.
12. $2x-5y-2=0$, $x+y-8=0$, $5x-2y-5=0$.
13. $2x-y-2=0$, $x+y-6=0$, $2x+y-4=0$.
14. $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$.
15. $2x+y+4=0$, $3x-5y-7=0$
16. $2x+2y+5=0$, $3x-y+1=0$, $x-3y+7=0$.
17. $x+2y+5=0$, $3x+y+1=0$, $x+y+7=0$.
18. $x+3y-6=0$, $3x-y+2=0$, $x-2y-1=0$.
19. $x+3y-7=0$, $4x-y-2=0$, $6x+8y-35=0$.
20. $3x+4y-20=0$, $7x-24y-180=0$, $4x-3y+15=0$.
21. $2x+y-14=0$, $x=3$, $y=2$.
22. $2x+y+4=0$, $x+7y-11=0$, $3x-5y-7=0$.
23. $x+y-2=0$, $7x-y+4=0$, $3x+y-14=0$.
24. $y-2x=0$, $x-3y-15=0$, $3x+y-25=0$.
25. $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$.
26. $2x-y+1=0$, $x-2y-1=0$, $x+y+2=0$.
27. $x+3y-6=0$, $3x-y+2=0$, $x-2y-1=0$.
28. $2x-y+1=0$, $3x-2y-1=0$, $x+3y=0$.
29. $2x-y+1=0$, $x-2y-1=0$, $x+y+2=0$.
30. $5x+2y-1=0$, $x=2$, $y=3$.

2.3. Пряма та площина у просторі

Будь-яке рівняння першого степеня відносно координат точки простору $Ax + By + Cz + D = 0$ відображає площину. Коефіцієнти при змінних A, B, C є компонентами вектора, перпендикулярного до площини.

Кут між двома площинами $Ax + By + Cz + D = 0$ і $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ визначається за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Умовою їх паралельності є: $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, а перпендикулярності — $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$.

Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма у просторі може бути визначена як перетин двох площин:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

або канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\vec{s} = (m, n, p)$ — напрямний вектор прямої, $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка, що лежить на прямій.

Пряму у просторі можна задати також параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де t — параметр, або рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Звичайно, всі рівняння відповідають прямій у просторі і між ними існує певний зв'язок.

Площина і пряма у просторі можуть перетинатися під деяким кутом α , який визначається за формулою:

$$\sin \alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

У разі виконання умови: $Am + Bn + Cp = 0$ пряма і площина паралельні, а якщо $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ — перпендикулярні. Умовою того, що пряма лежить на площині, є виконання співвідношень:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \\ Am + Bn + Cp = 0. \end{cases}$$

Приклад 1.

Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і утворює з площиною $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ кут 60° , і знаходження її відстані до точки $A(1; 3; 5)$.

Розв'язок.

Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $Ax + By = 0$, тому що вона проходить через вісь OZ . Використаємо другу умову задачі: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2} \cdot \sqrt{10}}$, з якої одержимо рівняння: $3\frac{A^2}{B^2} + 8\frac{A}{B} - 3 = 0$; $\frac{A}{B} = -3$ або $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$. Остаточно маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини: $3x - y = 0$ і $x + 3y = 0$. Точка A лежить на першій площині, тому що $d_1 = 0$, а відстань її до другої площини $d_2 = \frac{|1+9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Приклад 2.

Знайти напрямний вектор прямої

$$\begin{cases} x + y - z = 0; \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{і кути, які вона утворює з осями системи координат.}$$

Розв'язок.

Вектори $\vec{N}_1(1; 1; -1)$ і $\vec{N}_2(1; -1; 0)$ перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої \vec{s} розташований перпендикулярно до кожного з векторів \vec{N}_1, \vec{N}_2 . Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тобто: $\vec{s} = (-1; -1; -2)$ або $\vec{s} = (1; 1; 2)$. Кути з осями знайдемо за формулами: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Приклад 3.

Показати, що прямі

$$\begin{cases} x - z + 2 = 0; \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розташовані.

Розв'язок.

Дві прямі будуть лежати на одній площині, коли їх напрямні вектори \vec{s}_1 і \vec{s}_2 і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2; 1; 0)$ лежить на першій прямій, а $M_2(2; 4; 2)$ — на другій. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (4; 3; 2)$. Направний вектор

$$\vec{s}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{s}_2 = (3; 1; 1)$. $(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Отже, прямі лежать на одній площині. Для запису рівняння цієї площини знайдемо вектор

$\vec{N} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$. Точка $M_1(-2; 1; 0)$ лежить на цій площині. Отже, маємо: $x + 2 + 2(y - 1) - 5z = 0$ або остаточно: $x + 2y - 5z = 0$.

Варіанти завдань для самостійного виконання

1. Скласти рівняння ребер тетраедра, якщо його вершинами є:

$A(0; 0; 2)$, $B(4; 0; 5)$, $C(5; 3; 0)$, $D(-1; 4; -2)$.

2. Перевірити, чи лежать точки $(3; 0; 1)$, $(0; 2; 4)$, $\left(1; \frac{4}{3}; 3\right)$ на одній прямій.

3. Визначити напрямні косинуси прямих:

1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}$; 2) $\frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}$.

4. Визначити кут між прямими $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ і $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$.

5. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0; \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$

6. Обчислити напрямні косинуси прямої $\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0; \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$

7. Через точку $(2; -5; 3)$ провести пряму:

1) паралельно прямій $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$;

2) паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

8. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$.

9. Чи перетинаються прямі:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{5}$ і $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$;

2) $\begin{cases} 4x + z - 1 = 0; \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0; \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$?

10. Написати рівняння перпендикуляра, проведеного від точки $(2; 3; 1)$ до прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

11. З початку системи координат опустить перпендикуляр на пряму $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

12. Через точку $A(4; 0; -1)$ провести пряму так, щоб вона перетинала дві прямі:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ і $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

13. Знайти відстань від точки $O(0; 0; 0)$ до прямої $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-5}$.

14. Знайти відстань між паралельними прямими $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ і $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.

15. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x + y - z = 0$, а пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ лежить на цій площині.

- 16.** Написати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ і точку $(3; 4; 0)$.
- 17.** Написати рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.
- 18.** Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і утворює однакові кути з площинами $3x-4y=0$, $y=0$; $z=0$. Знайти цей кут.
- 19.** Знайти точку перетину прямої $x=2t-1$, $y=t+2$, $z=1-t$ з площиною $3x-2y+z=3$.
- 20.** Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ з площиною $x+2y+3z-29=0$.
- 21.** Знайти проекцію точки $(3; 1; -1)$ на площину $x+2y+3z-30=0$.
- 22.** Знайти проекцію точки $(2; 3; 4)$ на пряму $x=y=z$.
- 23.** Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $(2; 1; 0)$ на пряму $\begin{cases} x-3z+1=0; \\ y-2z=0. \end{cases}$
- 24.** Через пряму $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+4y-3z+7=0$.
- 25.** Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на площину $x-y+3z+8=0$.
- 26.** Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $(-3; 2; 5)$ на площини $4x+y-3z+13=0$ і $x-2y+z-11=0$.
- 27.** Через пряму $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести площину паралельно площині $x+y-z+15=0$.
- 28.** На прямій $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки $(3; 2; 6)$.
- 29.** На прямій $\begin{cases} x+2y+z=1; \\ 3x-y+4z=29 \end{cases}$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(3; 11; 4)$, $B(-5; -13; -2)$.
- 30.** Знайти точку, симетричну точці $(4; 3; 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Розділ 3 Математичний аналіз

3.1 Границя функції

Практичне обчислення границь функцій базується на наступних теоремах:

Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{X \rightarrow X_0} \phi(X) = B$,

Тоді:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm \phi(x)] = A \pm B$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)\phi(x)] = AB$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{A}{B}$, при $B \neq 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha A$, для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Приклад 1.

Знайти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2}$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 + 5x + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 1}{\lim_{x \rightarrow -1} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 5x + \lim_{x \rightarrow -1} 2} = \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x - 1}{4 \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x + 5 \lim_{x \rightarrow -1} x + 2} = \frac{3(-1) \cdot (-1) - 1}{4(-1) \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) + 2} = 2 \end{aligned}$$

Приклад 2.

Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

Розв'язок. Оскільки границі чисельника і знаменника при $x \rightarrow 2$ рівні нулю,

то маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. "Розкриваємо" цю невизначеність, розклавши чисельник і знаменник на множники і скоротивши їх далі на спільний множник $(x - 2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3}$$

В одержаному дробі знаменник вже не прямує до нуля при $x \rightarrow 2$, тому можна використати теорему про границю частки:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)} = \frac{2+2}{2-3} = -4$$

$$\text{Отже} \quad - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -4.$$

Приклад 3.

Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

Розв'язок. Тут ми також маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Домножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника (позбавимося від ірраціональності в чисельнику):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3) \cdot (\sqrt{x+8}+3)}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 3^2}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8)-9}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{6}$$

Приклад 4.

Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}$

Розв'язок. Чисельник і знаменник дробу - нескінченно великі функції, тому тут має місце невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Розкриємо цю

невизначеність. Поділимо чисельник і знаменник дробу на старшу степінь x , тобто на x^2 :

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{2 + \frac{3}{x}}$$

Залишилося використати властивість границь, а також те, що функції $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{x^2}$

- нескінченно малі при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{0+0-1}{2+0} = -\left(\frac{1}{2}\right)$$

Практичне обчислення границь функцій базується також на наступних важливих границях та наслідках із них:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$

Нескінченно малі (нескінченно великі) у точці x_0 функції $f(x)$ і $\phi(x)$ називають еквівалентними нескінченно малими (нескінченно великими),

якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = 1$. При цьому записують $f(x) \sim \phi(x)$, $x \rightarrow x_0$. Враховуючи границі (1) - (6) та інші, дістанемо основні еквівалентності при $x \rightarrow 0$.

$\sin x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$	$e^x - 1 \sim x$	$\arcsin x \sim x$
$\ln(1+x) \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x \sim x$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

Приклад 5.

Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{1 + 5x}$.

Розв'язок. Оскільки $\sqrt[5]{1 + 5x} = (1 + 5x)^{\frac{1}{5}}$, то тут ми також маємо сараву з невизначеністю виду 1^∞ , для розкриття якої нам буде потрібна одна із форм

другої чудової границі. Тоді
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{1 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{5}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 5x)^{\frac{1}{5x}} \right]^5 = e^5$$

Приклад 6.

Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x$

Розв'язок. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x . Будемо мати

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{2}{x} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-(2)}{x} \right]^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5$$

Приклад 7.

Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x}$

Розв'язок. Зробимо заміну $y=2x$ і застосуємо границю (4), одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{\frac{7}{2}y} = \frac{2}{7} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{2}{7}$$

Приклад 8.

Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

Розв'язок. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos 2x - 1)]^{\frac{1}{\sin^2 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \left(-2 \sin^2 x \right) \right]^{\frac{1}{-2 \sin^2 x} \cdot \frac{-2 \sin^2 x}{\sin^2 3x}} = \dots$$

$$e^{-2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}} = e^{-\left(\frac{2}{9}\right)}$$

Завдання 6

Обчислити границі (не користуючись правилом Лопіталя)

Варіанти завдань для самостійного виконання

1.

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x - 1} & 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 8x + 5}{3x^2 + 9x + 6} & 3. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2x + 1}{5x^4 + 3x + 2} & 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 7x + 6} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos 2x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 2}{5x^2 + 1} & 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} & 3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{\sqrt{x+5} - 3} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 4x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{2}{3-x}} \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{5x^2 + 3x + 4} & 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} & 3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{x - 4} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{4x^2} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}} \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{2x^3 + x + 3} & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} & 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{9-x}}{x-2} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{-2x} \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{llll} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x + 3}{6x^2 + 1} & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} & 3. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{11+x} - 2}{x+7} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\arcsin 12x} \end{array}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+12}{x} \right)^{3x+3}$$

7.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x + 4}{3x^4 x^3 + 2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 10x + 12}{21 + x - 2x^2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x-1}} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{21 + x - 2x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$$

8.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 24}{2x^2 - 5x - 3} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3}}{x} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-6}{x-3} \right)^{x+4}$$

9.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^3 + x + 5}{2x^5 + x^2 + 3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^3 - 1} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 4x}{1 - \cos^2 x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

10.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^4 + x^2 + 3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{9x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+2} \right)^{3x-6}$$

11.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x - 5}{8x^3 - x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x^2 - 3x - 4} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 6x}{5x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3}{x^2}}$$

12.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 10}{x^3 - 5} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - 4} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{x^2 - 2549} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{5x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{x-3}$$

13.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + 6} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x^2 - 3x + 2} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{1 - \cos 8x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} (5 - x)^{\frac{3}{4-x}}$$

14

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 7}{x^2 + 5} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x - 18}{2x + 6} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos 10x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 4}{x + 6} \right)^{3x-1}$$

15.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 11x^3}{3 + 2x^3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

16.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x^3 + 5x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x - 35} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 9} - 5}{x^2 - 16} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 6} \right)^{4x-2}$$

17.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x - 1}{1 - x^2 - 3x^3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 7x + 6} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \operatorname{tg} 2x}{x^3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{6}{x-3}}$$

18.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x - 3}{x^2 + 6x - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 6x}{5 \sin^2 3x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{3x-4}$$

19.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 1}{1 - x^2 - x^3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 2x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{3}{x-1}}$$

20.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^5 - 7} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 + 2x - 15} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x^2} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \arcsin 4x}{x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+1} \right)^{3x+5}$$

21.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x-x^2}{5x-2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2x^2-16x}{x^2-7x-8} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-8x-7} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \arctg x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} (3+x)^{\frac{5}{x+2}}$$

22.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3-7x+12}{4x^3-1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x^2+2x-3} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \operatorname{tg} \frac{3}{2}x}{3x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-1} \right)^{3x+5}$$

23.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+2}{x^3-10} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{7}{2}x}{1-\cos 7x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 5} (6-x)^{\frac{3}{x-5}}$$

24.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+6x-7}{5-3x^2-5x^3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \arcsin 3x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{2x-1}$$

25.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2+5x-1}{3x^3+2x^2-1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^3-1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-6x-7} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{\sin^2 5x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -4} (5+x)^{\frac{3}{x+5}}$$

26.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2x+1}{5x^4+3x+2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{2x^2-7x+6} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos 2x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$$

27.

$$\begin{array}{llll}
1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 2}{5x^2 + 1} & 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} & 3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{\sqrt{x+5} - 3} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{1 - \cos 4x} \\
5. \lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{2}{3-x}}
\end{array}$$

28.

$$\begin{array}{llll}
1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{2x^3 + x + 3} & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} & 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{9-x}}{x-2} & 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x} \\
5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{-2x}
\end{array}$$

29.

$$\begin{array}{llll}
1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{2x^3 + x + 3} & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} & 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{9-x}}{x-2} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x} \\
5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{-2x}
\end{array}$$

30.

$$\begin{array}{llll}
1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x + 3}{6x^2 + 1} & 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} & 3. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{11+x} - 2}{x+7} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\arcsin 12x} \\
5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+12}{x} \right)^{3x+3}
\end{array}$$

3.2 Похідна функції та її обчислення

Наведемо правила, що найчастіше використовуються при обчисленні похідних:

1) похідна від сталої: $C' = 0$;

2) похідна суми: $(u + v)' = u' + v'$;

3) похідна добутку:

$$(uv)' = u' \cdot v + uv', \text{ зокрема } (cu)' = cu';$$

4) похідна частки:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0, \text{ зокрема } \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2};$$

5) похідна складної функції:

$$(f[\varphi(x)])' = f'(u)\varphi'(x), \text{ де } u = \varphi(x);$$

6) похідна функції $y = f(x)$, заданої параметрично системою $x = x(t)$,

$$y = y(t), t \in (\alpha; \beta):$$

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, x'(t) \neq 0;$$

7) похідна степенево-показникової функції:

$$(u^v)' = (e^{v \ln u})' = u^v (v' \ln u + v(\ln u)'), u > 0, v > 0.$$

8) похідна неявно заданої функції $F(x, y) = 0$: похідна по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x , і одержане рівняння розв'язати відносно y' .

Основні формули диференціювання запишемо у вигляді наступної таблиці:

$$1. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ зокрема, } (x)' = 1, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$2. (a^x)' = a^x \ln a, \quad 2!(e^x)' = e^x.$$

$$3. \log_a x = \frac{1}{x \ln a}, \quad 3!(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$4. (\sin x)' = \cos x,$$

$$5. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Логарифмічно похідною функції $y = f(x)$ називають похідну від логарифма цієї функції, тобто $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$. Застосування попереднього логарифмування

часто спрощує обчислення, оскільки $y' = y (\ln y)'$.

Приклад 1.

Знайти похідну функції $y = \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-3}}$

Розв'язок. Логарифмуючи задану рівність, дістанемо

$\ln y = \frac{1}{3}(2 \ln x + \ln(x+1) - \ln(x-3))$. Користуючись логарифмічною похідною, маємо

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} \right) = \frac{2}{3} \frac{x^2 - 4x - 3}{x(x+1)(x-3)}.$$

$$\text{Звідки: } y' = y (\ln y)' = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{x^2(x+1)}{x-3}} \frac{x^2 - 4x - 3}{x(x+1)(x-3)} = \frac{2}{3} \frac{x^2 - 4x - 3}{\sqrt[3]{x(x+1)^2(x-3)^4}}.$$

Приклад 2.

Знайти похідну степеневу-показникову функції $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

Розв'язок. Згідно з правилом 7) при $\operatorname{tg} x > 0$ знаходимо:

$$((\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x})' = (e^{\operatorname{ctg} x \ln \operatorname{tg} x})' = e^{\operatorname{ctg} x \ln \operatorname{tg} x}$$

$$(\operatorname{ctg} x \ln \operatorname{tg} x)' = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$$

$$\left((\operatorname{ctg} x)' \ln \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x (\ln \operatorname{tg} x)' \right) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x} \right) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{\sin^2 x} (1 - \ln \operatorname{tg} x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{\sin^2 x} \ln \frac{e}{\operatorname{tg} x}.$$

Приклад 3.

Знайти похідну неявно заданої функції y :

$$x^3 + y^3 = \sin(x - 2y).$$

Розв'язок. Диференціюємо обидві частини рівняння і враховуємо, що y - є функція від x (тому, наприклад, $(y^3)'_x = 3y^2 \cdot y'$), одержимо:

$$3x^2 + 3y^2 y' = \cos(x - 2y)(1 - 2y') \text{ або } 3x^2 + 3y^2 y' = \cos(x - 2y) - 2y' \cos(x - 2y)$$

Звідси знаходимо y' :

$$3y^2 \cdot y' + 2y' \cdot \cos(x - 2y) = \cos(x - 2y) - 3x^2$$

$$y'(3y^2 + 2\cos(x - 2y)) = \cos(x - 2y) - 3x^2, \text{ тобто}$$

$$y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}.$$

Приклад 4.

Переконайтеся в тому, що функція $y = e^{3x} + x^2$ є розв'язком рівняння $y' - 3y + 3x^2 - 2x = 0$.

Розв'язок. Оскільки похідна заданої функції $y = 3e^{3x} + 2x$, то підставляючи значення y' і y в задане рівняння, дістанемо тотожність $0 \equiv 0$, що й доводить дане твердження.

Зауважимо, що похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ називається також похідною першого порядку. Похідна від функції $f'(x)$ називається похідною другого порядку від функції $f'(x)$ і позначається $f''(x)$.

Аналогічно визначається похідна третього порядку, яка позначається $f'''(x)$.

Приклад 5.

Знайти $f'''(x)$, де $f(x) = \sin 3x$

Розв'язок. Знаходимо першу похідну: $f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$.

Звідси одержимо другу похідну - $f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x$, а потім і шукану третю: $f'''(x) = (-9\sin 3x)' = -27\cos 3x$.

Завдання 7

У прикладах а), б), в) знайти похідну вказаної функції, а у прикладі г) показати, що функція задовольняє вказане співвідношення.

Варіанти завдань для самостійного виконання

1.

$$a) y = \sin \sqrt{3} + \frac{\sin^2 x}{3 \cos 6x}; \bar{o}) y = x^{\arcsin x}; \theta) \frac{y}{x} = e^y;$$

$$z) y = e^x + y^2, y'' - y' = 2(1 - x)$$

2.

$$a) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}; \bar{o}) y = \frac{(x-1)^2 \sqrt{9+x^2}}{12x^3}; \theta) \sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} - 5 = 0;$$

$$z) y = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, y'' = xy' + y + 1$$

3.

$$a) y = \arctg \sqrt{1 - e^{-x^3}}; \bar{o}) y = x^{2x} 5^x; \theta) x^y = \sin y;$$

$$z) y = \frac{4}{(x+2)^2}, 2y'' = 3y^2$$

4.

$$a) y = \frac{2}{3} \sqrt{(\arctg e^x)^3}; \bar{o}) y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}; \theta) 3x^2y + 2xy^2 - 5x + 1 = 0;$$

$$z) y = 1 + \csc e^x + \sin e^x, y'' - y' + ye^{2x} = 1$$

5.

$$a) y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \arctg e^x; \bar{o}) y = x^{x \sin x^3}; \theta) xy^2 + \ln y = 1;$$

$$z) y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}, xy'' + x(y')^2 - y' = 0$$

6.

$$a) y = \sqrt{\lg 4} - \frac{\cos^2 10x}{24 \sin 20x}; \bar{o}) y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}; \theta) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}};$$

$$z) y = e^x + \sin x, y'' + y' - 2y = \cos x - \sin x$$

7.

$$a) y = \ln \lg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right); \bar{o}) y = (\ctg)^{\sqrt{x}} \theta e^y + e^x - x^3 = 0;$$

$$z) y = 5e^{5x} + 3e^{3x}, y'' - 5y' + 6y = 0$$

8.

$$a) y = \sqrt{\frac{2}{3} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}}; \bar{o}) y = \frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}; \theta) e^{xy} + \ln y - 3x = 0;$$

$$z) y = e^{2x}(3+4x), y'' - 4y' + 4y = 0$$

9.

$$a) y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x; \bar{o}) y = (\tg x)^{\cos x}; \theta) \sin xy + \cos xy = 1;$$

$$z) y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 6x + 4), y'''(x-1) - y'' = 0$$

10.

$$a)y = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}; \bar{o})y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3}; \theta)x + y + x \cos y = 0;$$

$$z)y = x + \sin 2x, y'' + 4y = 4x$$

11.

$$a)y = \ln(e^x + \sqrt{3 + 2x}); \bar{o})y = x^{\frac{1}{x}}; \theta)x + y = e^y \operatorname{arctg} x;$$

$$z)y = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-3x}, y'' = 6(y - 2e^{2x} - 3e^{3x})$$

12.

$$a)y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln \sin x; \bar{o})y = \frac{(x+1)^3 \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}; \theta)\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$z)y = \ln \sqrt{x} + 1 + x, y''' = 8(y' - 1)^3$$

13.

$$a)y = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \bar{o})y = x^{\sqrt{x}}; \theta)x \operatorname{tg} y = y \operatorname{tg} x;$$

$$z)y = \frac{1}{(x-2)^2}, 3y' + (x-2)y''$$

14.

$$a)y = x\sqrt{1 - x^2} + \ln \cos 2x; \bar{o})y = (x - x^2)^{x-1}; \theta)y^3 - 3y + 2x - x^2 y^2;$$

$$z)y = e^{2x} + 2x + 2x^2, y'' = 2(y' - 4x)$$

15.

$$a)y = \sin \sqrt{3} + \frac{\sin^2 x}{3 \cos 6x}; \bar{o})y = x^{\arcsin x}; \theta)\frac{y}{x} = e^y;$$

$$z)y = e^x + y^2, y'' - y' = 2(1 - x)$$

16.

$$a)y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}); \bar{o})y = x^{1-x^2}; \theta)x \sin y - \cos y - \cos x = 0;$$

$$z)y = x - e^{1-3x}, y'' = 9(y - x)$$

17.

$$a)y = x \arcsin 2x + \sqrt{1 - x^2}; \bar{o})y = (\cos x)^{\ln x}; \theta)e^{xy} = 1 + xy;$$

$$z)y = \sin 2x - \cos 4x, y'' = 4(3 \cos 4x - y)$$

18.

$$a)y = e^{x^2 \arcsin(1-2x)}; \bar{o})y = (\cos x)^{\ln x}; \theta)y = e^{x^2 - 2xy};$$

$$z)y = (1 - x)^2 + \ln(1 + x), (1 + x)y''' = 2(2 - y'')$$

19.

$$a)y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos \ln \operatorname{tg} x; \bar{o})y = x^9 (x-5)^8 (x+4)^7 \sqrt{x^2 + 3}; \theta)xy = \arcsin(x - y);$$

$$z)y = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}, y''' = 6(y' - x + 3x^2 - x^3)$$

20.

$$a)y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \arcsin \sqrt{1 - x^2}; \bar{o})y = e^{r^{2x}}; \theta)x^2 y^3 = e^{x+2y};$$

$$z)y = x + \ln \sin x, \sin xy''' + 20xy'' = 0$$

21.

$$a)y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1+x}{1-x}; \bar{\theta})y = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\operatorname{ctg} 2x}; \theta)e^{x+y} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$z)y = \sqrt{0.01 + e^{1-x^2}}, xy'' + (2x^2 - 1)y' = 0$$

22.

$$a)y = \sqrt{1 + \ln^2 \frac{x}{2}}; \bar{\theta})y = \left(x + \frac{1}{x} \right)^x; \theta)\operatorname{tg} xy = \ln(x - y);$$

$$z)y = e^x + e^{2x} + 4e^{3x}, y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$$

23.

$$a)y = xe^{1-\cos x}; \bar{\theta})y = \sqrt{\frac{x(x-1)^3}{(x+1)^5(x-2)}}; \theta)x^y = y^x;$$

$$z)y = 2xe^{-3x}, y'' + 6y' + 9y = 0$$

24.

$$a)y = e^{\sin^2 3x} \cos 6x; \bar{\theta})y = \left(\frac{1}{x^2} \right)^{2\sqrt{x}}; \theta)\ln(y - x) = \frac{1}{x - y};$$

$$z)y = \frac{9}{8} \sin 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x, y'' + 4y = 5 \sin 2x$$

25.

$$a)y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2}); \bar{\theta})y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x-1}}; \theta)\sqrt{xy} = 1 + (x - y)^2;$$

$$z)y = \sin 3xe^{-2x}, y'' + 4y' + 13y = 0$$

26.

$$a)y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}; \bar{\theta})y = \frac{(x-1)^2 \sqrt{9+x^2}}{12x^3}; \theta)\sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} - 5 = 0;$$

$$z)y = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, y'' = xy' + y + 1$$

27.

$$a)y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} - \frac{\cos^2 10x}{24 \sin 20x}; \bar{\theta})y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}; \theta)x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

$$z)y = e^x + \sin x, y'' + y' - 2y = \cos x - \sin x$$

28.

$$a)y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg}^x)^3}; \bar{\theta})y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}; \theta)3x^2y - 5x + 1 = 0;$$

$$z)y = 1 + \operatorname{cose}^x + \sin e^x, y'' - y' + ye^{2x} = 1$$

29.

$$a)y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg} e^x; \bar{\theta})y = x^{x \sin x^3}; \theta)xy^2 + \ln y = 1;$$

$$z)y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}, xy'' + x(y')^2 - y' = 0$$

30.

$$a) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}; \delta) y = \frac{(x-1)^2 \sqrt{9+x^2}}{12x^3}; \epsilon) \sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} - 5 = 0;$$

$$e) y = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, y'' = xy' + y + 1$$

3.2 Дослідження функції методами диференціального числення та побудова їх графіків.

При побудові графіка даної функції доцільно користуватися наступною схемою;

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) дослідити функцію на парність, непарність і періодичність;
- 3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- 4) знайти проміжки знакосталості функції;
- 5) знайти асимптоти;
- 6) знайти проміжки зростання і спадання, екстремуми;
- 7) знайти проміжки опуклості вниз та вгору, точки перетину.

Зауваження. У деяких випадках зручно змінювати порядок указаних пунктів.

Приклад.

Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{4-x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язок.

Область визначення $D(f)$ функції – вся числова вісь, крім точок $x = -2$ і $x = 2$, тобто $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Функція неперіодична. Дослідимо її на парність і непарність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x).$$

Отже, дана функція непарна і її графік симетричний відносно початку координат. Тому далі будемо досліджувати функцію тільки при $x \geq 0$. Знайдемо точки перетину графіка з осями координат:

з віссю Оу графік перетинається при $x = 0$, звідси $y = f(0) = 0$, тобто $M(0;0)$ – точка перетину з віссю Оу;

з віссю Ох графік перетинається, якщо $f(x) = 0$, тобто $y = \frac{x^3}{4-x^2} = 0$, звідки $x = 0$.

0. Таким чином, $M(0;0)$ – єдина точка перетину графіка з осями координат.

Знаходимо проміжки знакосталості функції:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4-x^2} > 0 \Leftrightarrow x(4-x^2) > 0 \text{ і оскільки ми розглядаємо тільки}$$

випадок $x \geq 0$, то одержуємо $0 < x < 2$.

Аналогічно $f(x) < 0$ при $x > 2$.

Далі, $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty$ тобто пряма $x = 2$ – вертикальна асимптота. Звідси, в силу симетрії, впливає, що пряма $x = -2$ – також вертикальна асимптота.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1,$$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x \right) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{4-x^2} \right) = 0$, тобто пряма $y = -x$ – похила асимптота при $x \rightarrow +\infty$ (те саме і при $x \rightarrow -\infty$). Горизонтальних асимптот графік немає. Знайдемо проміжки монотонності і екстремуми функції, досліджуючи першу похідну:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2} \right)' = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}.$$

Звідси видно (див. рис. 1), що при $x \geq 0$ функція має максимум в точці $x = 2\sqrt{3}$ (причому $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} = -3\sqrt{3} \approx -5.2$), зростає на $(0; 2)$ і $(2; 2\sqrt{3})$ і спадає на $(2\sqrt{3}; +\infty)$.

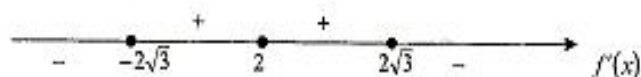
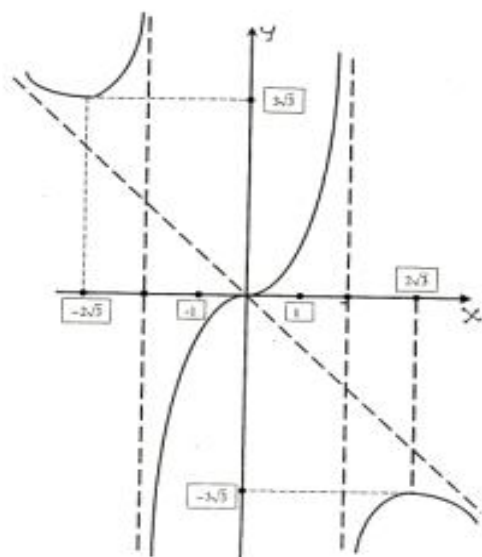


Рис. 1

Щоб визначити проміжки опуклості і точки перегину, обчислимо другу похідну:

$$f''(x) = \frac{8x(12x+x^2)}{(4-x^2)^3}$$

Звідси зрозуміло, що при $x \geq 0$ функція випукла вгору (тобто $f'''(x) < 0$) на $(2; +\infty)$ і випукла вниз (тобто $f''(x) > 0$) на $(0; 2)$, $x = 0$ - точка перегину.

Враховуючи проведено дослідження, будуємо графік функції при $x \geq 0$, а потім симетрично відображаємо його відносно початку координат (див. рис.2).

Рис.2

Завдання 8

Дослідити методами диференціального числення функції та побудувати їх графіки.

Варіанти завдань для самостійного виконання

1.

$$a) y = \frac{x^2}{3} - 4x; б) y = \frac{x}{1+x^2}$$

2.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1; б) y = x^3 e^{-3x}$$

3.

$$a) y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; б) y = \frac{e^x}{x}$$

4.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1; б) y = x - \ln x$$

5.

$$a) y = 2 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} ; б) y = \frac{x^2}{x-1}$$

6.

$$a) y = x^4 - 2x^2 + 5; б) y = 2x^2 - \ln x$$

7.

$$a) y = 5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}; б) y = x^2 e^{-x}$$

8.

$$a) y = 2x^2 - 3x^2; б) y = (x-5)e^{-2x}$$

9.

$$a) y = 10 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}; б) y = x e^{\frac{x^2}{2}}$$

10.

$$a) y = x - \frac{x^5}{5}; б) y = \ln(9+x^2)$$

11.

$$a)y = 2x^3 - 9x + 12x - 9; \bar{o})y = \frac{x^3}{x-1}$$

12.

$$a)y = x^4 - 4x^3 + 4x^2; \bar{o})y = x^3 e^{-x}$$

13.

$$a)y = x^4 - 4x^2 + 2; \bar{o})y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}$$

14.

$$a)y = 2x^3 + 3x^2 - 5; \bar{o})y = x e^{-x}$$

15.

$$a)y = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + x^2; \bar{o})y = x^2 - 2 \ln x$$

16.

$$a)y = 12x^2 - 8x^3 - 2; \bar{o})y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$$

17.

$$a)y = 3x^2 - 2 - x^3; \bar{o})y = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

18.

$$a)y = x^2 + \frac{x^5}{10}; \bar{o})y = \ln(4 + x^2)$$

19.

$$a)y = 16x^4 - 8x^2 + 1; \bar{o})y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$$

20.

$$a.)y = 2x^3 - 3x^2 - 4; \bar{o})y = (3-x)e^{-x}$$

21.

$$a)y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1; \bar{o})y = x - \ln(x+1)$$

22.

$$a)y = 6x - 8x^3; \bar{o})y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

23.

$$a)y = \frac{3x^3}{4} - \frac{x^2}{8} - 2; \bar{o})y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$$

24.

$$a)y = 3x - x^3; \bar{o})y = (x^2 + 2)e^{-x^2}$$

25.

$$a)y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1; \bar{o})y = x^3 e^{-3x}$$

26.

$$a)y = x^4 - 2x^2 + 5; \bar{o})y = 2x^2 - \ln x$$

27.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1; б) y = x - \ln x$$

28.

$$a) y = 2 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}; б) y = \frac{x^2}{x-1}$$

29.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1; б) y = x^3 e^{-3x}$$

30.

$$a) y = \frac{x^3}{5} - x^2 + 3x; б) y = 2x - \ln x$$

3.4 Неозначений інтеграл. Основні методи інтегрування.

Якщо задана деяка функція $F(x)$, тоді її похідною є інша функція $f(x)$, тобто

$$F'(x) = f(x) \quad (*)$$

Сформулюємо обернену задачу: як, знаючи функцію $f(x)$, знайти таку іншу функцію $F(x)$, щоб виконувалась рівність (*). Відповідь на таке питання можливо отримати шляхом знаходження так званої первісної для $f(x)$, і цією функцією буде саме $F(x)$. Математично цю дію записують як

$$\int f(x) dx = F(x)$$

Наприклад, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Перевіримо правильність знайденої первісної:

$$\left(\frac{x^4}{4} \right)' = \frac{1}{4} (x^4)' = x^3, \text{ тобто рівність } (*) \text{ в конкретному випадку справджується.}$$

Всі можливі первісні для функції $f(x)$ відрізняються між собою на деяку константу C , $C \in \mathbf{R}$. Загальне сімейство всіх первісних вигляду $F(x) + C$ для функції $f(x)$ утворює відповідь неозначеного інтеграла для цієї ж функції $f(x)$, тобто

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (**)$$

Зауваження. Первісна $F(x)$ для $f(x)$ не завжди існує, а якщо існує, то ця первісна завжди єдина незалежно від способу її знаходження.

Наприклад, для $f(x) = e^{-x^2}$ первісної не існує.

На основі рівності (**) складена таблиця неозначених інтегралів основних елементарних функцій.

$$1 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$2 \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C;$$

$$3 \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$4 \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$5 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$5^* \int e^x dx = e^x + C ;$$

$$6 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C ;$$

$$7 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ;$$

$$8 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C ;$$

$$9 \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C ;$$

$$9^* \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C ;$$

$$10 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C ;$$

$$11 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C .$$

Властивості неозначеного інтеграла:

$$a) \int [C_1 f_1(x) \pm C_2 f_2(x)] dx = C_1 \int f_1(x) dx \pm C_2 \int f_2(x) dx$$

$$б) \int df(x) = f(x) + C$$

$$в) d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$г) \text{ Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ тоді для будь-якої } U(x), \int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C .$$

Приклад 1.

$$\int \frac{3x - 7x\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = 3 \int \frac{dx}{x} - 7 \int x^{\frac{4}{3}-2} dx = 3 \ln|x| - 7 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3 \ln|x| - 21\sqrt[3]{x} + C ;$$

$$\int \sin 7x dx = \int \sin 7x \frac{d(7x)}{7} = \frac{1}{7} \int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7} \cos 7x + C ;$$

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C .$$

I Метод заміни змінної в неозначеному інтегралі.

Якщо обчислюється $\int f(u(x)) \psi(x) dx$, при цьому $\psi(x) dx = du(x)$, тоді для спрощення при знаходженні відповіді такого інтеграла зручно ввести нову змінну $t=U(x)$, тоді $dt = du(x) = \psi(x) dx$

В новій змінній t наш інтеграл прийме вигляд $\int F(t) dt = F(t) + C = F(u(x)) + C$.

$$\text{Наприклад, } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-4x}} = \left(\begin{array}{l} t-3-4x \\ dt = -4dx \\ dx = -\frac{dt}{4} \end{array} \right) = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{\sqrt[4]{t}} = -\frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{4}} dt = -\frac{1}{4} \frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = -\frac{1}{3} (3-4x)^{\frac{3}{4}} + C .$$

II. Метод інтегрування частинами.

Основна формула цього **метода** $\int U dV = UV - \int V dU$, $U=U(x)$, $V=V(x)$ Даний метод стандартно використовується, якщо під знаком інтеграла є добуток

степеневій функції на тригонометричну чи показникову, присутність під інтегралом логарифмічної або будь-якої оберненої тригонометричної функції, добуток позикової функції на тригонометричну. Також цей метод доцільний в деяких окремих випадках. За функцію $U(x)$ звичайно приймають степеневу функцію (при диференціюванні степінь x понижується), логарифмічну чи обернену тригонометричну (оскільки для цих функцій відносно легко знаходяться похідні згідно відповідної таблиці). В ряді випадків даний метод застосовують послідовно декілька разів.

Приклад2.

$$\int (3x-4) \cos 2x dx = \left(\begin{array}{l} U = 3x-4 \\ dV = \cos 2x dx \\ dU = 3 dx \\ V = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right) = \frac{1}{2} (3x-4) \sin 2x - \frac{3}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} (3x-4) \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + C$$

Корисним є обчислення інтеграла

$$J = \int \sqrt{x^2 + A} dx = \left(\begin{array}{l} U = \sqrt{x^2 + A} \\ dV = dx \\ dU = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + A}} \\ V = x \end{array} \right) = x \sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx = x \sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = x \sqrt{x^2 + A} - J + A \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| = J$$

$$\text{Звідки } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$$

$$\text{Аналогічно } \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Два останні інтеграли самі по собі є корисними, наприклад, в геометричних додатках означеного інтеграла. З іншого боку цими формулами можливо користуватись як уже готовими.

$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } \int \sqrt{1-3x-x^2} dx &= \int \sqrt{1 - \left(\frac{9}{4} + 3x + x^2\right) + \frac{9}{4}} dx = \int \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2} dx = \\ &= \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2} \sqrt{1-3x-x^2} + \frac{13}{8} \arcsin \frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} + C = \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2} \sqrt{1-3x-x^2} + \frac{13}{8} \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{13}} + C. \end{aligned}$$

III Метод інтегрування дробово-раціональних функцій.

Розглядається обчислення інтегралів вигляду $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ - многочлени відповідно зі степенем m і n змінної x . нагадаємо, що степінь многочлена встановлюється найбільшим показником степені x цього виразу.

Якщо $m < n$, тоді дріб правильний, і його необхідно шляхом ділення многочлена чисельника на знаменник звести до суми многочлена результату ділення плюс уже правильний раціональний дріб. Згідно основної теореми алгебри многочлен $Q_n(x)$ завжди можливо записати у вигляді добутку лінійних на x множників типу $(x - \alpha)^k$, де k - кратність множника $(x - \alpha)$, на квадратні тричлени типу $(x^2 + px + q)$ з від'ємним дискримінантом, тобто $D = p^2 - 4q < 0$. Згідно цього

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x - \alpha)^k \cdots (x^2 + px + q) \cdots} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \cdots + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} + \cdots + \cdots, \text{ де } A_1, A_2, \dots, A_k, B, C, \dots$$

- деякі неозначені константи, для знаходження яких складають і розв'язують деяку алгебраїчну систему шляхом прирівнювання на основі рівності чисельників від коефіцієнтів при відповідно однакових степенях x . отримані після цього доданки інтегруються за допомогою інших методів інтегрування.

Приклад 3

$\int \frac{x^4}{x^3 + 8} dx = J$. Оскільки $m=4$, $n=3$ -дріб під інтегралом неправильний. Тому

$$\frac{x^4}{x^3 + 8} = \frac{x(x^3 + 8 - 8)}{x^3 + 8} = x - \frac{8x}{x^3 + 8}, \quad \text{тоді} \quad J = \int \left(x + \frac{8x}{x^3 + 8} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 8 \int \frac{x dx}{x^3 + 8} = \frac{x^2}{2} + 8J_1.$$

Для обчислення J_1 розглянемо дріб $\frac{x}{x^3 + 8}$ на суму простіших дробів:

$$\frac{x}{x^3 + 8} = \frac{x}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4} = \frac{A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)}{x^3 + 8}, \quad \text{звідки}$$

$$Ax^2 - 2Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C = x$$

$$x^0 \rightarrow 4A + 2C = 0$$

$$x^1 \rightarrow -2A + 2B + C = 1 \Rightarrow \begin{cases} 4A + 2C = 0 \\ -2A + 2B + C = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2A \\ -2A - 2A - 2A = 1 \\ B = -A \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}.$$

$$x^2 \rightarrow A + B = 0$$

$$\text{Отже, } J_1 = \int \left(\frac{-\frac{1}{6}}{x + 2} + \frac{\frac{1}{6}x + \frac{2}{6}}{x^2 - 2x + 4} \right) dx = -\frac{1}{6} \ln|x + 2| + \frac{1}{6} \int \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 4} dx = -\frac{1}{6} \ln|x + 2| + \frac{1}{6} J_2.$$

Знайдемо первісну $J_2 = \int \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 4} dx$;

$$d(x^2 - 2x + 4) = (2x - 2)dx, \text{ тоді}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 - 2x + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 6}{x^2 - 2x + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 4| + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x - 1}{\sqrt{3}}.$$

Тоді первісна J_1 може бути записана

$$J_1 = -\frac{1}{6} \ln|x+2| + \frac{1}{12} \ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x+2} \right| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Остаточню відповідь початкового інтеграла J буде

$$J = \int \frac{x^4 dx}{x^3 + 8} = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x+2} \right| + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} = C.$$

IV. Інтегрування ірраціональних функцій.

Якщо обчислюється $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$, тоді корисним є

скористатись підстановкою виду $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – спільний знаменник дробів

$$\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}.$$

V. Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Розглядаються інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$

А) Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = \sin x$

Б) Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = \cos x$

В) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = tg$

Г) Якщо R - довільна функція тоді застосовують універсальну тригонометричну підстановку $t = tg \frac{x}{2}$, звідки

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

2. Розглядаються інтеграли $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

А) Якщо $m = 2p, n = 2q, p, q > 0$, тоді

$$\sin^m x = (\sin^2 x)^p = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^p, \cos^n x = (\cos^2 x)^q = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^q$$

Б) Одне із чисел m чи n -непарне, наприклад, $m = 2p + 1$, тоді

$\sin^m x dx = \sin^{2p} x \sin x dx = -(1 - \cos^2 x)^p d \cos x$, тобто $t = \cos x$ спрощує підінтегральний вираз.

В) Перетворення добутку тригонометричних функцій в суму згідно відомих співвідношень:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x);$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} (-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

Приклад 4.

$\int \frac{\sin 2x dx}{3 + 4 \cos^2 x} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{3 + 4 \cos^2 x} = J$, функція під інтегралом непарна по $\sin x$, тоді $t = \cos x$, отже

$$J = -\int \frac{2tdt}{3+4t^2} = \left(\begin{array}{l} Z = 3+4t^2 \\ dt = 8tdt \\ 2tdt = \frac{dZ}{4} \end{array} \right) = -\int \frac{dZ}{4Z} = -\frac{1}{4} \ln|3+4t^2| = -\frac{1}{4} \ln|3+4\cos^2 x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t}} = \int \frac{2dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{tg \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{tg \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} \right| + C$$

$$\int \sin^4 2x dx = \int \left(\frac{1+\cos 8x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 8x \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x \right) + C.$$

Завдання 9

Знайти неозначені інтеграли.

Варіанти завдань для самостійного виконання

1. $\int (4x^2 + \frac{8}{x^5} + 12\sqrt[7]{x^3}) dx$; $\int 6e^{x^3} x^2 dx$; $\int 3xe^{2x} dx$; $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$; $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$.
2. $\int \left(3 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \right) dx$; $\int \frac{1}{(2x+1)^2+25} dx$; $\int x^2 \cos x dx$; $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx$; $\int \frac{dx}{x^3+8}$.
3. $\int (5\cos x - 6x^4 + \frac{1}{x}) dx$; $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$; $\int x4^x dx$; $\int \frac{(x+1)^3 dx}{x^2-x}$; $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$.
4. $\int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{3x^3} dx$; $\int 5^{x^2} x dx$; $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx$; $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx$; $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx$.
5. $\int (4\sin x - 3\cos x - 6\sqrt{x}) dx$; $\int \frac{x^2}{4x^3+1} dx$; $\int x \ln(x^2+1) dx$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$; $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$.
6. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} dx$; $\int \sin^4 x \cos x dx$; $\int \arctg \sqrt{x} dx$; $\int \frac{(7x-15)dx}{x^3-2x^2+5x}$; $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$.
7. $\int \frac{4x^2}{1+x^2} dx$; $\int \cos^3 x \sin x dx$; $\int \sqrt{x} \ln x dx$; $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.
8. $\int 9^x 3^x dx$; $\int \frac{e^x}{e^x-3} dx$; $\int \arccos x dx$; $\int \frac{2x-3}{x^2-7x+12} dx$; $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4} dx$.
9. $\int \frac{2e^{4x} + e^{2x} \sin x}{e^{2x}} dx$; $\int \frac{x^3}{x^4+4} dx$; $\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$; $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.
10. $\int \frac{1}{\cos 2x+1} dx$; $\int tg 2x dx$; $\int xe^{-x} dx$; $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

11. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$; $\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)} dx$; $\int 3x \sin x \cos x dx$;
 $\int \frac{(x^3 + 4x^2 - 2x + 1) dx}{x^4 + x}$; $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.
12. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; $\int \sqrt[4]{3x-5} dx$; $\int e^x \ln(2+e^x) dx$; $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.
13. $\int \frac{1}{x^2+5} dx$; $\int \frac{6}{\sqrt{1-9x^2}} dx$; $\int \sin(\ln x) dx$; $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$; $\int \cos^4 x dx$.
14. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$; $\int \frac{3}{\cos^2(5x+1)} dx$; $\int \ln^2 x dx$; $\int \frac{x dx}{x^3-1}$; $\int (1+2 \cos x)^2 dx$.
15. $\int (x+7) \cdot \left(2x - \frac{8}{x}\right) dx$; $\int \frac{(2x+1)}{x^2+x-6} dx$; $\int x \cos \frac{x}{3} dx$; $\int \frac{dx}{1+x^3}$; $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.
16. $\int \frac{2^x \cdot 4^x}{16^x} dx$; $\int \frac{4}{(3x-1)^8} dx$; $\int x^2 e^{2x} dx$; $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}$; $\int \sin^5 x dx$.
17. $\int \left(x \ln 5 + \frac{1}{x} \ln 2\right) dx$; $\int \frac{5 \ln^3 x - 9}{x} dx$; $\int \ln x dx$; $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$; $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$.
18. $\int tg^2 x dx$; $\int \frac{tg x - 2}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$; $\int \sin 5x \sin 6x dx$.
19. $\int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^2}} dx$; $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$; $\int x \sin x dx$; $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$; $\int \frac{dx}{\sin x}$.
20. $\int \frac{x^3+9x^2-1}{\sqrt[3]{x}} dx$; $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{\ln tg x}{\sin^2 x} dx$; $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.
21. $\int (x+8)^{10} dx$; $\int e^{\sin x} \cos x dx$; $\int e^{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$; $\int \frac{dx}{3+5 \cos x}$.
22. $\int e^{\frac{x}{2}} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$; $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$; $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$; $\int \sin at \cos btdt$.
23. $\int \frac{dx}{10x+3}$; $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx$; $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$; $\int \operatorname{ctg}^4 y dy$.
24. $\int \cos \frac{x+3}{3} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$; $\int e^{2x^2+\ln x} dx$; $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3}$; $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$.
25. $\int \frac{dx}{(5x+2)^2}$; $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$; $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$; $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$; $\int \sin^4 x dx$.
26. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$; $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; $\int \frac{x^3-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$; $\int \cos^2 5x dx$.
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$; $\int \cos(e^x) e^x dx$; $\int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}$; $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} dx$; $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$.
28. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$; $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$; $\int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}$; $\int \cos^7 x dx$.
29. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$; $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$; $\int (1-\sin 2x)^2 dx$.

$$30. \int \frac{x^2}{x+2} dx . \int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \int e^{-x^2} x^5 dx. \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}. \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

3.5 Означений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.

Запис вигляду $\int_a^b f(x)dx$ називають означеним інтегралом (інтегралом з означеними границями). Якщо для $f(x)$ існує первісна $F(x)$, тоді справедлива

формула Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Заміна змінної в означеному інтегралі виконується так

$$\int_a^b f(\varphi(x))\psi(x)dx = \left(\begin{array}{l} t = U(x) \\ dt = d\varphi(x) = \psi(x)dx \\ x = a \Rightarrow t_a = \varphi(a) \\ x = b \Rightarrow t_b = \varphi(b) \end{array} \right) = \int_{t_a}^{t_b} f(t)dt = F(t) \Big|_{t_a}^{t_b} = F(t_b) - F(t_a).$$

Формула інтегрування частини матиме вигляд $\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU$.

Приклад 1

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \left(\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{array} \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Приклад 2

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left(\begin{array}{l} U = \arcsin x \\ dV = dx \\ dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ V = x \end{array} \right) = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ -xdx = \frac{dt}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{4} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1$$

Завдання 10

Обчислити означені інтеграли

Варіанти завдань для самостійного виконання

1) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3};$

$\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$

$\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x} dx.$

- | | | | |
|---|--|--|---|
| 2) $\int_0^4 \sqrt{x} dx;$ | $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$ | $\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$ |
| 3) $\int_0^1 \frac{dx}{x+2};$ | $\int_0^1 (1+e^{3x})^2 e^{3x} dx.$ | $\int_1^e x^2 \ln x dx.$ | $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$ |
| 4) $\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\cos^2 x} dx;$ | $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ | $\int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}.$ |
| 5) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$ | $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ | $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$ | $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$ |
| 6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx;$ | $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$ | $\int_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}} dx.$ | $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$ |
| 7) $\int_4^5 (4-x)^3 dx;$ | $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$ | $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$ |
| 8) $\int_0^3 \sqrt{3x-1} dx;$ | $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ | $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$ |
| 9) $\int_0^{3\pi/2} \cos(x/3) dx;$ | $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$ | $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ | $\int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx.$ |
| 10) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{2 dx}{5 \cos^2 3x};$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$ | $\int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx.$ |
| 11) $\int_0^{\pi/8} e^{\cos x} \sin x dx;$ | $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$ | $\int_1^e x \ln x dx.$ |
| 12) $\int_{\sqrt{3}/3}^1 4e^{x^3} x^2 dx;$ | $\int_5^8 \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx.$ | $\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$ | $\int_0^1 \ln(x+1) dx.$ |
| 13) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{2\sqrt{4-9x^2}};$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx.$ | $\int_1^e x^2 \ln x dx.$ | $\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx.$ |
| 14) $\int_0^1 x e^{-x} dx;$ | $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ | $\int_0^{2\pi} x \sin 2x dx.$ |
| 15) $\int_2^3 x \ln(x-1) dx;$ | $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$ | $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$ | $\int_0^1 x e^{3x} dx.$ |
| 16) $\int_0^e (\ln x)^2 dx;$ | $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$ | $\int_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}} dx.$ | $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$ |
| 17) $\int_0^1 (2x+1)e^{3x} dx;$ | $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$ | $\int_0^a x \sqrt{a^2-x^2} dx.$ |
| 18) $\int_0^{\pi/6} (3x-1) \sin 2x dx;$ | $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$ |
| 19) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (x+4) \cos 2x dx;$ | $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$ | $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$ |

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 20) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ | $\int_0^1 (1 + e^{3x})^2 e^{3x} dx.$ | $\int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^2} dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$ |
| 21) $\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\cos^2 x} dx;$ | $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$ | $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$ |
| 22) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2};$ | $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ | $\int_1^{e-1} \ln(x + 1) dx.$ | $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx.$ |
| 23) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx;$ | $\int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}.$ | $\int_1^e x^2 \ln x dx.$ | $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$ |
| 24) $\int_4^5 (4 - x)^3 dx;$ | $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ | $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}.$ |
| 25) $\int_0^3 \sqrt{3x - 1} dx;$ | $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x + 5}}.$ | $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$ | $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$ |
| 26) $\int_0^{3\pi/2} \cos(x/3) dx;$ | $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x} - 1}.$ | $\int_1^2 (2 - x) e^{\frac{x}{2}} dx.$ | $\int_1^e \ln x dx.$ |
| 27) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{2 dx}{5 \cos^2 3x};$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$ | $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}.$ |
| 28) $\int_0^{\pi/8} e^{\cos x} \sin x dx;$ | $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ | $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}.$ |
| 29) $\int_{\sqrt{3}/3}^1 4e^{x^3} x^2 dx;$ | $\int_5^8 \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx.$ | $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$ |
| 30) $\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\cos^2 x} dx;$ | $\int_5^8 \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx.$ | $\int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^2} dx.$ | $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$ |

Варіанти завдань для самостійного виконання

1.

$$a) y = \sin \sqrt{3} + \frac{\sin^2 x}{3 \cos 6x}; \bar{o}) y = x^{\arcsin x}; \theta) \frac{y}{x} = e^y;$$

$$z) y = e^x + y^2, y'' - y' = 2(1 - x)$$

2.

$$a) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}; \bar{o}) y = \frac{(x-1)^2 \sqrt{9+x^2}}{12x^3}; \theta) \sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} - 5 = 0;$$

$$z) y = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, y'' = xy' + y + 1$$

3.

$$a) y = \arctg \sqrt{1 - e^{-x^3}}; \bar{o}) y = x^{2x} 5^x; \theta) x^y = \sin y;$$

$$z) y = \frac{4}{(x+2)^2}, 2y'' = 3y^2$$

4.

$$a) y = \frac{2}{3} \sqrt{(\arctg e^x)^3}; \bar{o}) y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}; \theta) 3x^2y + 2xy^2 - 5x + 1 = 0;$$

$$z) y = 1 + \csc e^x + \sin e^x, y'' - y' + ye^{2x} = 1$$

5.

$$a) y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \arctg e^x; \bar{o}) y = x^{x \sin x^3}; \theta) xy^2 + \ln y = 1;$$

$$z) y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}, xy'' + x(y')^2 - y' = 0$$

6.

$$a) y = \sqrt{\lg 4} - \frac{\cos^2 10x}{24 \sin 20x}; \bar{o}) y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}; \theta) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}};$$

$$z) y = e^x + \sin x, y'' + y' - 2y = \cos x - \sin x$$

7.

$$a) y = \ln \lg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right); \bar{o}) y = (\ctg)^{\sqrt{x}} e^y + e^x - x^3 = 0;$$

$$z) y = 5e^{5x} + 3e^{3x}, y'' - 5y' + 6y = 0$$

8.

$$a) y = \sqrt{\frac{2}{3} \arctg \frac{3x-1}{\sqrt{6x}}}; \bar{o}) y = \frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}; \theta) e^{xy} + \ln y - 3x = 0;$$

$$z) y = e^{2x}(3+4x), y'' - 4y' + 4y = 0$$

9.

$$a) y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x; \bar{o}) y = (\tg x)^{\cos x}; \theta) \sin xy + \cos xy = 1;$$

$$z) y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 6x + 4), y'''(x-1) - y'' = 0$$

10.

$$a)y = \sin \ln \frac{1}{2} + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}; \bar{o})y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3}; \theta)x + y + x \cos y = 0;$$

$$z)y = x + \sin 2x, y'' + 4y = 4x$$

11.

$$a)y = \ln(e^x + \sqrt{3 + 2x}); \bar{o})y = x^{\frac{1}{x}}; \theta)x + y = e^y \operatorname{arctg} x;$$

$$z)y = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-3x}, y'' = 6(y - 2e^{2x} - 3e^{3x})$$

12.

$$a)y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln \sin x; \bar{o})y = \frac{(x+1)^3 \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}; \theta)\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$z)y = \ln \sqrt{x} + 1 + x, y''' = 8(y' - 1)^3$$

13.

$$a)y = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \bar{o})y = x^{\sqrt{x}}; \theta)x \operatorname{tg} y = y \operatorname{tg} x;$$

$$z)y = \frac{1}{(x-2)^2}, 3y' + (x-2)y''$$

14.

$$a)y = x\sqrt{1 - x^2} + \ln \cos 2x; \bar{o})y = (x - x^2)^{x-1}; \theta)y^3 - 3y + 2x - x^2 y^2;$$

$$z)y = e^{2x} + 2x + 2x^2, y'' = 2(y' - 4x)$$

15.

$$a)y = \sin \sqrt{3} + \frac{\sin^2 x}{3 \cos 6x}; \bar{o})y = x^{\arcsin x}; \theta)\frac{y}{x} = e^y;$$

$$z)y = e^x + y^2, y'' - y' = 2(1 - x)$$

16.

$$a)y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}); \bar{o})y = x^{1-x^2}; \theta)x \sin y - \cos y - \cos x = 0;$$

$$z)y = x - e^{1-3x}, y'' = 9(y - x)$$

17.

$$a)y = x \arcsin 2x + \sqrt{1 - x^2}; \bar{o})y = (\cos x)^{\ln x}; \theta)e^{xy} = 1 + xy;$$

$$z)y = \sin 2x - \cos 4x, y'' = 4(3 \cos 4x - y)$$

18.

$$a)y = e^{x^2 \arcsin(1-2x)}; \bar{o})y = (\cos x)^{\ln x}; \theta)y = e^{x^2 - 2xy};$$

$$z)y = (1 - x)^2 + \ln(1 + x), (1 + x)y''' = 2(2 - y'')$$

19.

$$a)y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos \ln \operatorname{tg} x; \bar{o})y = x^9 (x-5)^8 (x+4)^7 \sqrt{x^2 + 3}; \theta)xy = \arcsin(x - y);$$

$$z)y = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}, y''' = 6(y' - x + 3x^2 - x^3)$$

20.

$$a)y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \arcsin \sqrt{1 - x^2}; \bar{o})y = e^{r^{2x}}; \theta)x^2 y^3 = e^{x+2y};$$

$$z)y = x + \ln \sin x, \sin xy''' + 20xy'' = 0$$

21.

$$a)y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1+x}{1-x}; \bar{\theta})y = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\operatorname{ctg} 2x}; \theta)e^{x+y} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$z)y = \sqrt{0.01 + e^{1-x^2}}, xy'' + (2x^2 - 1)y' = 0$$

22.

$$a)y = \sqrt{1 + \ln^2 \frac{x}{2}}; \bar{\theta})y = \left(x + \frac{1}{x} \right)^x; \theta)\operatorname{tg} xy = \ln(x - y);$$

$$z)y = e^x + e^{2x} + 4e^{3x}, y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$$

23.

$$a)y = xe^{1-\cos x}; \bar{\theta})y = \sqrt{\frac{x(x-1)^3}{(x+1)^5(x-2)}}; \theta)x^y = y^x;$$

$$z)y = 2xe^{-3x}, y'' + 6y' + 9y = 0$$

24.

$$a)y = e^{\sin^2 3x} \cos 6x; \bar{\theta})y = \left(\frac{1}{x^2} \right)^{2\sqrt{x}}; \theta)\ln(y - x) = \frac{1}{x - y};$$

$$z)y = \frac{9}{8} \sin 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x, y'' + 4y = 5 \sin 2x$$

25.

$$a)y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2}); \bar{\theta})y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x-1}}; \theta)\sqrt{xy} = 1 + (x - y)^2;$$

$$z)y = \sin 3xe^{-2x}, y'' + 4y' + 13y = 0$$

26.

$$a)y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}; \bar{\theta})y = \frac{(x-1)^2 \sqrt{9+x^2}}{12x^3}; \theta)\sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} - 5 = 0;$$

$$z)y = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, y'' = xy' + y + 1$$

27.

$$a)y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} - \frac{\cos^2 10x}{24 \sin 20x}; \bar{\theta})y = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}; \theta)x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

$$z)y = e^x + \sin x, y'' + y' - 2y = \cos x - \sin x$$

28.

$$a)y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg}^x)^3}; \bar{\theta})y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}; \theta)3x^2y - 5x + 1 = 0;$$

$$z)y = 1 + \operatorname{cose}^x + \sin e^x, y'' - y' + ye^{2x} = 1$$

29.

$$a)y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg} e^x; \bar{\theta})y = x^{x \sin x^3}; \theta)xy^2 + \ln y = 1;$$

$$z)y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}, xy'' + x(y')^2 - y' = 0$$

30.

$$a) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}; \delta) y = \frac{(x-1)^2 \sqrt{9+x^2}}{12x^3}; \epsilon) \sqrt{y} + e^{x\sqrt{y}} - 5 = 0;$$

$$e) y = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, y'' = xy' + y + 1$$

3.3 Дослідження функції методами диференціального числення та побудова їх графіків.

При побудові графіка даної функції доцільно користуватися наступною схемою;

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) дослідити функцію на парність, непарність і періодичність;
- 3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- 4) знайти проміжки знакосталості функції;
- 5) знайти асимптоти;
- 6) знайти проміжки зростання і спадання, екстремуми;
- 7) знайти проміжки опуклості вниз та вгору, точки перетину.

Зауваження. У деяких випадках зручно змінювати порядок указаних пунктів.

Приклад.

Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{4-x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язок.

Область визначення $D(f)$ функції – вся числова вісь, крім точок $x = -2$ і $x = 2$, тобто $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Функція неперіодична. Дослідимо її на парність і непарність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x).$$

Отже, дана функція непарна і її графік симетричний відносно початку координат. Тому далі будемо досліджувати функцію тільки при $x \geq 0$. Знайдемо точки перетину графіка з осями координат:

з віссю Оу графік перетинається при $x = 0$, звідси $y = f(0) = 0$, тобто $M(0;0)$ – точка перетину з віссю Оу;

з віссю Ох графік перетинається, якщо $f(x) = 0$, тобто $y = \frac{x^3}{4-x^2} = 0$, звідки $x = 0$.

0. Таким чином, $M(0;0)$ – єдина точка перетину графіка з осями координат.

Знаходимо проміжки знакосталості функції:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{4-x^2} > 0 \Leftrightarrow x(4-x^2) > 0 \text{ і оскільки ми розглядаємо тільки}$$

випадок $x \geq 0$, то одержуємо $0 < x < 2$.

Аналогічно $f(x) < 0$ при $x > 2$.

Далі, $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty$ тобто пряма $x = 2$ – вертикальна асимптота. Звідси, в силу симетрії, впливає, що пряма $x = -2$ – також вертикальна асимптота.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1,$$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x \right) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{4-x^2} \right) = 0$, тобто пряма $y = -x$ – похила асимптота при $x \rightarrow +\infty$ (те саме і при $x \rightarrow -\infty$). Горизонтальних асимптот графік немає. Знайдемо проміжки монотонності і екстремуми функції, досліджуючи першу похідну:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4-x^2} \right)' = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}.$$

Звідси видно (див. рис. 1), що при $x \geq 0$ функція має максимум в точці $x = 2\sqrt{3}$ (причому $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} = -3\sqrt{3} \approx -5.2$), зростає на $(0; 2)$ і $(2; 2\sqrt{3})$ і спадає на $(2\sqrt{3}; +\infty)$.

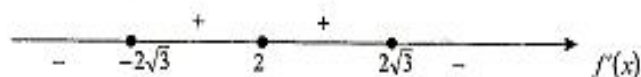
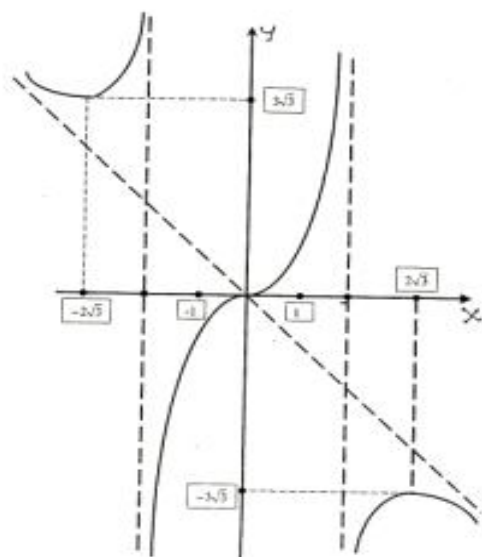


Рис. 1

Щоб визначити проміжки опуклості і точки перегину, обчислимо другу похідну:

$$f''(x) = \frac{8x(12x+x^2)}{(4-x^2)^3}$$

Звідси зрозуміло, що при $x \geq 0$ функція випукла вгору (тобто $f'''(x) < 0$) на $(2; +\infty)$ і випукла вниз (тобто $f''(x) > 0$) на $(0; 2)$, $x = 0$ - точка перегину.

Враховуючи проведено дослідження, будуємо графік функції при $x \geq 0$, а потім симетрично відображаємо його відносно початку координат (див. рис.2).

Рис.2

Завдання 8

Дослідити методами диференціального числення функції та побудувати їх графіки.

Варіанти завдань для самостійного виконання

1.

$$a) y = \frac{x^2}{3} - 4x; б) y = \frac{x}{1+x^2}$$

2.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1; б) y = x^3 e^{-3x}$$

3.

$$a) y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; б) y = \frac{e^x}{x}$$

4.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1; б) y = x - \ln x$$

5.

$$a) y = 2 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \text{ ж } б) y = \frac{x^2}{x-1}$$

6.

$$a) y = x^4 - 2x^2 + 5; б) y = 2x^2 - \ln x$$

7.

$$a) y = 5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}; б) y = x^2 e^{-x}$$

8.

$$a) y = 2x^2 - 3x^2; б) y = (x-5)e^{-2x}$$

9.

$$a) y = 10 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}; б) y = x e^{\frac{x^2}{2}}$$

10.

$$a) y = x - \frac{x^5}{5}; б) y = \ln(9+x^2)$$

11.

$$a)y = 2x^3 - 9x + 12x - 9; \bar{o})y = \frac{x^3}{x-1}$$

12.

$$a)y = x^4 - 4x^3 + 4x^2; \bar{o})y = x^3 e^{-x}$$

13.

$$a)y = x^4 - 4x^2 + 2; \bar{o})y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}$$

14.

$$a)y = 2x^3 + 3x^2 - 5; \bar{o})y = x e^{-x}$$

15.

$$a)y = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + x^2; \bar{o})y = x^2 - 2 \ln x$$

16.

$$a)y = 12x^2 - 8x^3 - 2; \bar{o})y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$$

17.

$$a)y = 3x^2 - 2 - x^3; \bar{o})y = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

18.

$$a)y = x^2 + \frac{x^5}{10}; \bar{o})y = \ln(4 + x^2)$$

19.

$$a)y = 16x^4 - 8x^2 + 1; \bar{o})y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$$

20.

$$a)y = 2x^3 - 3x^2 - 4; \bar{o})y = (3-x)e^{-x}$$

21.

$$a)y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1; \bar{o})y = x - \ln(x+1)$$

22.

$$a)y = 6x - 8x^3; \bar{o})y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

23.

$$a)y = \frac{3x^3}{4} - \frac{x^2}{8} - 2; \bar{o})y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$$

24.

$$a)y = 3x - x^3; \bar{o})y = (x^2 + 2)e^{-x^2}$$

25.

$$a)y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1; \bar{o})y = x^3 e^{-3x}$$

26.

$$a)y = x^4 - 2x^2 + 5; \bar{o})y = 2x^2 - \ln x$$

27.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1; б) y = x - \ln x$$

28.

$$a) y = 2 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}; б) y = \frac{x^2}{x-1}$$

29.

$$a) y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1; б) y = x^3 e^{-3x}$$

30.

$$a) y = \frac{x^3}{5} - x^2 + 3x; б) y = 2x - \ln x$$

3.4 Неозначений інтеграл. Основні методи інтегрування.

Якщо задана деяка функція $F(x)$, тоді її похідною є інша функція $f(x)$, тобто

$$F'(x) = f(x) \quad (*)$$

Сформулюємо обернену задачу: як, знаючи функцію $f(x)$, знайти таку іншу функцію $F(x)$, щоб виконувалась рівність (*). Відповідь на таке питання можливо отримати шляхом знаходження так званої первісної для $f(x)$, і цією функцією буде саме $F(x)$. Математично цю дію записують як

$$\int f(x) dx = F(x)$$

Наприклад, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Перевіримо правильність знайденої первісної:

$$\left(\frac{x^4}{4} \right)' = \frac{1}{4} (x^4)' = x^3, \text{ тобто рівність } (*) \text{ в конкретному випадку справджується.}$$

Всі можливі первісні для функції $f(x)$ відрізняються між собою на деяку константу C , $C \in \mathbf{R}$. Загальне сімейство всіх первісних вигляду $F(x) + C$ для функції $f(x)$ утворює відповідь неозначеного інтеграла для цієї ж функції $f(x)$, тобто

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (**)$$

Зауваження. Первісна $F(x)$ для $f(x)$ не завжди існує, а якщо існує, то ця первісна завжди єдина незалежно від способу її знаходження.

Наприклад, для $f(x) = e^{-x^2}$ первісної не існує.

На основі рівності (**) складена таблиця неозначених інтегралів основних елементарних функцій.

$$1 \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1;$$

$$2 \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C;$$

$$3 \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$4 \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$5 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$5^* \int e^x dx = e^x + C ;$$

$$6 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C ;$$

$$7 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ;$$

$$8 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C ;$$

$$9 \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C ;$$

$$9^* \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C ;$$

$$10 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C ;$$

$$11 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C .$$

Властивості неозначеного інтеграла:

$$a) \int [C_1 f_1(x) \pm C_2 f_2(x)] dx = C_1 \int f_1(x) dx \pm C_2 \int f_2(x) dx$$

$$б) \int df(x) = f(x) + C$$

$$в) d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$г) \text{ Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ тоді для будь-якої } U(x), \int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C .$$

Приклад 1.

$$\int \frac{3x - 7x\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = 3 \int \frac{dx}{x} - 7 \int x^{\frac{4}{3}-2} dx = 3 \ln|x| - 7 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3 \ln|x| - 21\sqrt[3]{x} + C ;$$

$$\int \sin 7x dx = \int \sin 7x \frac{d(7x)}{7} = \frac{1}{7} \int \sin 7x d(7x) = -\frac{1}{7} \cos 7x + C ;$$

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C .$$

I Метод заміни змінної в неозначеному інтегралі.

Якщо обчислюється $\int f(u(x))\psi(x)dx$, при цьому $\psi(x)dx = du(x)$, тоді для спрощення при знаходженні відповіді такого інтеграла зручно ввести нову змінну $t=U(x)$, тоді $dt = du(x) = \psi(x)dx$

В новій змінній t наш інтеграл прийме вигляд $\int F(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C$.

$$\text{Наприклад, } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-4x}} = \left(\begin{array}{l} t-3-4x \\ dt = -4dx \\ dx = -\frac{dt}{4} \end{array} \right) = \int \frac{-\frac{dt}{4}}{\sqrt[4]{t}} = -\frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{4}} dt = -\frac{1}{4} \frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = -\frac{1}{3} (3-4x)^{\frac{3}{4}} + C .$$

II. Метод інтегрування частинами.

Основна формула цього **метода** $\int U dV = UV - \int V dU$, $U=U(x)$, $V=V(x)$ Даний метод стандартно використовується, якщо під знаком інтеграла є добуток

степеневій функції на тригонометричну чи показникову, присутність під інтегралом логарифмічної або будь-якої оберненої тригонометричної функції, добуток позикової функції на тригонометричну. Також цей метод доцільний в деяких окремих випадках. За функцію $U(x)$ звичайно приймають степеневу функцію (при диференціюванні степінь x понижується), логарифмічну чи обернену тригонометричну (оскільки для цих функцій відносно легко знаходяться похідні згідно відповідної таблиці). В ряді випадків даний метод застосовують послідовно декілька разів.

Приклад2.

$$\int (3x-4) \cos 2x dx = \left(\begin{array}{l} U = 3x-4 \\ dV = \cos 2x dx \\ dU = 3 dx \\ V = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right) = \frac{1}{2} (3x-4) \sin 2x - \frac{3}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} (3x-4) \sin 2x + \frac{3}{4} \cos 2x + C$$

Корисним є обчислення інтеграла

$$J = \int \sqrt{x^2 + A} dx = \left(\begin{array}{l} U = \sqrt{x^2 + A} \\ dV = dx \\ dU = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + A}} \\ V = x \end{array} \right) = x \sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx = x \sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = x \sqrt{x^2 + A} - J + A \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| = J$$

$$\text{Звідки } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$$

$$\text{Аналогічно } \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Два останні інтеграли самі по собі є корисними, наприклад, в геометричних додатках означеного інтеграла. З іншого боку цими формулами можливо користуватись як уже готовими.

$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } \int \sqrt{1-3x-x^2} dx &= \int \sqrt{1 - \left(\frac{9}{4} + 3x + x^2\right) + \frac{9}{4}} dx = \int \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2} dx = \\ &= \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2} \sqrt{1-3x-x^2} + \frac{13}{8} \arcsin \frac{x + \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} + C = \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2} \sqrt{1-3x-x^2} + \frac{13}{8} \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{13}} + C. \end{aligned}$$

III Метод інтегрування дробово-раціональних функцій.

Розглядається обчислення інтегралів вигляду $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ - многочлени відповідно зі степенем m і n змінної x . нагадаємо, що степінь многочлена встановлюється найбільшим показником степені x цього виразу.

Якщо $m < n$, тоді дріб правильний, і його необхідно шляхом ділення многочлена чисельника на знаменник звести до суми многочлена результату ділення плюс уже правильний раціональний дріб. Згідно основної теореми алгебри многочлен $Q_n(x)$ завжди можливо записати у вигляді добутку лінійних на x множників типу $(x - \alpha)^k$, де k - кратність множника $(x - \alpha)$, на квадратні тричлени типу $(x^2 + px + q)$ з від'ємним дискримінантом, тобто $D = p^2 - 4q < 0$. Згідно цього

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x - \alpha)^k \cdots (x^2 + px + q) \cdots} = \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \cdots + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} + \cdots + \cdots, \text{ де } A_1, A_2, \dots, A_k, B, C, \dots$$

- деякі неозначені константи, для знаходження яких складають і розв'язують деяку алгебраїчну систему шляхом прирівнювання на основі рівності чисельників від коефіцієнтів при відповідно однакових степенях x . отримані після цього доданки інтегруються за допомогою інших методів інтегрування.

Приклад 3

$\int \frac{x^4}{x^3 + 8} dx = J$. Оскільки $m=4$, $n=3$ -дріб під інтегралом неправильний. Тому

$$\frac{x^4}{x^3 + 8} = \frac{x(x^3 + 8 - 8)}{x^3 + 8} = x - \frac{8x}{x^3 + 8}, \quad \text{тоді} \quad J = \int \left(x + \frac{8x}{x^3 + 8} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 8 \int \frac{x dx}{x^3 + 8} = \frac{x^2}{2} + 8J_1.$$

Для обчислення J_1 розглянемо дріб $\frac{x}{x^3 + 8}$ на суму простіших дробів:

$$\frac{x}{x^3 + 8} = \frac{x}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4} = \frac{A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2)}{x^3 + 8}, \quad \text{звідки}$$

$$Ax^2 - 2Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C = x$$

$$x^0 \rightarrow 4A + 2C = 0$$

$$x^1 \rightarrow -2A + 2B + C = 1 \Rightarrow \begin{cases} 4A + 2C = 0 \\ -2A + 2B + C = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2A \\ -2A - 2A - 2A = 1 \\ B = -A \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{3}.$$

$$x^2 \rightarrow A + B = 0$$

$$\text{Отже, } J_1 = \int \left(\frac{-\frac{1}{6}}{x + 2} + \frac{\frac{1}{6}x + \frac{2}{6}}{x^2 - 2x + 4} \right) dx = -\frac{1}{6} \ln|x + 2| + \frac{1}{6} \int \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 4} dx = -\frac{1}{6} \ln|x + 2| + \frac{1}{6} J_2.$$

Знайдемо первісну $J_2 = \int \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 4} dx$;

$$d(x^2 - 2x + 4) = (2x - 2)dx, \text{ тоді}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 - 2x + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 6}{x^2 - 2x + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 4| + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{\sqrt{3}}.$$

Тоді первісна J_1 може бути записана

$$J_1 = -\frac{1}{6} \ln|x+2| + \frac{1}{12} \ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x+2} \right| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Остаточню відповідь початкового інтеграла J буде

$$J = \int \frac{x^4 dx}{x^3 + 8} = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x+2} \right| + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} = C.$$

IV. Інтегрування ірраціональних функцій.

Якщо обчислюється $\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r}{s}} \right) dx$, тоді корисним є

скористатись підстановкою виду $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – спільний знаменник дробів

$$\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}.$$

V. Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Розглядаються інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$

А) Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = \sin x$

Б) Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = \cos x$

В) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді $t = tg$

Г) Якщо R - довільна функція тоді застосовують універсальну тригонометричну підстановку $t = tg \frac{x}{2}$, звідки

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

2. Розглядаються інтеграли $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

А) Якщо $m = 2p, n = 2q, p, q > 0$, тоді

$$\sin^m x = (\sin^2 x)^p = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^p, \cos^n x = (\cos^2 x)^q = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^q$$

Б) Одне із чисел m чи n -непарне, наприклад, $m = 2p + 1$, тоді

$\sin^m x dx = \sin^{2p} x \sin x dx = -(1 - \cos^2 x)^p d \cos x$, тобто $t = \cos x$ спрощує підінтегральний вираз.

В) Перетворення добутку тригонометричних функцій в суму згідно відомих співвідношень:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x);$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} (-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

Приклад 4.

$\int \frac{\sin 2x dx}{3 + 4 \cos^2 x} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{3 + 4 \cos^2 x} = J$, функція під інтегралом непарна по $\sin x$, тоді $t = \cos x$, отже

$$J = -\int \frac{2tdt}{3+4t^2} = \left(\begin{array}{l} Z = 3+4t^2 \\ dt = 8tdt \\ 2tdt = \frac{dZ}{4} \end{array} \right) = -\int \frac{dZ}{4Z} = -\frac{1}{4} \ln|3+4t^2| = -\frac{1}{4} \ln|3+4\cos^2 x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t}} = \int \frac{2dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{tg \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{tg \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} \right| + C$$

$$\int \sin^4 2x dx = \int \left(\frac{1+\cos 8x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 8x \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x \right) + C.$$

Завдання 9

Знайти неозначені інтеграли.

Варіанти завдань для самостійного виконання

1. $\int (4x^2 + \frac{8}{x^5} + 12\sqrt[7]{x^3}) dx$; $\int 6e^{x^3} x^2 dx$; $\int 3xe^{2x} dx$; $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$; $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$.
2. $\int \left(3 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \right) dx$; $\int \frac{1}{(2x+1)^2+25} dx$; $\int x^2 \cos x dx$; $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx$; $\int \frac{dx}{x^3+8}$.
3. $\int (5\cos x - 6x^4 + \frac{1}{x}) dx$; $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$; $\int x4^x dx$; $\int \frac{(x+1)^3 dx}{x^2-x}$; $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$.
4. $\int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{3x^3} dx$; $\int 5^{x^2} x dx$; $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx$; $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x} dx$; $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx$.
5. $\int (4\sin x - 3\cos x - 6\sqrt{x}) dx$; $\int \frac{x^2}{4x^3+1} dx$; $\int x \ln(x^2+1) dx$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$; $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$.
6. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} dx$; $\int \sin^4 x \cos x dx$; $\int \arctg \sqrt{x} dx$; $\int \frac{(7x-15)dx}{x^3-2x^2+5x}$; $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$.
7. $\int \frac{4x^2}{1+x^2} dx$; $\int \cos^3 x \sin x dx$; $\int \sqrt{x} \ln x dx$; $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.
8. $\int 9^x 3^x dx$; $\int \frac{e^x}{e^x-3} dx$; $\int \arccos x dx$; $\int \frac{2x-3}{x^2-7x+12} dx$; $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4} dx$.
9. $\int \frac{2e^{4x} + e^{2x} \sin x}{e^{2x}} dx$; $\int \frac{x^3}{x^4+4} dx$; $\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$; $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.
10. $\int \frac{1}{\cos 2x+1} dx$; $\int tg 2x dx$; $\int xe^{-x} dx$; $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

11. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$; $\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)} dx$; $\int 3x \sin x \cos x dx$;
 $\int \frac{(x^3 + 4x^2 - 2x + 1) dx}{x^4 + x}$; $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.
12. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; $\int \sqrt[4]{3x-5} dx$; $\int e^x \ln(2+e^x) dx$; $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.
13. $\int \frac{1}{x^2+5} dx$; $\int \frac{6}{\sqrt{1-9x^2}} dx$; $\int \sin(\ln x) dx$; $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$; $\int \cos^4 x dx$.
14. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$; $\int \frac{3}{\cos^2(5x+1)} dx$; $\int \ln^2 x dx$; $\int \frac{x dx}{x^3-1}$; $\int (1+2 \cos x)^2 dx$.
15. $\int (x+7) \cdot (2x - \frac{8}{x}) dx$; $\int \frac{(2x+1)}{x^2+x-6} dx$; $\int x \cos \frac{x}{3} dx$; $\int \frac{dx}{1+x^3}$; $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.
16. $\int \frac{2^x \cdot 4^x}{16^x} dx$; $\int \frac{4}{(3x-1)^8} dx$; $\int x^2 e^{2x} dx$; $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}$; $\int \sin^5 x dx$.
17. $\int (x \ln 5 + \frac{1}{x} \ln 2) dx$; $\int \frac{5 \ln^3 x - 9}{x} dx$; $\int \ln x dx$; $\int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}$; $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$.
18. $\int tg^2 x dx$; $\int \frac{tg x - 2}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$; $\int \sin 5x \sin 6x dx$.
19. $\int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^2}} dx$; $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$; $\int x \sin x dx$; $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$; $\int \frac{dx}{\sin x}$.
20. $\int \frac{x^3+9x^2-1}{\sqrt[3]{x}} dx$; $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{\ln tg x}{\sin^2 x} dx$; $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.
21. $\int (x+8)^{10} dx$; $\int e^{\sin x} \cos x dx$; $\int e^{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$; $\int \frac{dx}{3+5 \cos x}$.
22. $\int e^{\frac{x}{2}} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$; $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$; $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$; $\int \sin at \cos btdt$.
23. $\int \frac{dx}{10x+3}$; $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx$; $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$; $\int \operatorname{ctg}^4 y dy$.
24. $\int \cos \frac{x+3}{3} dx$; $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$; $\int e^{2x^2+\ln x} dx$; $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3}$; $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$.
25. $\int \frac{dx}{(5x+2)^2}$; $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$; $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$; $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$; $\int \sin^4 x dx$.
26. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$; $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; $\int \frac{x^3-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$; $\int \cos^2 5x dx$.
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$; $\int \cos(e^x) e^x dx$; $\int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}$; $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} dx$; $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$.
28. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$; $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$; $\int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}$; $\int \cos^7 x dx$.
29. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$; $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$; $\int (1-\sin 2x)^2 dx$.

$$30. \int \frac{x^2}{x+2} dx . \int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \int e^{-x^2} x^5 dx. \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}. \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

3.5 Означений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.

Запис вигляду $\int_a^b f(x)dx$ називають означеним інтегралом (інтегралом з означеними границями). Якщо для $f(x)$ існує первісна $F(x)$, тоді справедлива

$$\text{формула Ньютона-Лейбніца: } \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Заміна змінної в означеному інтегралі виконується так

$$\int_a^b f(\varphi(x))\psi(x)dx = \left(\begin{array}{l} t = U(x) \\ dt = d\varphi(x) = \psi(x)dx \\ x = a \Rightarrow t_a = \varphi(a) \\ x = b \Rightarrow t_b = \varphi(b) \end{array} \right) = \int_{t_a}^{t_b} f(t)dt = F(t) \Big|_{t_a}^{t_b} = F(t_b) - F(t_a).$$

$$\text{Формула інтегрування частини матиме вигляд } \int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU.$$

Приклад 1

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \left(\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{array} \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Приклад 2

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left(\begin{array}{l} U = \arcsin x \\ dV = dx \\ dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ V = x \end{array} \right) = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\left(\begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ -xdx = \frac{dt}{2} \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{3}{4} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1$$

Завдання 10

Обчислити означені інтеграли

Варіанти завдань для самостійного виконання

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x^3};$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$$

$$\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x} dx.$$

- | | | | |
|---|--|--|---|
| 2) $\int_0^4 \sqrt{x} dx;$ | $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$ | $\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx.$ |
| 3) $\int_0^1 \frac{dx}{x+2};$ | $\int_0^1 (1+e^{3x})^2 e^{3x} dx.$ | $\int_1^e x^2 \ln x dx.$ | $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$ |
| 4) $\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\cos^2 x} dx;$ | $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ | $\int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}.$ |
| 5) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$ | $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ | $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$ | $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$ |
| 6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx;$ | $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$ | $\int_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}} dx.$ | $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$ |
| 7) $\int_4^5 (4-x)^3 dx;$ | $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$ | $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$ |
| 8) $\int_0^3 \sqrt{3x-1} dx;$ | $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ | $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$ |
| 9) $\int_0^{3\pi/2} \cos(x/3) dx;$ | $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$ | $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ | $\int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx.$ |
| 10) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{2 dx}{5 \cos^2 3x};$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$ | $\int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^2} dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx.$ |
| 11) $\int_0^{\pi/8} e^{\cos x} \sin x dx;$ | $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$ | $\int_1^e x \ln x dx.$ |
| 12) $\int_{\sqrt{3}/3}^1 4e^{x^3} x^2 dx;$ | $\int_5^8 \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx.$ | $\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$ | $\int_0^1 \ln(x+1) dx.$ |
| 13) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{2\sqrt{4-9x^2}};$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x dx.$ | $\int_1^e x^2 \ln x dx.$ | $\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx.$ |
| 14) $\int_0^1 x e^{-x} dx;$ | $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ | $\int_0^{2\pi} x \sin 2x dx.$ |
| 15) $\int_2^3 x \ln(x-1) dx;$ | $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$ | $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$ | $\int_0^1 x e^{3x} dx.$ |
| 16) $\int_0^e (\ln x)^2 dx;$ | $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$ | $\int_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}} dx.$ | $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$ |
| 17) $\int_0^1 (2x+1)e^{3x} dx;$ | $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$ | $\int_0^a x \sqrt{a^2-x^2} dx.$ |
| 18) $\int_0^{\pi/6} (3x-1) \sin 2x dx;$ | $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$ |
| 19) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (x+4) \cos 2x dx;$ | $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$ | $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$ |

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 20) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ | $\int_0^1 (1 + e^{3x})^2 e^{3x} dx.$ | $\int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^2} dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$ |
| 21) $\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\cos^2 x} dx;$ | $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$ | $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$ |
| 22) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2};$ | $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$ | $\int_1^{e-1} \ln(x + 1) dx.$ | $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx.$ |
| 23) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx;$ | $\int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}.$ | $\int_1^e x^2 \ln x dx.$ | $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$ |
| 24) $\int_4^5 (4 - x)^3 dx;$ | $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$ | $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}.$ |
| 25) $\int_0^3 \sqrt{3x - 1} dx;$ | $\int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x + 5}}.$ | $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$ | $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$ |
| 26) $\int_0^{3\pi/2} \cos(x/3) dx;$ | $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x} - 1}.$ | $\int_1^2 (2 - x) e^{\frac{x}{2}} dx.$ | $\int_1^e \ln x dx.$ |
| 27) $\int_{\pi/12}^{\pi/3} \frac{2 dx}{5 \cos^2 3x};$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$ | $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}.$ |
| 28) $\int_0^{\pi/8} e^{\cos x} \sin x dx;$ | $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ | $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$ | $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}.$ |
| 29) $\int_{\sqrt{3}/3}^1 4e^{x^3} x^2 dx;$ | $\int_5^8 \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx.$ | $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$ | $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$ |
| 30) $\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\cos^2 x} dx;$ | $\int_5^8 \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx.$ | $\int_0^{0.5} \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^2} dx.$ | $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$ |

Завдання 5

За даними \bar{a} , \bar{b} , $|\bar{m}|$, $|\bar{n}|$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n})$ знайти $pr_{\bar{a}} \bar{b}$, $|\bar{a} \times \bar{b}|$, $|\bar{a}|$

1. $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
2. $\bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
3. $\bar{a} = -\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
4. $\bar{a} = -2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
5. $\bar{a} = 4\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = -\bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
6. $\bar{a} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
7. $\bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
8. $\bar{a} = 3\bar{m} - 2\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
9. $\bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
10. $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
11. $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
12. $\bar{a} = -2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
13. $\bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
14. $\bar{a} = -4\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 4$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
15. $\bar{a} = -5\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
16. $\bar{a} = \bar{m} + 5\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
17. $\bar{a} = -\bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{b} = 5\bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
18. $\bar{a} = 2\bar{m} + 5\bar{n}$, $\bar{b} = -\bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
19. $\bar{a} = -2\bar{m} + 5\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
20. $\bar{a} = -\bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
21. $\bar{a} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;

22. $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{e} = -\bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
23. $\bar{a} = -2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
24. $\bar{a} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{e} = -2\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
25. $\bar{a} = -\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{e} = 2\bar{m} + 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
26. $\bar{a} = 3\bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
27. $\bar{a} = 4\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
28. $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{e} = 5\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
29. $\bar{a} = -2\bar{m} + 7\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
30. $\bar{a} = 4\bar{m} - 5\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
31. $\bar{a} = 5\bar{m} - 4\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 4$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
32. $\bar{a} = 3\bar{m} + 5\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
33. $\bar{a} = 2\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{e} = 2\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
34. $\bar{a} = 2\bar{m} - 6\bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
35. $\bar{a} = 3\bar{m} + 7\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
36. $\bar{a} = -2\bar{m} - 9\bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
37. $\bar{a} = 3\bar{m} + 8\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} + 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
38. $\bar{a} = -4\bar{m} + 5\bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
39. $\bar{a} = -5\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
40. $\bar{a} = -\bar{m} + 7\bar{n}$, $\bar{e} = 5\bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 4$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
41. $\bar{a} = 2\bar{m} + 8\bar{n}$, $\bar{e} = -3\bar{m} - 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 4$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
42. $\bar{a} = -2\bar{m} + 8\bar{n}$, $\bar{e} = 5\bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;

43. $\bar{a} = 5\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} + 7\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
44. $\bar{a} = \bar{m} - 5\bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
45. $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{e} = 5\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
46. $\bar{a} = 6\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 4$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
47. $\bar{a} = 6\bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
48. $\bar{a} = -6\bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{e} = 2\bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
49. $\bar{a} = 6\bar{m} - 4\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 4$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
50. $\bar{a} = -6\bar{m} - 5\bar{n}$, $\bar{e} = -\bar{m} - 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
51. $\bar{a} = 6\bar{m} + 3\bar{n}$, $\bar{e} = -2\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
52. $\bar{a} = -6\bar{m} + 4\bar{n}$, $\bar{e} = -3\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
53. $\bar{a} = 6\bar{m} + 5\bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 2$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
54. $\bar{a} = 3\bar{m} - 6\bar{n}$, $\bar{e} = 3\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 5$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
55. $\bar{a} = 4\bar{m} - 6\bar{n}$, $\bar{e} = \bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
56. $\bar{a} = 4\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{e} = 5\bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 4$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
57. $\bar{a} = 3\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{e} = -\bar{m} - 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
58. $\bar{a} = 5\bar{m} - 6\bar{n}$, $\bar{e} = -5\bar{m} - 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 4$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
59. $\bar{a} = 5\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{e} = -5\bar{m} + 3\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 5$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
60. $\bar{a} = -7\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{e} = 4\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
61. $\bar{a} = 7\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{e} = -4\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 3$, $|\bar{n}| = 1$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
62. $\bar{a} = -5\bar{m} - 7\bar{n}$, $\bar{e} = -4\bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
63. $\bar{a} = 5\bar{m} + 7\bar{n}$, $\bar{e} = -8\bar{m} - \bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$, $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$

64. $\bar{a} = 7\bar{m} - \bar{n},$	$\bar{e} = 8\bar{m} + \bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 2,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6};$
65. $\bar{a} = -7\bar{m} + 3\bar{n},$	$\bar{e} = 4\bar{m} - 3\bar{n},$	$ \bar{m} = 4,$	$ \bar{n} = 1,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6};$
66. $\bar{a} = -4\bar{m} + 7\bar{n},$	$\bar{e} = -4\bar{m} - 3\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 3,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4};$
67. $\bar{a} = 4\bar{m} - 7\bar{n},$	$\bar{e} = \bar{m} + 8\bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 1,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4};$
68. $\bar{a} = -7\bar{m} - 2\bar{n},$	$\bar{e} = \bar{m} - 8\bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 1,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6};$
69. $\bar{a} = \bar{m} - 3\bar{n},$	$\bar{e} = 3\bar{m} + 6\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 2,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4};$
70. $\bar{a} = -\bar{m} + 3\bar{n},$	$\bar{e} = -3\bar{m} - 6\bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 3,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4};$
71. $\bar{a} = -\bar{m} - 3\bar{n},$	$\bar{e} = 3\bar{m} - 6\bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 1,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6};$
72. $\bar{a} = 2\bar{m} - 4\bar{n},$	$\bar{e} = 6\bar{m} - 3\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 2,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6};$
73. $\bar{a} = -2\bar{m} - 4\bar{n},$	$\bar{e} = 6\bar{m} + 3\bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 2,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3};$
74. $\bar{a} = -2\bar{m} - 4\bar{n},$	$\bar{e} = 5\bar{m} + \bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 1,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3};$
75. $\bar{a} = \bar{m} + 3\bar{n},$	$\bar{e} = -6\bar{m} - 3\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 3,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4};$
76. $\bar{a} = 2\bar{m} + 4\bar{n},$	$\bar{e} = 5\bar{m} - \bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 1,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4};$
77. $\bar{a} = 3\bar{m} - 2\bar{n},$	$\bar{e} = -5\bar{m} + \bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 3,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6};$
78. $\bar{a} = -3\bar{m} + 2\bar{n},$	$\bar{e} = 7\bar{m} + \bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 2,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6};$
79. $\bar{a} = -3\bar{m} - 2\bar{n},$	$\bar{e} = -7\bar{m} + \bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 4,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3};$

80. $\bar{a} = 3\bar{m} + 2\bar{n},$	$\bar{e} = -7\bar{m} - \bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 1,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3};$				
81. $\bar{a} = \bar{m} - 5\bar{n},$	$\bar{e} = \bar{m} + 7\bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 2,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6};$				
82. $\bar{a} = \bar{m} + 5\bar{n},$	$\bar{e} = -\bar{m} - 7\bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 3,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6};$				
83. $\bar{a} = -\bar{m} - 5\bar{n},$	$\bar{e} = \bar{m} + 7\bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 1,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3};$				
84. $\bar{a} = -\bar{m} + 5\bar{n},$	$\bar{e} = 3\bar{m} + 7\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 1,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4};$				
85. $\bar{a} = 5\bar{m} - \bar{n},$	$\bar{e} = 7\bar{m} - 3\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 2,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6};$
86. $\bar{a} = -5\bar{m} - 2\bar{n},$	$\bar{e} = 4\bar{m} - 2\bar{n},$	$ \bar{m} = 4,$	$ \bar{n} = 1,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6};$				
87. $\bar{a} = 5\bar{m} + 2\bar{n},$	$\bar{e} = -4\bar{m} + 2\bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 2,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3};$				
88. $\bar{a} = -5\bar{m} + 2\bar{n},$	$\bar{e} = -4\bar{m} - \bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 1,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3};$				
89. $\bar{a} = 5\bar{m} + 3\bar{n},$	$\bar{e} = 6\bar{m} - 4\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 2,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6};$				
90. $\bar{a} = 5\bar{m} - 3\bar{n},$	$\bar{e} = -6\bar{m} - 4\bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 2,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6};$				
91. $\bar{a} = -5\bar{m} - 3\bar{n},$	$\bar{e} = -6\bar{m} + 4\bar{n},$	$ \bar{m} = 3,$	$ \bar{n} = 1,$	$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4};$
92. $\bar{a} = -5\bar{m} + 3\bar{n},$	$\bar{e} = 4\bar{m} - 6\bar{n},$	$ \bar{m} = 1,$	$ \bar{n} = 2,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4};$				
93. $\bar{a} = 5\bar{m} + 3\bar{n},$	$\bar{e} = -4\bar{m} - 6\bar{n},$	$ \bar{m} = 2,$	$ \bar{n} = 3,$	
$(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3};$				

94. $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}$, $\bar{e} = 5\bar{m} + 7\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$;
95. $\bar{a} = 3\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{e} = 5\bar{m} - 7\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{3}$;
96. $\bar{a} = -\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{e} = -7\bar{m} - 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 2$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;
97. $\bar{a} = -\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{e} = -7\bar{m} + 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{4}$;
98. $\bar{a} = 3\bar{m} - 2\bar{n}$, $\bar{e} = 7\bar{m} + 5\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 3$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$;
99. $\bar{a} = -3\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{e} = 6\bar{m} - 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 1$, $|\bar{n}| = 1$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = -\frac{\pi}{6}$;
100. $\bar{a} = -3\bar{m} - 2\bar{n}$, $\bar{e} = -6\bar{m} + 4\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 1$,
 $(\bar{m}, \wedge \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$;

Завдання 6

Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки M_1 і M_2

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1. $M_1(1,3), M_2(2,-1)$; | 2. $M_1(-1,2), M_2(2,2)$; | 3. $M_1(-3,1), M_2(1,1)$; |
| 4. $M_1(-2,1), M_2(2,1)$; | 5. $M_1(-2,2), M_2(1,0)$; | 6. $M_1(1,-2), M_2(3,4)$; |
| 7. $M_1(2,-3), M_2(0,-2)$; | 8. $M_1(4,-3), M_2(1,3)$; | 9. $M_1(5,1), M_2(-3,4)$; |
| 10. $M_1(1,3), M_2(2,-1)$; | 11. $M_1(2,-3), M_2(-2,-1)$; | 12. $M_1(1,-1), M_2(-3,1)$; |
| 13. $M_1(3,4), M_2(4,-3)$; | 14. $M_1(3,-4), M_2(2,-3)$; | 15. $M_1(2,-3), M_2(2,-4)$; |
| 16. $M_1(3,-6), M_2(4,-5)$; | 17. $M_1(3,-7), M_2(2,-3)$; | 18. $M_1(2,-5), M_2(1,3)$; |
| 19. $M_1(1,3), M_2(2,-3)$; | 20. $M_1(1,-3), M_2(3,-2)$; | 21. $M_1(2,-4), M_2(-1,3)$; |
| 22. $M_1(-1,-6), M_2(-4,-3)$; | 23. $M_1(-4,1), M_2(2,-3)$; | 24. $M_1(-3,-5), M_2(1,3)$; |
| 25. $M_1(3,2), M_2(2,-3)$; | 26. $M_1(9,11), M_2(-7,0)$; | 27. $M_1(2,3), M_2(3,-1)$; |
| 28. $M_1(1,2), M_2(3,4)$; | 29. $M_1(8,2), M_2(2,-3)$; | 30. $M_1(4,5), M_2(3,3)$; |
| 31. $M_1(0,2), M_2(6,-4)$; | 32. $M_1(-2,4), M_2(8,-7)$; | 33. $M_1(-4,2), M_2(-1,4)$; |
| 34. $M_1(6,-1), M_2(2,0)$; | 35. $M_1(1,8), M_2(-5,3)$; | 36. $M_1(9,8), M_2(7,6)$; |
| 37. $M_1(3,1), M_2(1,4)$; | 38. $M_1(2,3), M_2(0,-2)$; | 39. $M_1(1,7), M_2(-1,4)$; |
| 40. $M_1(-3,1), M_2(2,3)$; | 41. $M_1(1,1), M_2(-3,2)$; | 42. $M_1(-1,3), M_2(-4,2)$; |
| 43. $M_1(4,-2), M_2(1,8)$; | 44. $M_1(2,3), M_2(1,2)$; | 45. $M_1(6,0), M_2(-2,3)$; |
| 46. $M_1(6,5), M_2(-2,4)$; | 47. $M_1(1,3), M_2(2,2)$; | 48. $M_1(-2,1), M_2(1,8)$; |

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 49. $M_1(3,2), M_2(-2,1);$ | 50. $M_1(2,2), M_2(4,5);$ | 51. $M_1(3,4), M_2(-2,4);$ |
| 52. $M_1(4,2), M_2(1,-3);$ | 53. $M_1(1,-4), M_2(-1,2);$ | 54. $M_1(2,4), M_2(7,-9);$ |
| 55. $M_1(-2,1), M_2(4,6);$ | 56. $M_1(3,6), M_2(1,9);$ | 57. $M_1(5,-7), M_2(8,11);$ |
| 58. $M_1(3,2), M_2(-6,5);$ | 59. $M_1(2,3), M_2(4,2);$ | 60. $M_1(1,9), M_2(-4,1);$ |
| 61. $M_1(-1,2), M_2(4,2);$ | 62. $M_1(3,1), M_2(2,-3);$ | 63. $M_1(1,2), M_2(5,1);$ |
| 64. $M_1(-4,5), M_2(6,-2);$ | 65. $M_1(2,-3), M_2(1,6);$ | 66. $M_1(1,7), M_2(0,2);$ |
| 67. $M_1(11,5), M_2(-7,6);$ | 68. $M_1(2,-2), M_2(1,-4);$ | 69. $M_1(5,3), M_2(1,-4);$ |
| 70. $M_1(-12,6), M_2(7,5);$ | 71. $M_1(5,3), M_2(2,1);$ | 72. $M_1(-1,3), M_2(4,9);$ |
| 73. $M_1(2,-6), M_2(4,2);$ | 74. $M_1(4,1), M_2(-2,3);$ | 75. $M_1(6,5), M_2(2,5);$ |
| 76. $M_1(-2,5), M_2(4,-3);$ | 77. $M_1(-3,1), M_2(2,5);$ | 78. $M_1(1,2), M_2(3,4);$ |
| 79. $M_1(4,-5), M_2(3,-4);$ | 80. $M_1(8,0), M_2(1,1);$ | 81. $M_1(5,7), M_2(-1,-1);$ |
| 82. $M_1(3,8), M_2(7,-3);$ | 83. $M_1(3,-1), M_2(1,-3);$ | 84. $M_1(8,-9), M_2(1,0);$ |
| 85. $M_1(2,-3), M_2(1,6);$ | 86. $M_1(6,-2), M_2(2,8);$ | 87. $M_1(4,1), M_2(2,-5);$ |
| 88. $M_1(5,1), M_2(-2,3);$ | 89. $M_1(0,-1), M_2(1,-6);$ | 90. $M_1(1,1), M_2(7,4);$ |
| 91. $M_1(-4,2), M_2(2,-1);$ | 92. $M_1(3,1), M_2(1,2);$ | 93. $M_1(-9,5), M_2(0,2);$ |
| 94. $M_1(2,3), M_2(-1,4);$ | 95. $M_1(5,7), M_2(7,0);$ | 96. $M_1(3,7), M_2(2,1);$ |
| 97. $M_1(0,3), M_2(-1,-1);$ | 98. $M_1(-3,2), M_2(4,-1);$ | 99. $M_1(-1,-3), M_2(2,0);$ |
| 100. $M_1(1,-4), M_2(1,6).$ | | |

Завдання 7

Знайти рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

1. $A(1,3,2), B(3,2,4), C(1,1,-2);$
2. $A(2,-1,0), B(1,2,-2), C(-2,1,-3);$
3. $A(3,-2,1), B(-3,1,2), C(1,-2,1);$
4. $A(-2,1,0), B(-3,-1,2), C(-5,1,4);$
5. $A(-2,1,3), B(-3,-1,2), C(-5,1,4);$
6. $A(2,1,1), B(3,1,-2), C(2,3,-1);$
7. $A(2,1,-2), B(1,2,-4), C(3,1,-2);$
8. $A(1,1,-1), B(1,3,2), C(-4,1,1);$
9. $A(2,1,2), B(-2,1,0), C(4,1,-2);$
10. $A(-2,1,-1), B(1,2,1), C(3,2,-1);$
11. $A(-1,0,2), B(2,-3,1), C(2,1,2);$
12. $A(-2,1,2), B(-1,2,3), C(-4,3,-3);$
13. $A(3,1,1), B(1,1,2), C(1,2,-3);$
14. $A(-3,1,-1), B(1,-3,2), C(-1,2,3);$
15. $A(-6,1,-1), B(4,7,2), C(-1,0,1);$
16. $A(4,2,-2), B(-3,3,2), C(1,8,0);$
17. $A(2,-3,-1), B(1,-1,1), C(-3,4,-3);$
18. $A(6,3,6), B(5,1,8), C(-1,2,0);$
19. $A(3,2,-2), B(2,7,-7), C(3,5,0);$

20. $A(3,2,-1)$, $B(5,1,0)$, $C(0,5,5)$;
 21. $A(-3,1,-3)$, $B(0,2,0)$, $C(4,1,7)$;
 22. $A(2,-1,4)$, $B(1,2,-2)$, $C(5,-1,-1)$;
 23. $A(1,2,1)$, $B(4,2,3)$, $C(1,-1,1)$;
 24. $A(4,-3,-1)$, $B(1,0,5)$, $C(7,1,4)$;
 25. $A(4,1,-2)$, $B(1,3,1)$, $C(4,4,-1)$;
 26. $A(1,1,-4)$, $B(1,-3,2)$, $C(5,0,5)$;
 27. $A(1,-1,5)$, $B(2,-2,4)$, $C(0,4,4)$;
 28. $A(2,3,-2)$, $B(4,-1,1)$, $C(2,-1,5)$;
 29. $A(2,4,3)$, $B(2,1,-1)$, $C(8,0,-7)$;
 30. $A(4,1,1)$, $B(3,1,-1)$, $C(2,1,7)$;
 31. $A(3,2,-1)$, $B(2,0,1)$, $C(4,2,8)$;
 32. $A(3,-3,1)$, $B(5,1,4)$, $C(6,6,-3)$;
 33. $A(1,2,3)$, $B(-2,1,-2)$, $C(7,1,1)$;
 34. $A(5,5,-3)$, $B(1,1,-4)$, $C(0,2,1)$;
 35. $A(9,1,-5)$, $B(4,9,0)$, $C(1,0,3)$;
 36. $A(1,2,-3)$, $B(-1,2,-2)$, $C(7,9,0)$;
 37. $A(3,2,-2)$, $B(4,-3,-4)$, $C(1,3,1)$;
 38. $A(-6,0,6)$, $B(3,1,4)$, $C(-1,0,2)$;
 39. $A(3,1,1)$, $B(5,4,9)$, $C(-1,0,3)$;
 40. $A(1,3,1)$, $B(3,4,-3)$, $C(7,2,1)$;
 41. $A(4,-2,3)$, $B(0,1,7)$, $C(5,1,-8)$;
 42. $A(1,3,1)$, $B(4,1,1)$, $C(-1,3,3)$;
 43. $A(3,-3,1)$, $B(7,5,-6)$, $C(0,1,9)$;
 44. $A(1,-1,2)$, $B(5,1,-7)$, $C(3,1,2)$;
 45. $A(2,1,-2)$, $B(5,-7,5)$, $C(9,0,9)$;
 46. $A(3,2,-1)$, $B(-1,4,0)$, $C(2,1,2)$;
 47. $A(3,-2,3)$, $B(4,-7,1)$, $C(0,4,9)$;
 48. $A(2,-1,4)$, $B(-3,-3,1)$, $C(2,1,2)$;
 49. $A(4,-3,4)$, $B(7,1,7)$, $C(5,0,-3)$;
 50. $A(4,3,-1)$, $B(0,2,1)$, $C(7,1,0)$;
 51. $A(-3,0,-3)$, $B(7,1,4)$, $C(9,5,11)$;
 52. $A(1,1,-7)$, $B(3,0,1)$, $C(1,-2,1)$;
 53. $A(2,1,-1)$, $B(-3,3,-7)$, $C(5,0,8)$;
 54. $A(8,1,1)$, $B(4,-2,0)$, $C(1,3,-1)$;
 55. $A(-2,1,-2)$, $B(3,-7,3)$, $C(8,0,1)$;
 56. $A(2,4,3)$, $B(-1,0,1)$, $C(5,0,-1)$;
 57. $A(1,-1,-3)$, $B(5,7,7)$, $C(6,0,6)$;
 58. $A(3,2,-1)$, $B(4,1,-2)$, $C(0,8,1)$;

59.A(2,1,3), B(7,0,8), C(2,-1,-3);
 60.A(1,3,2), B(2,1,-1), C(3,-4,1);
 61.A(2,1,0), B(7,1,3), C(0,9,-9);
 62.A(2,0,4), B(1,3,1), C(0,5,-1);
 63.A(-7,0,4), B(0,3,2), C(7,8,6);
 64.A(2,-1,3), B(7,1,5), C(0,4,-3);
 65.A(1,2,-1), B(5,7,0), C(-1,4,1);
 66.A(1,7,7), B(2,4,0), C(1,-1,2);
 67.A(2,3,-1), B(1,0,3), C(0,-1,2);
 68.A(0,4,2), B(2,-1,5), C(1,0,3);
 69.A(2,1,0), B(3,4,-8), C(7,1,9);
 70.A(4,-3,2), B(0,-3,-2), C(7,1,0);
 71.A(-1,1,-7), B(0,4,-4), C(2,-1,3);
 72.A(-3,1,1), B(2,4,9), C(1,1,8);
 73.A(4,4,-8), B(1,7,1), C(5,1,6);
 74.A(2,-1,4), B(7,1,8), C(4,7,1);
 75.A(2,2,-2), B(4,1,7), C(5,0,8);
 76.A(3,0,6), B(-5,0,1), C(0,-3,1);
 77.A(1,2,-3), B(0,-2,4), C(1,3,-5);
 78.A(2,0,4), B(5,1,0), C(-1,2,-3);
 79.A(-4,3,-4), B(7,8,1), C(0,9,4);
 80.A(1,1,-2), B(-7,7,4), C(0,2,8);
 81.A(3,2,-1), B(2,3,-4), C(7,2,-3);
 82.A(1,3,-2), B(4,7,1), C(0,1,-1);
 83.A(1,-2,1), B(2,7,9), C(0,1,4);
 84.A(2,3,4), B(1,5,1), C(-2,8,0);
 85.A(1,2,4), B(3,1,-2), C(7,0,9);
 86.A(1,2,3), B(1,3,1), C(7,0,3);
 87.A(-1,4,3), B(3,2,-3), C(9,1,7);
 88.A(4,1,0), B(-3,8,6), C(3,1,5);
 89.A(4,1,-1), B(0,3,-7), C(1,8,0);
 90.A(-3,2,0), B(1,1,7), C(-3,-2,0);
 91.A(5,-1,1), B(2,4,-1), C(-4,3,-5);
 92.A(2,1,0), B(6,0,9), C(1,-1,2);
 93.A(1,-2,3), B(1,-2,2), C(3,-1,-3);
 94.A(3,4,0), B(2,7,9), C(-4,1,-5);
 95.A(2,1,-1), B(3,3,-6), C(1,4,8);
 96.A(0,-5,1), B(4,-1,0), C(1,-3,-5);
 97.A(4,-4,3), B(2,-2,1), C(1,0,9);

98. A(-3,2,1), B(1,4,1), C(2,1,7);
 99. A(3,2,3), B(7,1,-1), C(4,0,2);
 100. A(1,-7,0), B(1,7,2), C(-2,4,8).

Завдання 8

Знайти рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно заданій прямій.

- | | |
|---|---|
| 1. $M_0(1,1,2), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3};$ | 2. $M_0(-1,2,2), \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1};$ |
| 3. $M_0(1,-1,2), \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1};$ | 4. $M_0(1,1,-2), \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3};$ |
| 5. $M_0(1,-1,2), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3};$ | 6. $M_0(-1,-1,2), \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3};$ |
| 7. $M_0(-1,-1,2), \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3};$ | 8. $M_0(-1,1,-2), \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3};$ |
| 9. $M_0(2,1,1), \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2};$ | 10. $M_0(2,1,1), \quad \frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2};$ |
| 11. $M_0(2,1,-1), \quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2};$ | 12. $M_0(2,-1,1), \quad \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-1}{-2};$ |
| 13. $M_0(2,-1,-1), \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{3};$ | 14. $M_0(1,3,2), \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2};$ |
| 15. $M_0(2,1,3), \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-3};$ | 16. $M_0(1,2,3), \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1};$ |
| 17. $M_0(-1,2,3), \quad \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4};$ | 18. $M_0(1,-2,3), \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1};$ |
| 19. $M_0(1,2,-3), \quad \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1};$ | 20. $M_0(1,-2,-3), \quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2};$ |
| 21. $M_0(1,-3,2), \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1};$ | 22. $M_0(1,-3,-2), \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-1};$ |
| 23. $M_0(0,1,2), \quad \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1};$ | 24. $M_0(1,0,2), \quad \frac{x}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1};$ |
| 25. $M_0(2,0,1), \quad \frac{x}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2};$ | 26. $M_0(2,4,-3), \quad \frac{x-1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{z-1}{2};$ |
| 27. $M_0(3,-2,1), \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-2};$ | 28. $M_0(-3,1,-2), \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2};$ |
| 29. $M_0(2,-1,3), \quad \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1};$ | 30. $M_0(1,5,0), \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{7};$ |
| 31. $M_0(-1,3,4), \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{3};$ | 32. $M_0(7,4,5), \quad \frac{x-5}{7} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1};$ |
| 33. $M_0(5,6,7), \quad \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{0};$ | 34. $M_0(2,-1,-3), \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-4};$ |

35. $M_0(1,-1,2), \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z}{-1};$
36. $M_0(-1,3,-2), \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{1};$
37. $M_0(2,1,-1), \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{5};$
38. $M_0(1,-5,-3), \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{1};$
39. $M_0(3,0,-1), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{3};$
40. $M_0(3,1,-1), \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{-5};$
41. $M_0(3,7,0), \quad \frac{x}{5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{3};$
42. $M_0(1,4,-3), \quad \frac{x-3}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1};$
43. $M_0(2,4,-1), \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+7}{-3};$
44. $M_0(-2,1,4), \quad \frac{x}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1};$
45. $M_0(-1,2,2), \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1};$
46. $M_0(-3,-1,2), \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2};$
47. $M_0(2,3,0), \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3};$
48. $M_0(1,2,-3), \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1};$
49. $M_0(5,7,-3), \quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1};$
50. $M_0(2,-1,3), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{2};$
51. $M_0(-2,3,1), \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-7}{1};$
52. $M_0(2,-1,-5), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1};$
53. $M_0(3,2,-4), \quad \frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3};$
54. $M_0(3,-2,1), \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4};$
55. $M_0(-1,2,0), \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3};$
56. $M_0(3,2,1), \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{2};$
57. $M_0(2,-3,4), \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{2};$
58. $M_0(5,0,-4), \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-3}{-1};$
59. $M_0(1,0,-5), \quad \frac{x}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-1}{-6};$
60. $M_0(1,-6,0), \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{-2};$
61. $M_0(2,-3,1), \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{3};$
62. $M_0(3,-1,1), \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{3};$
63. $M_0(-3,2,-7), \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{3};$
64. $M_0(2,1,-4), \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{-1};$
65. $M_0(2,0,-5), \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{7};$
66. $M_0(3,2,-5), \quad \frac{x-3}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{5};$
67. $M_0(-1,2,6), \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{2};$
68. $M_0(4,1,-2), \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+3}{2};$
69. $M_0(2,-3,1), \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{5};$
70. $M_0(-3,2,5), \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-2}{4};$
71. $M_0(-1,3,0), \quad \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3};$
72. $M_0(2,-1,5), \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1};$
73. $M_0(2,-5,3), \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1};$
74. $M_0(-1,4,8), \quad \frac{x+5}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{6};$

75. $M_0(10,2,-3), \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{3};$ 76. $M_0(7,-3,2), \quad \frac{x}{4} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+2}{2};$
77. $M_0(8,-3,4), \quad \frac{x}{5} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-1}{-2};$ 78. $M_0(-2,8,3), \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-3}{5};$
79. $M_0(-1,-1,3), \quad \frac{x-5}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{6};$ 80. $M_0(3,-1,2), \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2};$
81. $M_0(4,1,3), \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z}{1};$ 82. $M_0(2,4,4), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{5};$
83. $M_0(-1,4,2), \quad \frac{x+3}{-2} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{4};$ 84. $M_0(4,1,0), \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-1};$
85. $M_0(0,5,3), \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{3};$ 86. $M_0(4,-1,2), \quad \frac{x}{4} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-1}{7};$
87. $M_0(2,5,1), \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{6} = \frac{7}{5};$ 88. $M_0(3,-2,1), \quad \frac{x+5}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z-2}{3};$
89. $M_0(1,4,-1), \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1};$ 90. $M_0(4,1,5), \quad \frac{x}{5} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{4};$
91. $M_0(3,-1,2), \quad \frac{x+7}{-2} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{0};$ 92. $M_0(3,2,-7), \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4};$
93. $M_0(4,1,-2), \quad \frac{x}{8} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1};$ 94. $M_0(2,0,5), \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{-3};$
95. $M_0(3,-2,1), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-7} = \frac{z-3}{5};$ 96. $M_0(-1,3,2), \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{2};$
97. $M_0(1,-6,3), \quad \frac{x-6}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4};$ 98. $M_0(3,5,0), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{9};$
99. $M_0(2,6,-2), \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-2};$ 100. $M_0(4,7,-1), \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{6};$

Завдання 9

Обчислити неозначені границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4}{\sqrt{9x^6 + 4x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{4-x^2} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 2x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+2) - \ln x];$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x+1} - 2x \right); \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{x+1}{3x-3}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cos \sec x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}{3x^4 - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x - 12}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x+3} - x \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin x}{3 \sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3x}{x-2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+3) - \ln(x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-4} \right)^{1-x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x - 2} \right).$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 8} + x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 2} - \sqrt{x^2 + 3x - 4} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2x+x)^{\frac{x}{3x+3}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)[\ln x - \ln(x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1+2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)[\ln x - \ln(x+1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2x)^{\frac{x}{3x+3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1+2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+4x-2} - \sqrt{x^2+3x-4}\right).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{4x^4}+5x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}}{2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{2x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-2) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2+3x-1} - \sqrt{2x^2+x+1}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{3x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3+x)^{\frac{3x}{x+2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32x^5 - x^8}}{e^{5x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)[\ln(2x+1) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x} \right)^{2x-1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt{9x^2 - x + 3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x - 1} - \sqrt{3x^2 + x + 2} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2} - 2}{6x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x+2)^{\frac{x-1}{x+1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(2x-1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan 3x}{\ln(1-2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{3x^4 - 7x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{5x^2 - x + 2} - \sqrt{5x^2 + 2x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{5x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)[\ln(x+1) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{3x+2}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{3x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 2}}{x+5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^3 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 2} - \sqrt{x^2 + 3x - 4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{tg^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} (4+x)^{\frac{x-2}{x+3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x-1}{4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{2x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{e^{3x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(x-1)-\ln(x+2)].$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x^2}{x^2+1} - x \right); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+3} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\sqrt{2-x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{3x+2}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x-1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)[\ln(x-1)-\ln(x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{\ln(1+3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{-4x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{x-1} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2-x+2} - \sqrt{4x^2+2x+5} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{3x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x-1}{x \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{3x+4}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x-1}{4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+2)[\ln(x+2)-\ln(x-1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{7x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x-1} \right)^{3x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+4x-5}{x^2+5x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2-1} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{2x-4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{2x-3}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)[\ln(x-1) - \ln(x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16x^4 - x^8}}{e^{8x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)^{x^2}.$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 2x}{4x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 4x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 1} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\tan^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{5x-3}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)[\ln(2x-3) - \ln(x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{e^{\sin x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{4x}.$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 7}{2x^5 + 3x^4 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x + x^2 - 4}{x^2 - x - 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 7x - 1} - \sqrt{x^2 + 3x - 2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x-1} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{8x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+5) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{2x-1}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 3x + 1}{\sqrt{4x^6 + 2x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-3) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{5-x} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 \frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{5x}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arctan(x+2)}{4-x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x} \right).$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{2x + \sqrt[3]{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^3 + x^2 - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)[\ln x - \ln(4x+3)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} - 3}{2x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 10x}{\sin^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{-\frac{1}{\cos x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{4x} - 1}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt[3]{x^4}}{x \sqrt[3]{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x}).$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)[\ln(2x-1) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sqrt{x+4} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3 \sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin x)^{\frac{2}{\sin x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\tan 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 3} \right).$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 14} + x}{3x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 - 3x^2 - 10x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x + 2) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}; \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{4 - \sqrt[3]{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x)}{5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{\sin^2 \frac{x}{4}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 5}{x + 2} \right)^{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 5)^2 x}{5x^3 + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{4}{4 - x^2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x + 4) - \ln(x - 1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{\sin 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\arcsin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 5}{x + 3} \right)^{2x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 4x} \right).$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)[\ln(4x - 1) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{3x}}{x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 6x} - 1}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{\operatorname{tg} x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{3}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 1} \right)^{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 8} - x \right).$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 2}}{4x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (6x - 1) [\ln x - \ln(x - 2)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1-3x}{4x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+6} - \sqrt{x}).$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{3x}, a > 0, a \neq 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{6x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3 \sin^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\arcsin(x+1)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x+9}}{2x^2 + x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+4) [\ln x - \ln(2x-3)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+1} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x} - x).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x^3 + 2}{\sqrt{4x^8 + 2x^2 + 4}}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^2 + 8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3 \operatorname{tg}^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{e^{x-1} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{2}{x-3}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(5x-3) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x} \right)^{2x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 3}).$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 1}{3x^3 + 2x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 3x}{2x^2 - 9x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) [\ln x - \ln(6x - 1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{1 - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2 + x)^{\frac{3}{x+1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{e^{x^2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{3^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 5}).$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 1}{\sqrt{x^4 - x + 2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 5});$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 3x + \sin 7x}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (3 + x)^{\frac{5}{x+2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2x - 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x + 1) - \ln(3x + 2)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{\operatorname{tg} 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x} \right)^{x-1}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{3 \sin^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x} - 1}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} (4 + x)^{\frac{6}{x+3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\operatorname{tg} \pi x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin \sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x + 1} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x - 4) - \ln(x + 1)].$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 3}}{x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 6});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{\sin^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3 - x} - 1}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{3x+6}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tgx} - 1}{x(x-1)};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(7x+3) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{8^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{x+4}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2+2x}{3x+1}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x} - 1}{x^2 - 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{tg 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{arctg x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{6^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(8x+2)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+8}).$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+6} - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{arctg x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} - 1}{2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x-4) - \ln(x+3)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{x-1}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x + 1}}{4x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3 + x} - 1}{x^2 + 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{\operatorname{tg}^3 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - 1}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{\sin x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(3x + 8)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 4}\right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 9} - \sqrt{x}).$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x + 7}); \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{4 + x} - 1}{x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 9x - 1}{\sin^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3x+1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 5x)}{e^{2x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(4x + 5) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{\operatorname{arctg}(x - 1)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}\right)^{2x^2}.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2 + 3x - 1}}{\sqrt{20x^2 + 3}}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1});$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 8x}{3\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x)}{8^x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{e^{6x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(5x + 6)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2x+1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^{5x}.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x + 2} - \frac{2x^2 - 1}{x - 2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 9x}{2\sin^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{x^2 - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{3x-2}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\operatorname{arctg} 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{9^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x+5) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x} \right)^{5-2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4} - x).$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 + x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 9});$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 8x}{\operatorname{tg} 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x}{e^{4x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+8x)}{3^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+4)[\ln x - \ln(x-1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\operatorname{tg}^{\frac{\pi x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+3} \right)^{x+3}.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 4x^2}}{2x^3 + 3x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 7x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin x}{\operatorname{arctg} 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+x} - \sqrt{h}}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x^2)^{\frac{2x+5}{x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x^2} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-9x)}{5^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-4)[\ln x - \ln(x+9)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x} \right)^{3x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 8}).$$

$$37. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 + 2x}{x + 3} - 5x \right); \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 - 25x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{2 \operatorname{tg} 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5-x} - 1}{x^2 - 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{3x+1}{x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{8x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{4^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(7x + 3) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-2} \right)^{1-x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x-1}).$$

$$38. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3}}{5x^2 + 4x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+8});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3 \sin^2 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} - 3}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{3x+1}{2x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{e^{6x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(6x + 2)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{2^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{3x^2}.$$

$$39. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 3x^2 - 1}{3x^4 - 2x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{4x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5+x} - 1}{x^2 - 16};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{x+1}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{e^{5x^2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{\ln(1 - 4x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(5x + 4) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 9}).$$

$$40. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 16x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\arcsin 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x^2 + x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 - 4}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\operatorname{arctg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x^2} - 1}{3^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 5)[\ln x - \ln(x + 2)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x + 5} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 6} \right).$$

$$41. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{\sqrt[3]{8x^3 + 2x - 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x + 8) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{11 - x} - 3}{x^2 - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 9x - 1}{\operatorname{tg} 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(1 + x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 6x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

$$42. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^3 - 27}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\operatorname{arctg} 4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)[\ln x - \ln(4x + 9)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^5}}{\operatorname{arctg} 5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10 - x} - 3}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{e^{3x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x + 4} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 7} \right).$$

$$43. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^5 + x^3 + 2}}{3x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) [\ln x - \ln(x + 4)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{3x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (6 - 5x)^{\frac{x}{2x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} - 1}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16x^4 + x^9}}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\ln(1 - 8x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x} \right)^{-2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 8} \right).$$

$$44. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x + 3} \right); \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{x+3}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{5^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(5x - 2) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 4} \right)^{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 4} \right).$$

$$45. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 1)^3 (2 + 3x)}{(x + 2)x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\arcsin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10 - x} - 3}{9x^3 - 9x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (5 - 4x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 6x)}{5^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 4} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 5) [\ln(x - 3) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 3} \right)^{3x}.$$

$$46. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3x^3 + 4x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 - 9x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1)[\ln(x + 3) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{6^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\arcsin 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{x+2}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{4x} \right)^{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 5}).$$

$$47. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x + 6) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2 + x} - 3}{x - 7}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\operatorname{arctg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{10^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{x+2}{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - 1}{\operatorname{arctg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x - 1} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 6}).$$

$$48. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 2)^2(x - 1)}{(x^2 + 1)x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 3x + \sin 5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{\ln(1 + 3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{e^{x^2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{3 + x} - 3}{x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{x}{x-2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x + 7) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 6} - \sqrt{x - 7}).$$

$$49. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 - 3x^4 + 7x}}{3x^5 + 2x^3 - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - 1}{\sin^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x} - 2}{x - 5};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{\ln(1 + 2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{e^{x^2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{\frac{2x}{x-2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)[\ln(x + 4) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-8}).$$

$$50. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2}}{6x + 8}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{3\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{3x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{2^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(6x + 5) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 1}{6x} \right)^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-5}).$$

$$51. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + 5x^4 + 4}{x^6 - x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 9x - 1}{5\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 4x)^{\frac{2x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 5x)}{3^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(7x + 6) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{2x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x + 1}{8x} \right)^{3x}.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^3 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 8});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 8x^2} - 1}{2x^2 + x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{3x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 4x} - 1}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(5x + 7) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 7x)}{5^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 3}{5x} \right)^{4x}.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 6x^2 - 5}}{5x^2 - x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln x - \ln(2x + 9)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{5}}{x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\arcsin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (6x - 5)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{5x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{\ln(1 + 3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 5}{2x + 1} \right)^{-x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 7}).$$

$$54. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 3x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 - 3});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 7)^{\frac{6x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{e^{2x^2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x + 8) - \ln(x - 1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\ln(1 + 6x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 6}{3x + 1} \right)^{1-x}.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{2x^5 - 3x^2 + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{\ln(1 - 2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x} - x}{x - 5};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} (6 - x)^{\frac{5x}{x-5}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+3)[\ln(x+2) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 2} - x).$$

$$56. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-9});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\operatorname{tg} x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4)[\ln(2-x) - \ln(5-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^{x^2}.$$

$$57. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2}{x - 1} - 3x \right); \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 4x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x - 3} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{3x-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{3 \operatorname{tg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x^2)^{\frac{2x-1}{x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\sin 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2)[\ln(2x-1) - \ln(2x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{1-x}.$$

$$58. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6 - 2x^4 + 3}}{2x^2 + 3x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x + 21}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x + 4});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^2} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 9x^2)^{\frac{2x+1}{3x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sqrt{x}} - 1}{\operatorname{tg} \sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)[\ln(2x + 3) - \ln(2x - 4)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 5}{x + 1} \right)^{2x}.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 - 3}{5x^3 - 3x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 8});$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x + 7} - 5}{x^2 - 9x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\arcsin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{3x}{x-3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{\operatorname{tg} 4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x)[\ln(1 - x) - \ln(2 - x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin 2x} - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 8}{3x - 5} \right)^{-x}.$$

$$60. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 + 3x^2 - 1}}{5x^3 - 2x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 8} - \sqrt{x});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5 + x} - \sqrt{5 - x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2 \arctg x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 - x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} (5 - x)^{\frac{4x}{x-4}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 4)[\ln(2 - 3x) - \ln(5 - 3x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{e^{\operatorname{tg} x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 - 4} \right)^{x^2}.$$

$$61. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-8}); \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{6x+1} - 5}{x^2 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)[\ln(3-2x) - \ln(1-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - 1}{\ln(1-3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+5} \right)^{3x}.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{2x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+9x+5} - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\cos 2x - \cos 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x+x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-3) - \ln(2x+5)]; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-5} \right)^{3x}.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{6x^2 + 3x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 10});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 3x}{\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x^2 - 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (3+2x)^{\frac{3x}{x+1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)[\ln(1-2x) - \ln(5-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+9x)}{\operatorname{arctg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x-5} \right)^{-2x}.$$

$$64. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{2x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 11} - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{tg^2 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (3 + x)^{\frac{2x}{x+2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\ln(1 - 7x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x + 1) - \ln(3x - 1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 6}{x + 5} \right)^{-2x}.$$

$$65. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 8x - 2}{x^3 - 2x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 10} - \sqrt{x - 2});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\arcsin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} (x + 4)^{\frac{x}{x+3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)[\ln(2 - 3x) - \ln(4 - x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{e^{tg 3x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x - 9} \right)^{3x}.$$

$$66. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 8}{2x^5 + 2x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x + 11});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{6x} - x}{x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{6x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3)[\ln x - \ln(2x - 4)]; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{tg(x - 2)}{e^{x-2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 8}{x + 3} \right)^{2x}.$$

$$67. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x^2 + 4}{3x^2 + 5x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x-7});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{2x}{x^2 - 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{\ln(1 - 2x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)[\ln(1 - x) - \ln(6 - x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 4}{x - 9} \right)^{3x}.$$

$$68. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\sqrt[3]{8x^3 + 7}}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 12} - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x - 2}}{x^2 - 16}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{1 - \cos 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{6x}{x-2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x + 5) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x + 7} \right)^{2x}.$$

$$69. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 11}{2x^3 + 2x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 + x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 15});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\arcsin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (2 - x)^{\frac{5x}{1-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 9x)}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x)[\ln(1 - x) - \ln(5 - x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{e^{x-1} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x - 6} \right)^{-2x}.$$

$$70. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{x^4 + 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 14} - \sqrt{x});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{7x} - x}{x^2 - 7x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\ln(1 + 9x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{\sin 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x + 6) - \ln(x - 1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x - 5} \right)^{3x}.$$

$$71. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x}}{5x^2 + 3x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 + x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 7});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\sin^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{x \operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{-1x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2x+1}{2x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(4x + 3) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^{\sin x} - 1}{\ln(1 - x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 2}{5x - 6} \right)^{-2x}.$$

$$72. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5x - \frac{2 + 5x^2}{x - 4} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty - 1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 + x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 15} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{x \operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\arcsin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5 - 2x} - 1}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\sin x} - 1}{\ln(1 + 3x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)[\ln(2 - x) - \ln(3 - 4x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{x+1}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x - 5} \right)^{1-x}.$$

$$73. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 3}{2x^3 + 3x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 + 4x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+13} - \sqrt{x});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \sin 3x}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x} - 1}{x^2 - 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{8x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-7} \right)^{2-x}.$$

$$74 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 6x + 7x^4}{\sqrt{4x^8 + 3x^2} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 + x - 12}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 - 13});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{e^{3x^2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7-6x} - 1}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{tg^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{x+1}{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(5+2x) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2tgx - 1}{\ln(1-3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-8} \right)^{2x-1}.$$

$$75 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 - 1}{2 + 3x} - 2x \right); \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - x^2 - 9x - 9}{x^2 + 2x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 11} - \sqrt{x^2 - 2});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+4x^2} - 3}{x^2 - 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 5x}{e^{2x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x)[\ln(1-x) - \ln(2-3x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{\ln(1+2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+5} \right)^{2x}.$$

$$76. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{2x^2 + 3}{1 + 2x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7x + 6} - x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{6x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (6 - 5x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\sin 2x} - 1}{\ln(1-x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)[\ln(1-3x) - \ln(2-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{arcsin} 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-1} \right)^{2x}.$$

$$77. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10} + 3x^6 + 1}}{2x^2 + 5x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 2x}{\cos 3x - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x} - 3}{2x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (7 - 3x)^{\frac{x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{x^6 + 3x^8}}{e^{4x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)[\ln x - \ln(5x+8)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\operatorname{tg} x} - 1}{\ln(1-5x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+6} \right)^{x-1}.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x^2 + 4x^3}{1 + 3x^2 - 5x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+16});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\operatorname{tg}^2 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x)^{\frac{3x}{x+1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1+3x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-5) - \ln(2x+1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{6^{\operatorname{tg} x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4} \right)^{-x}.$$

$$79. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 3x^2 - 4}{5x^4 - 3x^2 + 6}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+14} - \sqrt{x-1});$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x-1}{x \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (9+4x)^{\frac{x}{x+2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)[\ln(2-5x)-\ln(2-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{\sin x}-1}{\ln(1-4x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{x+2}.$$

$$80. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-4}{1+3x}-x\right); \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-3x-2}{x^2+2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-9});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{8^{\operatorname{tg} x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x}-\sqrt{8}}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\cos x-\cos 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{2x}{x-1}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+3)-\ln(4x-1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{8^{\operatorname{tg} x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{-x}.$$

$$81. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2+3}{1+7x}-x\right); \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x^3-9x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x-\sqrt{x^2+7x-3}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{6-5x}-1}{4x^2-4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 9x}{x \operatorname{tg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1}{\ln(1-4x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{2x+1}{x-2}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3+2x)[\ln x-\ln(2+3x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{arc} \sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+8}\right)^{2-x}.$$

$$82. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5-3x^3+4}{2x^5+5x^4-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+6x-16}{x^2-x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+6x-4}-x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+3x}-1}{2x^2+2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{\cos 2x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x}-1}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x^2}-1}{x \sin x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x[\ln(1-2x) - \ln(2-3x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x^2)^{\frac{3x+1}{x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-2}\right)^{3+x}.$$

$$83. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^2+3x}}{5x+4}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-7x-18}{x^3-4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+15} - \sqrt{x-9});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x^2}-2}{x^2+3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos x}{x \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\operatorname{tg} x}-1}{\ln(1+6x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\operatorname{tg} \sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)[\ln x - \ln(7x+6)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (6-5x)^{\frac{4x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+4}\right)^x.$$

$$84. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{2x^2-5}{x+8}\right); \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+2x-15}{x^2+5x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+14} - \sqrt{x-7});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x + \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-8x)}{6^{\sin x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{9x}-1}{\arcsin 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3)[\ln(1-x) - \ln(5-4x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x^2)^{\frac{x+2}{x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{3x+1}\right)^{x+2}.$$

$$85. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3+4x^2-3}{7x^3-3x+2}; \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2+6x-16}{x^2+8x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+16});$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x^2 - 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{\sin x} - 1}{\ln(1 + 8x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x^2} - 1}{\sin^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(2x + 3) - \ln(x - 4)]; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{3x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+9} \right)^{3x}.$$

$$86. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 + 1} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 6x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 1} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 - 7x} - 3}{x^2 - 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{3x-1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x^2} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{1 - \cos 7x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2)[\ln(1 - 3x) - \ln(2 - 4x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 7}{3x - 4} \right)^{2x}.$$

$$87. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 3x^2 + 1}{5x^4 + 2x^3 - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 7x - 18}{x^3 + 8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-6} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7 - 6x} - 1}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 9x}{x \sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{-3x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\ln(1 - 2x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(6x + 8) - \ln(x + 1)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\sin x} - 1}{\operatorname{arctg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 3}{4x - 3} \right)^{3x}.$$

$$88. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16x^8 - 3x^3}}{3x^2 + 5x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^3 - 9x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 7x - 6} - x \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8-2x}-2}{x^2-2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{5x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tg3x}-1}{\ln(1+2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x tg 3x}{1-\cos 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+6)[\ln x - \ln(6x+9)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\sqrt{x}}-1}{tg \sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+6} \right)^{3x}.$$

$$89. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 2x^3 - 1}{x^3 + 3} - x \right); \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 9x^2 - 10x}{x^2 - x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \cos 3x}{tg^2 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x^2+5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{6x}{x-3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{e^{\sin 4x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-5} \right)^{-3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3)[\ln(4-5x) - \ln(2-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg x^2}{3^{x^2}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 8x + 3} \right)$$

$$90. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+x^2-5x^3}{1+2x+3x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-4x^2-x+4}{x^2-2x-8}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+10} - \sqrt{x^2-9} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{5x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{10-3x}-1}{x^2-3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{2x+2}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin \sqrt{x}}-1}{tg \sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3+8x) - \ln(x+5)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x-1}{\arcsin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+4} \right)^{2-x}.$$

$$91. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5+5x^3-4}{3x^5-4x^3+5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-3x-18}{x^2-6x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+8} - \sqrt{x-7});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x^2 - 6x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{4x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\sin 2x} - 1}{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x)[\ln(1 - x) - \ln(2 - 6x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\ln(1 - 5x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 9}{4x} \right)^{2-x}.$$

$$92. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{6x^2 - 5x}{1 + 6x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^3 + 2x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\arcsin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (4 + 3x)^{\frac{x}{x+1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - 1}{\operatorname{arctg} 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 7}{2x} \right)^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3 + 7x) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{\operatorname{rg} 6x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 10} - \sqrt{x - 9}).$$

$$93. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x} - x}{5x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - 14x}{x^2 - 2x - 8}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{9 - 5x} - 2}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{3x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 9x)}{e^{5x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)[\ln(3x + 4) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (5 - 2x)^{\frac{3x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 4} - x).$$

$$94. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x + 7x^2}{2 + 4x - 3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 7x - 18}{x^2 - 9x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{3x - 2} - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (7 + 3x)^{\frac{x}{x+2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 7x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 7x)}{3^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)[\ln(2 - 7x) - \ln(1 - x)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x - 9} \right)^{3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 2x - 3} \right).$$

$$95. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 3}{2x + 1} - 2x \right); \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 14} - \sqrt{x - 2});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{\operatorname{tg}^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - 3}{x^2 - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)^{\frac{3x}{x-3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{\sin x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4)[\ln x - \ln(5x + 7)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x)}{e^{\operatorname{tg} 4x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 9}{2x} \right)^{4x}.$$

$$96. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6 - 3x} + x}{1 - 3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 4x^2 - 4x - 16}{x^2 + 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 2x}{\operatorname{arctg} 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + h} - \sqrt{h}}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2+x}{x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin 2x} - 1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x[\ln(4 - 7x) - \ln(1 - x)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x - 8} \right)^{-3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 8x + 5} \right).$$

$$97. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 3x^2 + 4x^5}{3 + 2x^3 - 3x^5}; \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 7x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 6x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5 - 2x} - 1}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{\operatorname{tg} x} - 1}{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 9}{4x} \right)^{2+x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(5 + 8x) - \ln x]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{e^{3x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 12} - \sqrt{x - 6}).$$

$$98. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7 - 2x^5 + 3x}{4x^7 + 2x^4 - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 4x}{\arcsin 5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{9x - 2} - 5}{x^3 - 27}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (4 + 3x)^{\frac{-2x}{x+1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{e^{7x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6^{\operatorname{tg} x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)[\ln(8 - 7x) - \ln(2 - x)]; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 3}{5x} \right)^{3-x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 13} - \sqrt{x - 2}).$$

$$99 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{x^3 + 1} - 3x^2 \right); \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^2 + 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 9x}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{17 - x} - 4}{x^3 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (9 - 4x)^{\frac{x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{e^{3x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x - 5}{6x} \right)^{2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)[\ln x - \ln(7+9x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+11} - \sqrt{x-1}).$$

$$100. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 + 3x^5 - 4}{-3x^6 + 2x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5x^2 - x - 5}{x^3 - 25x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{\sin^2 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{13-3x} - 2}{x^2 - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{2x}{x-3}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{e^{8x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-5} \right)^{2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+5)[\ln(4-5x) - \ln(7-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{x^2} - 1}{3x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 16x - 1} - x).$$

Завдання 10

Знайти похідні функцій.

$$1. \quad y = 3xe^{-3x^2} + 2; \quad y = \frac{5x}{\sin 3x + 2}; \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}; \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad y = 2xe^{\sin 5x};$$

$$y = \sin(\ln(1 + e^{\sqrt{x}})); \quad y = \operatorname{arctg}^3 5x; \quad y = \cos^4(1 + \sqrt{x}); \quad y = x^{\operatorname{tg} x}; \quad x \sin 2y + y^2 = 4.$$

$$2. \quad y = (4 - x^2)e^{\sqrt{x}} + \pi; \quad y = \frac{1 - 3x^2}{\cos 5x + 4}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{1 - 3x^2}}{5x + 4}; \quad y = \ln\left(x + \frac{1}{x + 4}\right);$$

$$y = (3 + x^5)e^{\sin x}; \quad y = \operatorname{arctg} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x\right); \quad y = \arcsin^4(1 - x).$$

$$3. \quad y = x^2 2^{-x} + 5; \quad y = \frac{7x}{\cos 5x + 2}; \quad y = \frac{\sqrt{1 - x}}{x^2 + 3}; \quad y = \ln(3x - \sqrt{1 - x}); \quad y = 3xe^{\cos 4x};$$

$$y = \cos \ln(1 - 3^{x^2}); \quad y = \arcsin^5 3x; \quad y = \sin^8(1 + \sqrt[3]{x}); \quad y = x^{\sin x}; \quad x \sin 2y = y^3.$$

$$4. \quad y = 5x^3 3^{2-x} + 4; \quad y = \frac{3 - x}{\sin 2x - 4}; \quad y = \frac{\sqrt{1 - 2x_3}}{4 - x}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{1 - x^2} + x); \quad y = x^2 e^{-\cos 3x};$$

$$y = \ln \sin(4 + e^{-x}); \quad y = \operatorname{arctg}^5(1 - 3x); \quad y = x^{\cos(1-x)}; \quad y = \cos^3(1 - e^{3x}); \quad x \operatorname{tg} xy - e^{-y} = 0.$$

$$5. \quad y = (1 - 4x)e^{-x^3} + \ln 2; \quad y = \frac{\arcsin(1 - 5x^2)}{1 - x}; \quad y = (1 - x^2)2^{\cos(1+x)}; \quad y = \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x - x^2}};$$

$$y = \ln \frac{1}{x^2 + \sqrt{x + 3}}; \quad y = \sin \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right); \quad y = \arccos^3 7x; \quad y = \sin^5(e^x + x); \quad y = (x + 7)^{\cos x};$$

$$\cos(x + y) + \frac{x}{y} = 3.$$

$$6. \quad y = (x + 4)e^{1-x^2} + \sqrt{7}; \quad y = \frac{3x + 1}{\arcsin(1 - x)}; \quad y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{3 - x^3}; \quad y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1 - x}};$$

$$y = (3 + x^2)e^{\arccos 2x}; \quad y = \operatorname{arctg} \ln\left(e^{\frac{1}{x}} + 5\right); \quad y = \sin^3(1 - e^{2x}); \quad y = (x + \sin x)^x;$$

$$\cos(1 - y) + \frac{x^3}{y} = 10.$$

$$7. y = \arccos x(x-1) + \ln 2; \quad y = \frac{\cos(1-x)+5}{x^4}; \quad y = \frac{\sqrt{x^5+4}}{3x+2}; \quad y = x^3 e^{\arctg 3x};$$

$$y = \ln(x^2 - \sqrt[3]{1-x}); \quad y = \ln \arctg \sqrt[5]{x}; \quad y = \sin^8 3x; \quad y = \ln^7(1-e^{-x}); \quad y = x^{\ln(1-e^x)};$$

$$y^3 e^{xy} + \cos x = 3.$$

$$8. y = x^2 4^{1-x^2} + \pi; \quad y = \frac{1+3x^2}{1+3\cos 5x}; \quad y = \frac{5-x}{\sqrt{1-3x^3}}; \quad y = x^3 e^{\sin 3x}; \quad y = \ln(\sqrt{5-x} + x^2);$$

$$y = \operatorname{costg}(\sqrt{x} - x^2); \quad y = \arcsin^5\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right); \quad y = \arctg \sqrt[3]{1-x}; \quad y = (1-x)^{\cos 3x};$$

$$x \arccos y + y^2 = 3.$$

$$9. y = x^4 e^{1-\sqrt{x}} + 4; \quad y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+x)^3}; \quad y = \frac{\cos(1-5x)}{4+x^2}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{4+x^3} + 1); \quad y = x^5 2^{\lg 3x};$$

$$y = \arccos \ln(e^{-x} + x); \quad y = \operatorname{arcctg}^7(1-x); \quad y = (\arcsin x)^{-x^2}; \quad y = \sin^8(1+2^{\sqrt{x}});$$

$$y\sqrt{x} + \cos(3x+y) = 4.$$

$$10. \quad y = 3xe^{-3x^2} + 2; \quad y = \frac{5x}{\sin 3x+2}; \quad y = \frac{\sqrt{x^{2+1}}}{x+1}; \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); \quad y = 2xe^{\sin 5x};$$

$$y = \sin \ln(1+e^{\sqrt{x}}); \quad y = \arctg^3 5x; \quad y = \cos^4(1+\sqrt{x}); \quad y = x^{\lg 3x}; \quad x \sin 2y + y^2 = 4.$$

$$11. y = 3x^5 4^{-7x^2}; \quad y = \frac{\arctg(5-x)}{1+x^4}; \quad y = \frac{1-3x}{\sqrt[5]{(2x+4)^3}}; \quad y = \ln(x + e^{-x^3}); \quad y = 2^{\ln 3x}(1-3x^2);$$

$$y = \arctg \ln(e^{2x} - 4); \quad y = \arcsin^3\left(1 - \frac{1}{x}\right); \quad y = \cos^6(1-x); \quad (3 \sin x)^{\sqrt{x}} = y; \quad y \ln x - x \ln y = x + y$$

$$12. y = 2x^5 e^{1-7x} + \sqrt{3}; \quad y = \frac{1-7x^2}{\arccos 3x+4}; \quad y = \frac{\sqrt{3-4x^2}}{1-5x}; \quad y = \ln \frac{1}{4 + \sqrt[3]{1+x^3}};$$

$$y = 5^{\cos 4x}(1+4x^3); \quad y = \cos^3(4+e^{\sqrt{x}}); \quad y = \operatorname{arcctg} \ln(1+4e^{-x^2}); \quad y = (\sqrt{x})^{\sin(1-x)};$$

$$y = \ln(x+y) + x^2; \quad y = x 7^{\arctg^2 \sqrt[3]{x}}.$$

$$13. y = 4^{-x+3}(1-7x^3) + e^2; \quad y = \frac{2x+7}{\cos(5-x^2)}; \quad y = \frac{\sqrt[5]{x^3+4}}{x-7}; \quad y = \ln\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

$$y = (4x-7)e^{\sin(1-x)}; \quad y = \arcsin \ln(2^{\sqrt{1-x}} + 4); \quad y = tg^7(1-3x^2); \quad y = \sin^5(1-e^{-x});$$

$$y = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\arctg 5x}; \quad \sqrt{x^2+y^2} + \ln \frac{x}{y} = e^2.$$

$$14. y = (1-3x)4^{2x} + 7; \quad y = \frac{3+2x}{\sin(1-x)}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{4-5x}}{x^3+4}; \quad y = x^2 e^{\sin(1-2x)}; \quad y = \ln(\sqrt[4]{1-x} + 4x);$$

$$y = \arccos^2(1+3x); \quad y = tg \ln(1-e^{x^2}); \quad y = \arctg^3(3^{\sqrt{x}} + x); \quad y = (4-7x^3)^{\ln x};$$

$$\cos(x+y^2) + xy = 3.$$

$$15. y = (x-1^2)e^{x^3} + 7; \quad y = \frac{\arcsin 5x+3}{1-7x^3}; \quad y = \frac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}; \quad y = \ln\left(\frac{1}{x+4} + \sqrt{x}\right);$$

$$y = 3^{\sin 8x}(4+7x^4); \quad y = \cos^5(x^2-7x); \quad y = \ln^7(e^{\sqrt[3]{x}} + x); \quad y = \ln \arctg(\sqrt[3]{x} + x); \quad y = (\sqrt{x}+1)^{2x^2+3};$$

$$\arcsin(x+y) = \frac{y}{x};$$

$$16. y = (\sqrt{x}+3)e^{x^2} + 7; \quad y = \frac{(3x-4)^2}{\sqrt[3]{x}+7}; \quad y = \frac{\cos(x+5x^3)}{7-x^4}; \quad y = \ln(\sqrt[5]{1-x^3} + 2); \quad y = x^3 3^{\arctg 5x};$$

$$y = \arcsin \ln(e^{\sqrt{x}} + 3x); \quad y = \arccotg^6(5-3x); \quad y = \sin^6(e^{\sqrt[3]{x}} + x); \quad y = (\arcsin x)^{\sqrt{x}};$$

$$xy + \ln(x+5y) = 3.$$

$$17. y = 2x^3 4^{1-x^8}; \quad y = \frac{\arctg(5x-3x^3)}{\sqrt{x}+4}; \quad y = \frac{5-3x^2}{\sqrt{3x^3+4}}; \quad y = x^5 2^{\ln(1-3x)}; \quad y = \ln(x+3^{-\sqrt{x}} + 4);$$

$$y = \arccos \ln(e^{-\sqrt{x^2+4}} + 1); \quad y = \sin^7(3-8x); \quad y = \arcsin^4\left(1 + \frac{2}{x^2}\right); \quad y = (5tgx)^{1-\sqrt{x}};$$

$$\cos(x^2-y) + \frac{3x+1}{y} = 4.$$

$$18. \quad y = \sqrt[3]{x^2} e^{1-3x^3} + 4; \quad y = \frac{x-7x^2}{\sqrt{x^2-4x}}; \quad y = \frac{\sin(3x-4x^2)}{5+x^3}; \quad y = tg^7(3-7x);$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{1-2x^2} + 1); \quad y = x^4 2^{\arcsin \sqrt{x}}; \quad y = \arctg \ln(e^{\sqrt[3]{x^2-x}} + 3); \quad y = \sin^4(e^{-x^3} + x^2);$$

$$y = (\arccos)^{\sqrt[3]{x}}; \quad \ell n(x^2 + y) + \frac{y}{x^2} = 3.$$

$$19. y = (2 - 7x^2)3^{-3x} + \sqrt{2}; \quad y = \frac{1 - 5x}{\cos(3 - 2x^3)}; \quad y = \frac{1 - 4x^4}{\sqrt{5 - x}}; \quad y = (1 - 4x^2)^{\sqrt{x}}; \quad y = \ell n(3x - \sqrt[3]{x^2});$$

$$y = (3x - 4)e^{\sin 4x}; \quad y = \arccos^5(1 - 4x^2); \quad y = \arctg^4(e^{5x} + 3); \quad y = \operatorname{tg} \ell n(5^{\sqrt{x}} + 4);$$

$$\cos(x^3 - y) + \frac{y}{x} = 1.$$

$$20. y = (1 + 7x)e^{3x+x^2} + 7; \quad y = \frac{\arcsin(1 - 7x)}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad y = \frac{\sqrt{x+4}}{x^5 + 4x^3}; \quad y = \ell n \frac{1}{x + \sqrt[3]{1 - x}};$$

$$y = (4 - x^3)3^{\sin(1-3x)}; \quad y = \cos \ell n(\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x}); \quad y = \arctg^7 3x; \quad y = \sin^3\left(e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

$$y = (\cos x)^{1-\sqrt{x}}; \quad \ell n(x^3 - y^3) = x.$$

$$21. \quad y = (1 - x^2)2^{1-\sqrt{x}} + 4; \quad y = \frac{1 - 7x}{1 - 2 \sin x}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{1 - x^2}}{3 - 4x}; \quad y = x^4 e^{\cos 5x}; \quad y = \ell n(\sqrt[3]{1 - 4x} + x);$$

$$y = \operatorname{siarctg}(\sqrt{x} + 4); \quad y = \arctg^5(1 - x); \quad y = \ell n^7\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right); \quad y = (1 - 4x^2)^{\sin 3x};$$

$$x^3 \arccos y - y^4 = \sqrt{e}.$$

$$22. y = (5 - 3x)3^{x^2} + 7; \quad y = \frac{\sin(5x - x^2)}{1 - x}; \quad y = \frac{5x + 4}{\sqrt[3]{x} + 4x}; \quad y = \cos^3(e^{\sqrt{x}} + 4);$$

$$y = \ell n(5x - \sqrt[3]{x^2 - 7x}); \quad y = \ell n \sin(5 - e^{-\sqrt{x}}); \quad y = x^5 e^{\arctg x}; \quad y = \arccos^7(1 - 5x); \quad y = (\sqrt{x})^{\ell n x};$$

$$\frac{x}{y^2} + \arctg xy = 1.$$

$$23. y = 5xe^{x^3+4} + \pi; \quad y = \frac{\arctg(5 - x)}{x^2 + 4}; \quad y = \frac{15 + x^3}{\sqrt{x - 7x^2}}; \quad y = \ell n \frac{x}{1 - \sqrt[3]{x}}; \quad y = \arccos \ell n(7 - \sqrt[3]{x});$$

$$y = x^4 2^{\cos \sqrt{x}}; \quad y = \operatorname{arctg}^4 5x; \quad y = \sin^9(3 - e^{\sqrt{x}}); \quad y = (x + \cos 3x)^{x^2}; \quad \sin(x - y) + x^3 y = 3.$$

$$24. y = (1 - x^3)e^{5x} + 7; \quad y = \frac{\operatorname{tg}(1 - 3x)}{x^3 + 4}; \quad y = \frac{\cos \sqrt{x} + 4}{\sqrt[3]{x} + x}; \quad y = \sin^7(1 - x^2); \quad y = x^7 7 \arcsin 5x;$$

$$y = \ln \frac{x}{\sqrt[6]{1 + 5x - x}}; \quad y = \ln \cos \left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right); \quad y = \ln^4(1 + e^{5x}); \quad (\operatorname{arctg}(1 - \sqrt{x}))^x = y;$$

$$x^3 e^{x+y} - y = 4.$$

$$25. y = (5x - 4)e^{\frac{1}{\sqrt{x}} + 3}; \quad y = \frac{(2x + 4)^5}{\sqrt[4]{x^3}}; \quad y = \frac{5 + 4x^3}{\operatorname{tg}(1 - 7x)}; \quad y = x^3 5^{\cos(1-x)}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{1 - x^2} - x);$$

$$y = \arcsin \ln \left(e^{1-5x} - \frac{1}{x} \right); \quad y = \cos^7(e^{\sqrt{x}} + 3x); \quad y = \sin^9(1 + 3^{\sqrt{x}}); \quad y = [\cos(1 - x)]^x;$$

$$\sqrt{y} \cdot x - \sin(5 - x) = 0.$$

$$26. \quad y = (3 + 2x^2)e^{\sqrt{3-x}} + 4; \quad y = \frac{4 - 5x}{\cos 3x - 7}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{4 - 7x}}{3x^2 + 7}; \quad y = (4 - x^3)e^{\sin(2+4x)};$$

$$y = \operatorname{arctg} \ln \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x \right); \quad y = \ln \left(5x - \frac{1}{1-x} \right); \quad y = \arcsin^3(2 + 3x); \quad y = \sin^4(e^{3x} - 1);$$

$$y = (\operatorname{tg} x)^{3-\sqrt{x}}; \quad \cos(x + y) + \sqrt[4]{y} = 0.$$

$$27. y = x^7 2^{5x} + 7\pi; \quad y = \frac{4x^2}{\cos(1-x) + 4}; \quad y = \frac{\sqrt{1-8x}}{x^3 + 1}; \quad y = \ln(7x + \sqrt[3]{x^2}); \quad y = 4xe^{\cos 9x};$$

$$y = \cos \ln(1 - 3^{x^4}); \quad y = \arcsin^3(1 - 7x); \quad y = \sin^4(1 - 5x^2); \quad y = (4 - 5x)^{\sin 2x}; \quad y^2 \sin 5x + xy = 4.$$

$$28. y = 3x^5 3^{-x^2} - \pi^3; \quad y = \frac{5 - 2x}{\sin 3x - 1}; \quad y = \frac{\sqrt{1 - 3x^2}}{3 - 2x}; \quad y = 3x^3 \cos^{4x};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{1 - 5x^2} - x); \quad y = \ln \sin(5 - e^{3x}); \quad y = \operatorname{arctg}^3(1 + 4x); \quad y = \cos^5(4 + e^{2x});$$

$$y = x^{\cos(5-2x)}; \quad (x+1)\operatorname{tg}(y^2 x) + e^y = 0$$

$$29. y = (3 - 2x)e^{-x^3} + \sqrt{3}; \quad y = \frac{\arcsin(3 + 4x^2)}{1 + 3x}; \quad y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}}; \quad y = \frac{3x^2 + 4}{\sqrt{2x + x^2}};$$

$$y = (1 - 5x^2)2^{\cos(1-x)}; \quad y = \sin \ln \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right); \quad y = \cos^4 3x; \quad y = \arcsin^3(e^{-x} + 2x); \quad y = (1-x)^{\cos 3x};$$

$$\cos(x-y) + \frac{y^3}{x} = 3.$$

$$30. y = (3+2x)5^{1-x^2} + 4; \quad y = \frac{\sin(1-7x)}{5-x^2}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{1+5x}}{3x^2-2}; \quad y = \ln(5x - \sqrt[3]{x^2}); \quad y = x^4 e^{\arcsin 2x};$$

$$y = \ln \cos(3 - e^{\sqrt{x}}); \quad y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^2}; \quad y = \arccos^8 5x; \quad y = \sin^4 \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right); \quad \frac{x}{y^2} + \operatorname{arctg}(x+y) = \pi^2.$$

$$31. y = (2-x)e^{3+2x^2} - 4; \quad y = \frac{5x+4}{\arcsin(3-2x)}; \quad y = \ln \frac{3}{2x - \sqrt{3-x^2}}; \quad y = \frac{\sqrt{3+x^2}}{5-x^4};$$

$$y = (x^2 - 5)e^{\arccos 3x}; \quad y = \arcsin^5 2x; \quad y = \operatorname{arctg} \ln(e^{\sqrt{x}} - 4); \quad y = \sin^9(3 - e^{5x}); \quad \cos(3+y) - \frac{y}{x^3} = 4;$$

$$y = (\operatorname{tg} 2x)^{\ln x}.$$

$$32. y = (1+7x)e^{4x} + \ln 2; \quad y = \frac{\cos(1-x)+4}{x^2}; \quad y = x^2 e^{\operatorname{arctg}(1-x)}; \quad y = \frac{\sqrt{x^3-7x}}{2-x};$$

$$y = \ln(x^4 - \sqrt[3]{1+x}); \quad y = \sin^6(5-3x); \quad y = \ln^3(4 - e^{3x}); \quad y = \ln \arccos(5 - \sqrt[3]{x}); \quad y = x^{\ln(5-e^{-3x})};$$

$$(x+1)^2 e^{xy} - \cos(1-y) = 0.$$

$$33. y = x^3 4^{1+x^2} - 4; \quad y = \frac{5-4x}{1-\cos 2x}; \quad y = \ln(\sqrt{3-2x} - x^2); \quad y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{4+2x}; \quad y = (1-x)^8 e^{\sin 2x};$$

$$y = \cos \operatorname{tg}(\sqrt[3]{x} - x); \quad y = \operatorname{arctg}^3(2+3x); \quad y = \arcsin^3(1-\sqrt{x}); \quad y = (1-3x)^{\sin 5x};$$

$$(x+2)\arcsin y + \frac{x}{y} = 3.$$

$$34. y = x^3 e^{4+2\sqrt{x}} + \ln^2 3; \quad y = \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}}{x^3+3}; \quad y = \frac{\cos(2-3x)}{4-2x^2}; \quad y = x^8 2^{\operatorname{tg} 5x}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{2-x^3} - 1);$$

$$\arccos \ln(e^{2-x}); \quad y = \arccos^6; \quad y = \sin^4(3 - 2^{-3x}); \quad y = [\arcsin(2-x)]^{-x^2}; \quad x\sqrt{y} + \cos(x+y) = 8.$$

$$\begin{aligned}
35. & y = 7xe^{2x^2} + 4; \quad y = \frac{3x-1}{\sin 12x+3}; \quad y = \frac{\sqrt{4x^2-2}}{3x-1}; \quad y = 6xe^{\sin 3x}; \quad y = \ln(3x - \sqrt{x-x^2}); \\
& y = \sin \ln(7 - e^{-\sqrt[3]{x}}); \quad y = \cos^6(3 - 2\sqrt{x}); \quad y = \operatorname{arctg}^3 5x; \quad y = (x+1)^{\lg 3x}; \quad y + (x-2)\sin 3y = \sqrt{\pi}. \\
36. & y = 8x^5 4^{-2x^2}; \quad y = \frac{\operatorname{arctg}(3-2x)}{3-4x^4}; \quad y = \frac{4+3x}{\sqrt[5]{(x-1)^2}}; \quad y = \ln(5x - e^{-x^2}); \quad y = 2^{\ln 7x}(1-6x^2); \\
& y = \operatorname{arctg} \ln(e^{5x} + 4); \quad y = \cos^5(3-2x); \quad y = \arcsin^3\left(1 + \frac{3}{x}\right); \quad y = (\sin 5x)^{\sqrt{x}}; \\
& (y+1)\ln 3x - x\ln y = 0. \\
37. & y = 5x^3 4^{1-x^8}; \quad y = \arccos \ln(e^{\sqrt{3-2x^2}} + 4); \quad y = \frac{\operatorname{arctg}(3x-4x^3)}{\sqrt{x}+7}; \quad y = \frac{4-3x^2}{\sqrt{5x^{3-4}}}; \\
& y = \ln(x + 3^{5-3\sqrt{x}}); \quad y = 2^{\ln(4+3x)}x^5; \quad y = (3\operatorname{tg} x)^{2+\sqrt{x}}; \quad y = \sin^7(5-3x); \quad y = \arcsin^4\left(3 - \frac{4}{x^2}\right); \\
& \cos(x^2 - 5y) + \frac{x+3}{y} = 4. \\
38. & y = \sqrt[3]{x^2}e^{5-2x^3} + 4; \quad y = \frac{2x+4x^2}{\sqrt{x^2-7x}}; \quad y = \operatorname{arctg} \ln(e^{\sqrt[3]{3x^2+x}} - 1); \quad y = \frac{\sin(5x+4x^2)}{3-x^3}; \\
& y = \ln(\sqrt[3]{5+2x^2} + 1); \quad y = x^4 2^{\arcsin(\sqrt{x}+2)}; \quad y = \operatorname{tg}^7(5-2x); \quad y = \sin^4(e^{3x^2} - x^2); \quad y = (\arccos 3x)^{1+\sqrt[3]{x}}; \\
& \ln(x^3 - 7y) + \frac{y}{2x} = 1. \\
39. & y = (1-2x^2)^{2x} + 1; \quad y = \frac{5-x}{\cos(2-3x^3)}; \quad y = \arccos^5(2-x^2); \quad y = \frac{2+5x^4}{\sqrt{3-2x}}; \quad y = \ln(5x + \sqrt[3]{x^2}); \\
& y = (2x-4)e^{\sin 5x}; \quad y = \operatorname{arctg}^4(e^{7x} + 2); \quad y = \operatorname{tg} \ln(e^{-\sqrt{x}} + 1); \quad y = (3+x^2)^{\sqrt{x}}; \quad \cos(x^3 + y) + \frac{y}{2x} = 4. \\
40. & y = (2+3x)e^{3x-x^2} + \sqrt{7}; \quad y = \frac{\arcsin(3+\sqrt{3x})}{\sqrt{1+x^2}}; \quad y = \ln \frac{1}{3x + \sqrt[3]{1+x}}; \quad y = \frac{\sqrt{2x-4}}{x^5 - 2x^3}; \\
& y = (2-x^3)^{\sin(2+x)}; \quad y = \cos \ln\left(\sqrt[3]{2x} - \frac{5}{x}\right); \quad y = \operatorname{arctg}^7 5x; \quad y = \sin^3\left(e^{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right); \quad y = (\cos 2x)^{1+\sqrt{x}}; \\
& \ln(x^3 + 2y^2) + 5x = 1.
\end{aligned}$$

$$41. y = ((1+x^2))2^{1+\sqrt{x}}; y = \frac{3-7x}{1+2\sin x}; y = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3+2x}; y = 2x^4 e^{\cos 5x}; y = \ln(\sqrt[3]{2+4x}-x);$$

$$y = \sin \arctg(2\sqrt{x}-1); \quad y = \arctg^5(2+x); \quad y = \ln^7\left(3-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right); \quad y = (2-4x^2)\cos 2x;$$

$$x^3 \arccos 5y - y^4 = 3.$$

$$42. y = (5-2x)3^{x^2}; \quad y = \frac{\sin(x-7x^2)}{4+2x}; \quad y = \frac{2x-x^2}{\sqrt[3]{x-x}}; \quad y = \ln(4x-\sqrt[3]{x^2-x}); \quad y = \ln \sin(3-e^{5\sqrt{x}});$$

$$y = (1-x)^5 e^{\arctg x}; \quad y = \arccos^8(2-6x); \quad y = \cos^3(e^{2\sqrt{x}}-1); \quad y = (\sqrt{x})^{\ln(x+1)};$$

$$y = \frac{3x}{y^2} - 5 \arctg(xy) = 0.$$

$$43. y = 7xe^{x^{3+5}} + 8; \quad y = \frac{\arctg(5+3x)}{x^2-3}; \quad y = \frac{4-3x^3}{\sqrt{8x^2+x}}; \quad y = \ln \frac{5x}{3-2\sqrt[3]{x}}; \quad y = \arccos \ln(4+3\sqrt{x});$$

$$y = (1-x)^4 e^{\cos \sqrt{5x}}; \quad y = \arccos^4 5x; \quad y = \sin^9(4-e^{-\sqrt{x}}); \quad y = (5x - \cos 2x)^{x^2};$$

$$\sin(x-5y) + x^3(1-y) = 0.$$

$$44. y = (3+x^3)e^{5x} + \ln 3; \quad y = \frac{\tg(7-3x)}{4-2x^3}; \quad y = \frac{\cos \sqrt{3x}-5}{\sqrt[3]{7x+3x}}; \quad y = \ln \frac{1}{\sqrt[6]{7-x^2+x}}; \quad y = x^3 7^{\arcsin(5-x)};$$

$$y = \ln \cos\left(5x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right); \quad y = \sin^9(2-3x^2); \quad y = \ln^4(4-e^{2-x}); \quad y = (\arctg(1-\sqrt{x}))^{x-1};$$

$$y = (1-x^3)e^{x-y}.$$

$$45. y = (x+7)e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}; \quad y = \frac{(x-4)^5}{\sqrt[4]{2x^3}}; \quad y = \frac{2-3x^3}{\tg(3+2x)}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{2-x^3}+x); \quad y = x^3 5^{\cos(3-x)};$$

$$y = \arcsin \ln\left(e^{3-x} + \frac{1}{x}\right); \quad y = \cos^7(e^{-\sqrt{x}}-5x); \quad y = \sin^3(6+3^{-\sqrt{x}}); \quad y = (\ctg(2-x))^{3x};$$

$$\sqrt{y(x+1)} - \sin(y-2x) = 0.$$

$$46. y = (x+3)^2 2^x + \pi; y = \frac{2x}{\cos 3x + 1}; y = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 - 7}; y = 3xe^{\cos 5x}; y = \ln(5x + \sqrt{1+x});$$

$$y = \cos \ln(3 - 3^{-x^2}); y = \arcsin^5 8x; y = \sin^8(3 - \sqrt[3]{x}); y = x^{\sin 6x}; (x+1)\sin 2y - \frac{y}{x} = 4$$

.

$$47. y = 8x^3 3^{x-2} + \pi; y = \frac{5-x}{\sin 3x - 1}; y = \frac{\sqrt{1+3x^3}}{1-4x}; y = \ln(\sqrt[3]{3-x^2} + 2x); y = 2x^2 e^{\cos(3x-2)};$$

$$y = \ln \sin(3 - e^{5x}); y = \arctg^5(4 + 3x); y = \cos^3(7 + e^{-2x}); y = (x-1)^{\cos x}; y \lg(xy) - e^x = 3.$$

$$48. y = 2xe^{3x+x^2} + 5; y = \frac{5+x}{\sin 7x + 3}; y = \frac{\sqrt{2-x^3}}{7+5x}; y = \ln^8 \frac{1}{e^{-x^2} + 7}; y = 3x^2 2^{\sin(3-x)};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{5+x^2} - 7x); y = \arccos^8 15x; y = \sin^5(3e^x - 7x); y = (x + 9^{\cos 7x});$$

$$\cos(2x - 3y) + \frac{2x}{y} = 0.$$

$$49. y = (5 - x^2)e^{\sqrt{2x}} - 4; y = \frac{3-x^2}{\cos 7x - 4}; y = \frac{\sqrt[3]{4-7x^2}}{3x+8}; y = \ln\left(3x - \frac{2}{x+1}\right); y = (5 - x^5)e^{\sin(3-x)};$$

$$y = (tg 5x)^{3-\sqrt{x}}; \cos(3x - y) - \sqrt[3]{2y} = 0.$$

$$50. y = (3 + 2x)5^{x^3} - \sqrt{8}; y = \frac{\sin(3+2x)}{3(x-1)^2}; y = (x-7)^3 e^{\arcsin 5x}; y = \frac{\sqrt[3]{3+2x}}{(x-1)^2 - 7};$$

$$y = \ln(12x + \sqrt[3]{x^3 + 4}); y = \sin^5\left(2x - \frac{3}{x^2}\right); y = \ln \cos\left(5 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right); y = \arccos^5 2x;$$

$$y = (tg 8x)^{3+x^2}; \frac{x^2}{2y} + \arctg(x+y) = 1.$$

$$51. y = (2 - 3x)8^{-x^3} + \sin 1; y = \frac{\sin(3-4x)}{5x^2}; y = \frac{\sqrt[3]{3-2x}}{x^2 - 4}; y = x^3 e^{\sin 7x}; y = \ln(5x - 7\sqrt{x^3 + 3});$$

$$y = \ln \cos\left(1 - e^{\frac{5}{\sqrt{x}}}\right); y = \arccos^5(1 - 6x); y = \sin^5\left(\sqrt{5x} - \frac{7}{x^2}\right); y = (tg 3x)^{5x-x^3}$$

$$52. y = (5 - x^2)e^{\sqrt{2x}} - 4; \quad y = \frac{3 - x^2}{\cos 7x - 4}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{4 - 7x^2}}{3x + 8}; \quad y = \ln\left(3x - \frac{2}{x + 1}\right); \quad y = \arcsin^7(1 - 8x);$$

$$y = \sin^3\left(e^{\sqrt{1-x}}\right); \quad y = (5x - \sin 2x)^{3x}; \quad \cos(x - y) \frac{x^4}{y^2} = 4.$$

$$53. y = (4 - 7x)e^{5x} + \sin 3; \quad y = \frac{\cos(2 - 4x) - 9}{3x^5}; \quad y = \ln(5x^2 - \sqrt[3]{3 - 2x}); \quad y = (1 - x)^3 e^{\arctg 5x};$$

$$y = \frac{\sqrt{x^4 - 7}}{5x + 2}; \quad y = \ln \arccos(3 + 7\sqrt{x}); \quad y = \sin^8(3 - 7x); \quad y = \ln^6(5 + 3e^{-2x}); \quad y = x^{\ln(3-x)};$$

$$y^3 e^{xy} + \cos x = 2.$$

$$54. y = \sin^8(8 + 7x); \quad y = \ln^7\left(5 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right); \quad y = \frac{3 - x^2}{4 - 9\cos^5(x-3)}; \quad y = (x - 3^2)4^{x^3} + \sin 5;$$

$$y = \frac{3 + 12x}{\sqrt{1 - 9x^4}}; \quad y = \operatorname{costg}(\sqrt{3x} - x^5); \quad y = \arcsin \sqrt{4 + 12x}; \quad y = (x - 4)e^{\sin 5x}; \quad y = (4 - 2x)^{\cos 7x};$$

$$(x - 1)\arcsin y + xy = 0.$$

$$55. y = 7x^8 e^{3-x^5} + \pi^3; \quad y = \frac{\arcsin(4 - 5x^3)}{4 - 8x}; \quad y = \ln \frac{1}{x^3 + \sqrt{3x^2 - 7}}; \quad y = \frac{5x^2 + 7x}{\sqrt{4 + 3x^5}};$$

$$y = (4 - x^3)2^{\cos 8x}; \quad y = \sin \ln(\sqrt[6]{x^2} - 3x^3); \quad y = (3 + 4x)^{\cos 7x}; \quad y = \arccos^6(1 - 5x);$$

$$y = \sin^9(e^{3x} - x^3); \quad \cos(y + 12x) - \frac{3 + x}{y} = 4.$$

$$56. y = (3 + x^2)e^{\sqrt[4]{x}} + 7; \quad y = \frac{5 - 4x}{\cos 2x + 7}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{1 + 5x^2}}{7x + 8}; \quad y = \ln(5x - 4\sqrt{x}); \quad y = (5 + x^4)e^{\sin(3-7x)};$$

$$y = \arctg \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5x\right); \quad y = \sin^4(e^{1-x} + 3); \quad y = \arcsin^7(3 - 5x); \quad y = (\operatorname{tg} 3x)^{1-5\sqrt{x}};$$

$$\cos(3x^2 - y) + \sqrt{y} = 0.$$

$$57. y = x^5 2^{3x} + 4; \quad y = \frac{5x + 3}{\cos 2x - 2}; \quad y = \frac{\sqrt{2 - 3x}}{x^2 + 7x}; \quad y = 4xe^{\cos 9x}; \quad y = \ln(8x - \sqrt{1 - 3x});$$

$$y = \arcsin^{15} 2x; \quad y = \sin^6(1 - 5\sqrt{x}); \quad y = (3x)^{\sin 4x}; \quad y = \arcsin \ln^2(e^{3x} + x); \quad (y + 1)\sin 5y + x^6 = 2.$$

$$58. y = 4x^7 3^{5+2x} - \sqrt{3}; \quad y = \frac{5+4x}{\sin 7x-8}; \quad y = 3(1-x)^2 e^{-\cos 2x}; \quad y = \frac{\sqrt{1+7x^4}}{5+9x}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{1+2x^2} - 4);$$

$$y = \ln \sin(1 - e^{-3x}); \quad y = (3-x)^{\cos x}; \quad y = \operatorname{arctg}^4(2+5x); \quad y = \cos^6(4 + e^{3-x});$$

$$y \operatorname{tg}(x+y) + e^x = 1.$$

$$59. y = (2+8x)e^{-3x} - \ln 7; \quad y = \frac{\arcsin(3+4x^2)}{3-2x}; \quad y = \sin \ln\left(\frac{1}{x-1} + \sqrt[3]{x}\right); \quad y = \frac{3x^2+7}{\sqrt{2x+x^2}};$$

$$y = \ln \frac{1}{2x - \sqrt{1-x^2}}; \quad y = (3-x^3)2^{\cos(3-2x)}; \quad y = \arccos^2 3x; \quad y = \sin^4(e^{3x} - x^2); \quad y = x^{\cos(3-4x)};$$

$$\cos(y-x) + \frac{y}{x} = 1.$$

$$60. y = (5+3x)5^{1-x^2} + \ln^3; \quad y = \frac{\sin(3-8x)}{1-5x^2}; \quad y = \ln \cos(2 - e^{\sqrt[3]{x}}); \quad y = \frac{\sqrt[3]{2-4x}}{x^2-2x};$$

$$y = \ln(5x - \sqrt{x^2+4}); \quad y = \arccos^6 2x; \quad y = (\operatorname{tg} 3x)^{3+x^2}; \quad y = x^2 e^{\arcsin 3x}; \quad y = \sin^6(\sqrt[3]{x} - x^2);$$

$$\frac{y^2}{x} - \operatorname{arctg} y = 7.$$

$$61. y = (2x-4)e^{2-5x^2} - 14; \quad y = \frac{2x-4}{\arcsin(2-3x)}; \quad y = \ln \frac{1}{2x + \sqrt{3+4x}}; \quad y = \frac{\sqrt{3-4x^2}}{5-3x^2};$$

$$y = (4-x^2)e^{\arccos 5x}; \quad y = \arcsin^3(7-x); \quad y = \sin^6(3+e^{5x}); \quad y = \operatorname{arctg} \ln(e^{\sqrt[3]{x^2}} + 1);$$

$$y = (3x - \sin 2x)^x; \quad \cos(3+y^2) - \frac{x}{y} = 8.$$

$$62. y = (2-7x)e^{1-5x} - \ln 7; \quad y = \frac{\cos(2+4x)+1}{x^2}; \quad y = \ln \arccos(3-\sqrt{x^2}); \quad y = \frac{\sqrt[3]{x^6-1}}{5-3x};$$

$$y = \ln(x - \sqrt[3]{1+x})^2; \quad y = \sin^3(1-7x^2); \quad y = x^{\ln(3-7^x)}; \quad y = x^4 e^{\operatorname{arctg}(5-2x)}; \quad y = \ln^5(4 + e^{1-6x});$$

$$(1-y)^2 e^{xy} - \cos x = 3.$$

$$63. y = (x-1)^3 4^x - \ln 2; \quad y = \frac{1-7x^2}{1-2\cos 3x}; \quad y = \frac{3-2x}{\sqrt[3]{3+5x}}; \quad y = (3-x)^2 e^{\sin 5x};$$

$$y = \ln(\sqrt{3+5x^2} - 2x); \quad y = \cos t(x - \sqrt[3]{x^2}); \quad y = \operatorname{arctg}^7(3+2x); \quad y = \arcsin^6(1 - \sqrt[3]{x});$$

$$y = (5-2x)^{\cos 5x}; \quad y^3 + (x+1)\arcsin y = 2.$$

$$64. y = x^5 e^{3+\sqrt{x}} - 6; \quad y = \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2}}{(x+8)^4}; \quad y = \frac{\cos(5-4x)}{7-x^8}; \quad y = x^9 2^{\lg 6x}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{5-2x} - x);$$

$$y = \arccos \ln(e^{1-x} - x^2); \quad y = \operatorname{arctg}^3(1+x^4); \quad y = \sin^4(1-2^{\sqrt{x}-1}); \quad y = (\arcsin(2-x))^{x^2};$$

$$(y-4)\sqrt[3]{x} + \cos 5y = 3.$$

$$65. y = 5xe^{-x^2} - 7; \quad y = \frac{3x-1}{\sin 5x-4}; \quad y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-3}; \quad y = \ln(x^2 - \sqrt{5x^2+1}); \quad y = \sin \ln(1 - e^{3x^2});$$

$$y = \sin \ln(3 + e^{3x}); \quad y = \operatorname{arctg}^6(3-x); \quad y = \cos^4(1-2\sqrt{x}); \quad y = x^{\lg 5x}; \quad x^5 \sin 6y + y = 1.$$

$$65. y = 5xe^{-x^2} - 7; \quad y = \frac{3x-1}{\sin 5x-4}; \quad y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-3}; \quad y = \ln(x^2 - \sqrt{5x^2+1}); \quad y = \sin \ln(1 - e^{3x^2});$$

$$y = \sin \ln(3 + e^{3x}); \quad y = \operatorname{arctg}^6(3-x); \quad y = \cos^4(1-2\sqrt{x}); \quad y = x^{\lg 5x}; \quad x^5 \sin 6y + y = 1.$$

$$66. y = (\sqrt{x}+5)^{e^{(x+1)^2}} + \pi; \quad y = \frac{(3x+1)^2}{\sqrt[3]{x}+12}; \quad y = \arcsin \ln(e^{-\sqrt{x}} - 5x); \quad y = \frac{\cos(3x^2-2x)}{5+x^4}$$

$$; \quad y = \ln(\sqrt[5]{5-2x^3} + 1); \quad y = x^3 3^{\operatorname{arctg}(1-5x)}; \quad y = (\arcsin 3x)^{\sqrt[3]{x}}; \quad y = \operatorname{arctg}^8(3-5x); \quad y = \sin^6(e^{\sqrt[3]{1-x}} - 1);$$

$$\ln(5x-y) - xy = 3.$$

$$67. y = 7x^3 4^{2+x^8}; \quad y = \frac{\operatorname{arctg}(6x+4x^3)}{2\sqrt{x}+3}; \quad y = \frac{6-2x^2}{\sqrt{5x^3-1}}; \quad y = \sin^7(5-9x)$$

$$; \quad y = \ln(3x - 3^{2+\sqrt{x}}); \quad y = 2^{\ln(4-7x)} x^5; \quad y = \arcsin^4\left(5 - \frac{7}{x^2}\right); \quad y = \arccos \ln(e^{-\sqrt[3]{x}} + 3);$$

$$y = (\operatorname{tg} x)^{5+2\sqrt{x}}; \quad \cos(x^2+y) - \frac{1-x}{y} = 0.$$

$$68. y = \sqrt[3]{7x^2} e^{3-x^2} + 8; y = \frac{4x-5x^2}{\sqrt{x^2-9x}}; y = \frac{\sin(x+4x^2)}{6+2x^2}; y = \operatorname{tg}^9(12-8x); y = \ln(\sqrt[3]{7+5x^2} + 2)$$

$$y = (1-x)^4 2^{\arcsin \sqrt{x}}; y = \sin^4(e^{8x^3} + 12x); y = \operatorname{arctg} \ln(e^{\sqrt[3]{x^2-3x}} + 4); y = (\arccos 5x)^{\sqrt[3]{x-1}};$$

$$\ln(x^3 + 4y) + \frac{x}{y} = 1.$$

$$69. y = (3-2x^2)3^{5x} + 4; y = \frac{4+7x}{\cos(1-x^3)}; y = \frac{1-5x^4}{\sqrt{3+x}}; y = \ln(3x+2\sqrt[3]{x^2}); y = (3x+7)e^{\sin 6x};$$

$$y = \arccos^5(3+5x^2); y = \operatorname{arctg}^4(e^{3x} + 8); y = \operatorname{tg} \ln(5^{\sqrt{x+1}} + 3); y = (2-x^2)^{-\sqrt{x}};$$

$$\cos(2x^3 + y) - \frac{2y}{x} = 1.$$

$$70. y = (5-3x)e^{x-x^2} + \pi; y = \frac{\arcsin(1-\sqrt{3x})}{\sqrt{1-x^2}}; y = \cos \ln\left(\sqrt[3]{5x} + \frac{3}{x}\right); y = \frac{\sqrt{3x+4}}{x^5 + 4x^3};$$

$$y = \ln \frac{1}{2x - \sqrt[3]{1+2x}}; y = \operatorname{arctg}^7(1-x); y = (\cos 5x)^{-\sqrt{x}}; y = \sin^3\left(e^{\sqrt{x+1}} + \frac{3}{x}\right); y = (2+x^3)3^{\sin(3-2x)};$$

$$\ln(3x^3 - y) + x = 4.$$

$$71. y = (2+4x^2)2^{1+\sqrt{x}} + 5; y = \ln \frac{3-x}{2+4\sin 2x}; y = \sin \operatorname{arctg}(3\sqrt{x} + 4); y = \frac{\sqrt[3]{2+3x^2}}{4+x};$$

$$y = \operatorname{arctg}^5(5+7x); y = (1-x)^4 e^{\cos 3x}; y = \ln(\sqrt[3]{7+2x} - 3x); y = \ln^8\left(5 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right);$$

$$y = (1-7x^2)^{\cos 6x}; (x-1)^2 \arccos y - 2y^4 = 2.$$

$$72. y = (2-3x)3^{5x^2} - 1; y = \frac{\sin(3x-2x^2)}{1+x}; y = \frac{x+4x^2}{\sqrt[3]{x}-7x}; y = \ln(2x + \sqrt[3]{x^2-4x});$$

$$y = \ln(5 + y^{\sqrt{q}}); y = x^5 e^{\operatorname{arctg}(1-x)}; y = \cos^3(e^{-\sqrt{x}} + 7); y = \arccos^7(3+5x); y = (\sqrt{x})^{\ln 3x};$$

$$\frac{2x}{y^2} = \operatorname{arctg}(x^2 y) + 2.$$

$$73. y = 2xe^{x^3-7} + \sqrt{5}; y = \frac{\operatorname{arctg}(3+x)}{x^2-7}; y = \frac{2+x^3}{\sqrt{4x^2+x}}; y = \ln \frac{3x}{1+\sqrt[3]{x}}; y = \arccos \ln(3 + \sqrt[3]{x});$$

$$y = x^4 2^{\cos 5\sqrt{x}}; \quad y = \operatorname{arccctg}^4 3x; \quad y = \sin^9(2 + e^{\sqrt{x}}); \quad y = (2x + \cos)^{x^2}; \quad \sin(3x - y) + x^2 y^3 = 1.$$

$$74. y = (2 + x^3)e^{3x} + \pi; \quad y = \frac{\operatorname{tg}(2 + 3x)}{x^3 + 7}; \quad y = \frac{\cos \sqrt{x} - 7}{\sqrt[3]{x} - 3x}; \quad y = \ln \frac{1}{\sqrt[3]{3 - x^2} - x}; \quad y = x^6 9^{\arcsin 4x};$$

$$y = \ln \cos\left(2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right); \quad y = \sin^7(5 + x^2); \quad y = \ln^4(3 - e^{5x}); \quad y = (\operatorname{arctg}(2 + \sqrt{x}))^x;$$

$$(x + 1)^3 e^{2x - y} + y = 1.$$

$$75. y = (2x + 3)^{-\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}; \quad y = \frac{(x + 4)^5}{\sqrt[4]{(x - 1)^3}}; \quad y = \frac{1 - 4x^3}{\operatorname{tg}(1 - 7x)}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{3 - x^2} - 2x); \quad y = (1 - x)^3 5^{\cos(3 + 2x)};$$

$$y = \arcsin \ln\left(e^{x+3} - \frac{2}{x}\right); \quad y = \cos^7(e^{5\sqrt{x}} - 4x); \quad y = \ln^3(2 - 3^{\sqrt{2x}}); \quad y = [\operatorname{ctg}(4 - 7x)]^{5x};$$

$$\sqrt{y + 1} \cdot x - \sin(x - y) = 4.$$

$$76. y = (5 - 3x)e^{\sqrt{x-1}} + 8; \quad y = \frac{1 + 4x^2}{\cos 3x - 4}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{1 - 3x^3}}{5 - x}; \quad y = \ln\left(5x - \frac{1}{8 - 2x}\right);$$

$$y = (3 - x^3)e^{\sin(3 - 7x)}; \quad y = \operatorname{arctg} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x}} + 5x\right); \quad y = \sin^9(e^{-x} + 4); \quad y = \arcsin^6(3 - 2x);$$

$$y = (\operatorname{tg} 3x)^{1 + \sqrt[3]{x}}; \quad \cos(3x + 2y) + \sqrt{x} = 0.$$

$$77. y = (3 - 4x^2)2^{-5x} + 7; \quad y = \frac{1 - 5x}{\cos 3x + 4}; \quad y = \frac{\sqrt{5 - 2x}}{5x^2 - x}; \quad y = \cos \ln(1 - 5^{x^2});$$

$$y = \ln(5x - \sqrt{3 - 2x}); \quad y = 7xe^{\cos(7x-1)}; \quad y = \arcsin^4 5x; \quad y = \sin^4(1 - \sqrt[3]{x}); \quad y = x^{\sin 2x};$$

$$x^5 \sin 7y + y^4 + 3.$$

$$78. y = 2x^7 3^{4+5x} + \pi^2; \quad y = \frac{4 - 7x}{3 \sin 4x - 8}; \quad y = \frac{\sqrt{1 + 3x^2}}{5 + 6x}; \quad y = \ln \sin(3 - e^{2x});$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{3 + x} + x^2); \quad y = 4x^2 e^{\cos(1-x)}; \quad y = \operatorname{arctg}^4(5 + 12x); \quad y = \cos^9(3 + e^{2x}); \quad y = (3x + 2)^{\cos 5x};$$

$$y \operatorname{tg}(xy) - e^x = 2.$$

$$79. y = (3 + 2x)e^{4-3x^2} + \sqrt{\pi}; \quad y = \frac{\arcsin(3-4x^2)}{2+7x}; \quad y = \ln \frac{1}{x^3 + \sqrt{x^2+4}}; \quad y = \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^5}};$$

$$y = (5-x^3)2^{\cos(1-5x)}; \quad y = \sin \ln(\sqrt[4]{x} + x^2); \quad y = \sin^9(e^{2z} + x^2); \quad y = \arccos^7(1-x);$$

$$y = (1-7x)^{\cos 3x}; \quad \cos(y-5x) - \frac{1-y}{x} = 13.$$

$$80. y = (2+3x)5^{7x^4} + \ln 8; \quad y = \frac{\sin(3+8x)}{1-x^2}; \quad y = x^2 e^{\arcsin(1-x)}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{2-7x}}{3x^2-x};$$

$$y = \ln(5x - \sqrt{x^4+2}); \quad y = \ln \cos(e^{\sqrt[3]{x}} - x); \quad y = (tg 5x)^{x^3}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{2-7x}}{3x^2-x}; \quad y = \arccos^4(1-5x);$$

$$y = \sin^4(\sqrt[5]{x^2-x}); \quad xy^2 - \arctg(x-y) = 5.$$

$$81. y = (2-7x)e^{x^3+3} = \pi^2; \quad y = \frac{3-8x}{\arcsin(1-8x)}; \quad y = \arctg \ln(e^{-\sqrt[4]{x}} - x); \quad y = \frac{\sqrt{y-x^3}}{5-x^2};$$

$$y = \ln \frac{1}{2x - \sqrt{5-3x}}; \quad y = \sin^9(4 + e^{7x}); \quad y = (3x - \sin 2x)^x; \quad y = (5-x)^2 e^{\arccos 7x};$$

$$y = \arcsin^5(1-x^2); \quad \cos 3x - x^2 y^3 = 17.$$

$$82. y = (1-5x)e^{3x} + \pi; \quad y = \frac{\cos(5-2x)+3}{x^3}; \quad y = \frac{\sqrt{x^3-7}}{2x-1}; \quad y = \ln(x^3 - \sqrt{1-3x});$$

$$y = (x-1)^3 e^{\arctg 5x}; \quad y = \ln \arccos(1 + \sqrt[3]{x}); \quad y = \sin^4(1-3x); \quad y = \ln^6(2 + e^{3x}); \quad y = (x+3)^{\ln(1+e^{-x})};$$

$$x^3 e^{xy} + \cos y = 4.$$

$$83. y = x^4 4^{3-x} + \ln 5; \quad y = \frac{2-5x^3}{3-\cos 2x}; \quad y = \frac{5-4x}{\sqrt{5x-7x^3}}; \quad y = x^5 e^{\sin 8x}; \quad y = \ln(\sqrt{7+5x} - x^6);$$

$$y = \operatorname{costg}(\sqrt[3]{2x} + x); \quad y = \arctg^7(2-x); \quad y = \arcsin^6(1 - \sqrt[3]{x^2}); \quad y = (5-2x)^{\cos(1-x)};$$

$$x^y \arcsin y + y^3 = 3.$$

$$84. u = x^5 e^{2-5x} - \ln 3; \quad y = \frac{\sqrt[3]{8-x^2}}{(x+4)^7}; \quad y = \cos \frac{5-4x}{7-x^2}; \quad y = x^7 4^{\lg 5x}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{3-2x^2-3});$$

$$y = \arccos \ln(e^{-3x} + 4x); \quad y = \arctg^5(3-2x); \quad y = \sin^4(1-3\sqrt{x}); \quad y = (\arcsin 5x)^{x^3-1};$$

$$(y+1)^{\sqrt{x}} + \cos(x-y) = 0.$$

$$85. y = (3-x)e^{x^2+2} - \ln 2; y = \frac{3x}{\sin 7x+4}; y = \frac{\sqrt{2x^2+7}}{1-x}; y = 5xe^{\sin 3x}; y = \ln(2x - \sqrt{3x^2-2});$$

$$y = \sin \ln(4 - e^{-\sqrt{x+1}}); y = \arctg^3(3-5x); y = \cos^4(x - \sqrt[3]{x}); y = x^{\lg 7x}; x \sin(5xy) - y^3 = 3.$$

$$86. y = (2\sqrt{x}+4)e^{-x^2} + 3; y = \frac{(5x-2)^2}{\sqrt[3]{x-4}}; y = \frac{\cos(x-4x^2)}{1-3x^4}; y = \ln(\sqrt[5]{5+x^2-4});$$

$$y = x^3 3^{\arctg(1-3x)}; y = \arcsin \ln(e^{-\sqrt{1-x}} + 3); y = \arctg^6(3+7x); y = \sin^6(e^{\sqrt[3]{1-x}} + 4);$$

$$y = (\arcsin 7x)^{\sqrt{3x}}; \ln(3x-7y) + \frac{x}{y} = 3.$$

$$87. y = 6x^3 4^{3-2x^8} - e^2; y = \frac{\arctg(2x-7x^3)}{3\sqrt{x}-4}; y = \cos x^5 2^{\ln(2-8x)}; y = \frac{3-x^2}{\sqrt{2x^3-7}};$$

$$y = \ln(5x + 3^{-\sqrt{x}}); y = \sin^7(4-12x); y = (\lg(1-x))^{\sqrt{x}}; y = \arccos \ln(e^{-\sqrt{2-7x^2}} + 1);$$

$$y = \arcsin^4\left(3 - \frac{10}{x^2}\right); \cos(x^2-3y) + \frac{y+1}{x} = \pi.$$

$$88. y = \sqrt[3]{3x^2} e^{5+2x^2} - 1; y = \frac{5x-x^2}{\sqrt{3x^2+x}}; y = \arctg \ln(e^{\sqrt[3]{3x^2-7x}} + 2); y = \frac{\sin(2x-3x^2)}{5-2x^2};$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{3-2x^2} + 1); y = \lg^7(4+5x); y = (\arccos)^{\sqrt{x}}; y = x^4 2^{\arcsin(2-\sqrt{x})};$$

$$y = \sin^4(e^{2x^3} - 7x^2); \ln(x^3+2y) + \frac{2y}{x^2} = 4.$$

$$89. y = (8+x^2)^{\beta^{8x}} + \pi^3; y = \frac{7-3x}{\cos(5+8x^3)}; y = \lg \ln(5^{\sqrt{1-x}} + 4); y = \frac{3-2x^4}{\sqrt{5-3x}};$$

$$y = \ln(3x - 2\sqrt[3]{x}); y = (x-8)e^{\sin 3x}; y = (3-2x)^{\sqrt{x}}; y = \arccos^5(2+x^2); y = \arctg^4(e^{6x} - 4);$$

$$\cos(x^3-2y) - \frac{x}{y} = 4.$$

$$90. y = (2 - 3x)e^{x+5x^2} - \ln 2; y = \frac{\arcsin(4 - 2\sqrt{x})}{\sqrt{1 - 5x^2}}; y = \ln \frac{1}{5x - \sqrt[3]{3 - x}}; y = \frac{\sqrt{x - 7}}{4x^5 - x^3};$$

$$y = \arctg^7(3 + 2x); y = \sin^3\left(e^{-\sqrt{x}} + \frac{y}{x}\right); y = (\cos 7x)^{2\sqrt{x}}; y = (7 - 2x^3)^{\sin(5+2x)};$$

$$yy = \cos \ln\left(\sqrt[3]{7x} + \frac{2}{x}\right); \ln(x^3 + y^2) - 7x = 6.$$

$$91. y = (1 - 2x^2)^{3\sqrt{x}} + \pi; y = \frac{5 + x}{2 + \sin 3x}; y = \frac{\sqrt[3]{3 - x^2}}{5 + 2x}; y = tg^5(3 - 7x^2);$$

$$y = \ln(\sqrt[3]{1 + 2x} + 4x); y = (x + 1)^4 e^{\cos 8x}; y = \arctg(\sqrt{x} + 7)^3; y = \ln^7\left(3 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right);$$

$$y = (1 - 8x^2)^{\cos 3x}; x^3 \arccos 3x + y^4 = 2.$$

$$92. y = (1 - 7x)^{3^{2x^2}} + 4; y = \frac{\sin(5x + 2x^2)}{2 - 4x}; y = \ln^2 \sin(4 - e^{2\sqrt{x}}); y = \frac{2x - 8x^2}{\sqrt[3]{x} + 5x};$$

$$y = \ln(3x - \sqrt[3]{x^2 - 2x}); y = 2x^5 e^{\arctg 3x}; y = (\sqrt{x} + 1)^{\ell nx}; y = \arccos^7(4 - 7x); y = \cos^3(e^{8\sqrt{x}} - 4);$$

$$\frac{5x}{y^2} - \arctg xy = 4;$$

$$93. y = 3xe^{8x^2+7} + \ln^2 3; y = \frac{\arctg(4 - 2x)}{x^2 + 2}; y = (x + 2)^4 2^{\cos \sqrt{3x}}; y = \frac{x - 5x^3}{\sqrt{x} - 2x^2};$$

$$y = \ln \frac{2x}{4 - \sqrt[3]{x}}; y = \arctg^4 7x; y = \sin^9(2 + 3e^{\sqrt{x}}); y = \arccos \ln(2 - \sqrt[3]{1 - x}); y = (3x - \cos x)^{x^2};$$

$$\sin(2x + y) - x^3 y = 4.$$

$$94. y = (4 - 2x^3)e^{2x} + \sqrt{\pi}; y = \frac{tg(4 - 5x)}{2 - x^3}; y = \frac{\cos \sqrt{2x} + 4}{\sqrt[3]{1 - x} + 4x}; y = \sin^7(3 - 2x^2);$$

$$y = \ln \frac{1}{\sqrt[6]{4 + x^2} + 2x}; y = (1 - x)^5 6^{\arcsin 3x}; y = \ln \cos\left(3x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right); y = \ln^4(5 + e^{x-3});$$

$$y = (\arctg(3 - 2\sqrt{x}))^x; y + x^3 e^{2x+y} + 4x = 0.$$

$$95. y = (3x - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 4\right); y = \frac{(1 - 3x)^5}{\sqrt[4]{(1 - 5x)^3}}; y = \frac{1 - 7x^3}{tg(5 + 3x)}; y = (3x - 1)^3 5^{\cos 4x};$$

$$y = \arcsin \ln\left(e^{7-x} - \frac{5}{x}\right); y = \cos^7(e^{-3\sqrt{x}} + 2x); y = \ln(\sqrt[3]{1 - 7x^2} - 3x); y = \sin^3(4 - 3^{-2\sqrt{x}});$$

$$y = (\operatorname{ctg}(5+3x))^{-x}; \quad x\sqrt{y} - \sin(3x+5y) = 3.$$

$$96. y = (2+x)^2 2^{-3x} + 4; \quad y = \frac{5x}{\cos 5x - 7}; \quad y = \frac{\sqrt{3-x}}{1-x^2}; \quad y = \ln(2x + \sqrt{3-x}); \quad y = (1-x)e^{\cos 4x};$$

$$y = \cos \ln(4-3^{x^2}); \quad y = \arcsin^5 3x; \quad y = \sin^8(7 + \sqrt[3]{x}); \quad y = x^{\sin 3x}; \quad y + \sin(x-y^2) = 4.$$

$$97. y = (1-x)^3 3^{x+7} + \sqrt{6}; \quad y = \frac{5+2x}{\sin 7x-4}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{3+2x^2} - x); \quad y = \frac{\sqrt{3-x^3}}{\sin 6x+1};$$

$$y = \cos^3(6-e^{2x}); \quad y = (x+2)^{\cos 3x}; \quad y = \operatorname{arctg}^5(3-7x); \quad y = (x-1)^2 e^{\cos(5x-3)};$$

$$y = \ln \sin(5-e^{-3x}); \quad x + \operatorname{tg}(xy) = 4.$$

$$98. y = (x-3)e^{x^3+2x}; \quad y = \frac{8-7x}{\sin 3x+2}; \quad y = \frac{\sqrt{5+3x^3}}{9-4x}; \quad y = 2(x-1)^2 e^{\sin x}; \quad y = \ln(\sqrt[3]{12-x^2} - 3x);$$

$$y = \arccos^3 10x; \quad y = \sin^5(12e^{3x} - 4x); \quad y = \operatorname{arctg} \ln^{\frac{1}{3x}}; \quad y = (x-1)^{\cos 3x}; \quad \frac{x}{y} - e^{xy} = 5.$$

$$99. y = (3+x^2)e^{-\sqrt{3x}} + \pi; \quad y = \frac{5+x^2}{\cos 12x+3}; \quad y = (8+x^5)e^{\sin(5+2x)}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{6-7x^2}}{9x+4};$$

$$y = \ln\left(7x - \frac{5}{x+1}\right); \quad y = \sin^3(e^{7x} + 4); \quad y = (\operatorname{tg}^{4x})^{7-x}; \quad y = \operatorname{arctg} \ln\left(\frac{5}{\sqrt{x}} + 4x\right);$$

$$y = \arcsin^4(7+8x); \quad \cos(5x+y) + \sqrt[3]{5y} = 2.$$

$$100. y = (7-5x)5^{3x^2} + \sqrt{e}; \quad y = \frac{\sin(9-11x)}{7x^2}; \quad y = \ln \cos\left(3 + e^{\frac{1}{\sqrt{2x}}}\right); \quad y = \frac{\sqrt[3]{5-9x}}{x^2-12};$$

$$y = \ln(3x - \sqrt{2x^3-1}); \quad y = \arccos^5(1-13x); \quad y = (\operatorname{tg} 7x)^{4-x^2}; \quad y = (x+7)^3 e^{\operatorname{arctg} 8x};$$

$$y = \sin^7\left(\sqrt{3x} + \frac{4}{x^2}\right); \quad \frac{(x-3^2)}{y} + \operatorname{arctg}(x-y) = 0.$$

Завдання 11

Дослідити методами диференціального числення задані функції та побудувати їх графік.

- | | |
|---|------------------------|
| 1. $y = \frac{x+1}{x^3};$ | $y = xe^{-x} + 1$ |
| 2. $y = \frac{x^2}{x-1};$ | $y = (2x+x)e^x - 1$ |
| 3. $y = \frac{x^3}{x^3-2};$ | $y = (x-1)e^{-2x} + 2$ |
| 4. $y = \frac{-x}{x^3-1};$ | $y = (3x-1)e^{2x} - 3$ |
| 5. $y = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2;$ | $y = (2x+1)e^{2x} + 1$ |
| 6. $y = \frac{3x^3}{x^3+6};$ | $y = 2xe^x - 1$ |
| 7. $y = \frac{x^2+1}{2x+3};$ | $y = (3-x)e^{-x} + 3$ |
| 8. $y = \frac{x^3}{x^2+2x+3};$ | $y = (3x+1)e^{-x} + 2$ |
| 9. $y = \frac{16}{x^2(x-4)};$ | $y = (1-x)e^{-x} + 1$ |
| 10. $y = \frac{x^2+1}{x-1};$ | $y = (2x+1)e^x - 1$ |
| 11. $y = \frac{x^4}{x^3-1};$ | $y = (6-3x)e^{2x} + 2$ |
| 12. $y = \frac{x^3}{x^2+1};$ | $y = 3xe^{-x} + 1$ |
| 13. $y = \frac{-x^2}{(x-2)^2};$ | $y = (5x-2)e^{-x} + 3$ |
| 14. $y = \frac{x}{x^3-2};$ | $y = (2x-1)e^{2x} + 3$ |
| 15. $y = \frac{4x^3}{x^3-1};$ | $y = (4-2x)e^x - 2$ |
| 16. $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x};$ | $y = (x+3)e^{-2x} + 1$ |
| 17. $y = \frac{x+3}{x^3};$ | $y = -xe^x + 2$ |

18. $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$;	$y = (2x + 5)e^{2x} + 1$
19. $y = \frac{x^2}{x^3 + 1}$;	$y = (1 - x)e^x + 1$
20. $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$;	$y = (x + 1)e^{-x} + 3$
21. $y = \frac{x}{2 - x^3}$;	$y = (2x + 3)e^x + 2$
22. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$;	$y = (x - 3)e^{-2x} + 4$
23. $y = \frac{4x^3}{x^{3-1}}$;	$y = 2xe^{-x} - 1$
24. $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$;	$y = (2x - 1)e^{-x} - 2$
25. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;	$y = (x - 2)e^{2x} - 3$
26. $y = \frac{-x}{x^3 + 3}$;	$y = (2x - 3)e^{-3x} + 1$
27. $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$;	$y = -xe^{2x} + 2$
28. $y = \frac{x}{x^3 - 4}$;	$y = (5 - 2x)e^{-x} + 3$
29. $y = \frac{x-2}{(x+1)^2}$;	$y = (2x - 3)e^{-x} + 4$
30. $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$;	$y = (2x - 3)e^{-x} + 4$
31. $y = \frac{3x}{3 + x^2}$;	$y = (x + 2)e^{3x} + 2$
32. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$;	$y = 2xe^x - 1$
33. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;	$y = (1 - 2x)e^x + 2$
34. $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$;	$y = (x - 2)e^{-3x} - 2$
35. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$;	$y = (5x + 2)e^{2x} - 1$
36. $y = \frac{2x^3}{x^3 + 1}$;	$y = (3x + 1)e^{-x} - 2$
37. $y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$;	$y = (x + 2)e^{2x} + 3$
38. $y = \frac{-2x^3}{x^2 + 3}$;	$y = (2x - 1)e^{-2x} + 1$
39. $y = \frac{-x}{x^3 + 2}$;	$y = -xe^x + 2$

40. $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$;	$y = (x-2)e^x + 2$
41. $y = \frac{x^4}{x^3+1}$;	$y = xe^{-3x} + 4$
42. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;	$y = (5x-2)e^x + 1$
43. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$;	$y = (2x+3)e^{-3x} + 2$
44. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$;	$y = (3x-2)e^{-x} + 1$
45. $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$;	$y = (2-x)e^{3x} + 1$
46. $y = \frac{x^3}{3(x-2)^2}$;	$y = (3x-1)e^{-2x} + 2$
47. $y = \frac{3x^3}{x^3+8}$;	$y = 3xe^x - 1$
48. $y = \frac{2x^2}{x+2}$;	$y = (5x+2)e^{-x} + 3$
49. $y = \frac{2x^2}{x+2}$;	$y = (5x+2)e^{-x} + 3$
50. $y = \frac{x^3}{(2x+1)^2}$;	$y = (2x-1)e^x - 1$
51. $y = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$;	$y = (3x+6)e^{-x} + 2$
52. $y = \frac{4x^3}{x^3-4}$;	$y = (2x-4)e^{-ex} + 3$
53. $y = \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2$;	$y = (3x+2)e^{3x} + 2$
54. $y = \frac{3x}{x^3+1}$;	$y = (2x+1)e^{-3x} - 1$
55. $y = \frac{x^3}{x^2-x+2}$;	$y = (1-x)e^{3x} + 2$
56. $y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$;	$y = 2xe^{-x} + 3$
57. $y = \frac{2x+4}{(x+1)^2}$;	$y = (3x-6)e^x - 2$
58. $y = \frac{x^4}{x-3}$;	$y = (2x+1)e^{-2x} + 3$
59. $y = \frac{2x}{1-x^3}$;	$y = (5x+2)e^x - 3$
60. $y = \frac{x^3}{3(x+2)^2}$;	$y = (2-3x)e^{-x} - 1$

$$61. y = \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 ;$$

$$62. y = \frac{x+1}{(x-3)^2} ;$$

$$63. y = \frac{-x^2}{(x+3)^2} ;$$

$$64. y = \frac{x^3}{x^3-6} ;$$

$$65. y = \frac{3x^4+4}{x^3} ;$$

$$66. y = \frac{-x^3}{x^2-x+4} ;$$

$$67. y = \frac{6-3x}{(x+2)^2} ;$$

$$68. y = \frac{(3x-2)^2}{x^2} ;$$

$$69. y = \frac{x^4}{x^3+3} ;$$

$$70. y = \frac{-3x^3}{x^3-4} ;$$

$$71. y = \frac{x^3}{x^2+x+1} ;$$

$$72. y = \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 ;$$

$$73. y = \frac{-3x^3}{x^3+5} ;$$

$$74. y = \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 ;$$

$$75. y = \frac{x+1}{(x-3)^2} ;$$

$$76. y = \frac{2x}{x^3-3} ;$$

$$77. y = \frac{x^3}{x^2+4} ;$$

$$78. y = \frac{x+1}{x^2+x+1} ;$$

$$79. y = \frac{x^3-2}{(x-1)^2} ;$$

$$80. y = \frac{-2x}{x^3+4} ;$$

$$81. y = \frac{x+2}{(x+3)^2} ;$$

$$y = (1+2x)e^{-x} - 1$$

$$y = (2x+4)e^{-3x} + 2$$

$$y = xe^{-2x} + 1$$

$$y = (3x+6)e^{-x} + 2$$

$$y = (1-2x)e^{2x} + 3$$

$$y = (x+1)e^{-3x} - 2$$

$$y = (5x-2)e^{-2x} + 2$$

$$y = -xe^{2x} + 1$$

$$y = (x-3)e^{-x} + 2$$

$$y = (1-2x)e^{3x} + 1$$

$$y = (3x+2)e^{-2x} - 3$$

$$y = (2-x)e^{2x} + 3$$

$$y = (2-4x)e^x + 1$$

$$y = (3x-6)e^{2x} - 2$$

$$y = (2x+4)e^{-x} + 1$$

$$y = (2-3x)e^x + 4$$

$$y = 2xe^{3x} + 1$$

$$y = (1-2x)e^x - 3$$

$$y = (2x+5)e^{-x} + 2$$

$$y = (x-3)e^{2x} + 1$$

$$y = (2x-3)e^{-3x} + 2$$

$$82. y = \frac{2x^3}{x^3 - 8} ;$$

$$y = (x + 2)e^{2x} + 3$$

$$83. y = \frac{3x^3}{x^2 - x + 1} ;$$

$$y = xe^{-3x} - 1$$

$$84. y = \frac{-3x}{x^3 + 3} ;$$

$$y = (x + 2)e^{-2x} + 1$$

$$85. y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 2} ;$$

$$y = (6 - 3x)e^x + 2$$

$$86. y = \frac{-x^3}{x^3 + 4} ;$$

$$y = (x - 1)e^{3x} - 3$$

$$87. y = \frac{x^3 + 4}{x^2} ;$$

$$y = (3 - x)e^{2x} + 2$$

$$88. y = \frac{2x^3}{x^3 - 5} ;$$

$$y = (2x - 5)e^{-x} + 1$$

$$89. y = \frac{-2x^3}{x^2 + x + 1} ;$$

$$y = xe^{3x} - 2$$

$$90. y = \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right)^2 ;$$

$$y = (3x - 2)e^{2x} + 4$$

$$91. y = \frac{-x^3}{x^3 - 5} ;$$

$$y = (x + 2)e^{-3x} + 1$$

$$92. y = \frac{3x}{4 - x^3} ;$$

$$y = (5x - 2)e^{3x} + 3$$

$$93. y = \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1} ;$$

$$y = (2 + 2x)e^{-x} + 3$$

$$94. y = \frac{-2x^3}{x^3 + 4} ;$$

$$y = (3 - x)e^x - 1$$

$$95. y = \left(\frac{2x - 3}{x + 1} \right)^2 ;$$

$$y = (x - 2)e^{-3x} + 2$$

$$96. y = \frac{-2x^3}{x^3 + 2} ;$$

$$y = (2x - 4)e^{2x} - 3$$

$$97. y = \frac{4x}{4 + x^2} ;$$

$$y = (1 - x)e^{-3x} + 3$$

$$98. y = \left(\frac{x + 2}{x + 1} \right)^2 ;$$

$$y = 3xe^{-x} - 2$$

$$99. y = \left(\frac{3x - 1}{x + 1} \right)^2 ;$$

$$y = (5 - 2x)e^{2x} + 3$$

$$100. y = \frac{x - 2}{x^2 + 4} ;$$

$$y = (x - 2)e^{3x} - 1$$

Завдання 12

Обчислити неозначені інтеграли

1. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; $\int x e^{-x^2} dx$; $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$; $\int \sqrt{9 - x^2} dx$; $\int e^{-x} \sin x dx$;
 $\int \frac{3x + 4}{x^2 + x + 1} dx$; $\int \frac{dx}{x^2(x+1)(x^2+4)}$; $\int e^{-x} \sin x dx$; $\int \sin^4 x dx$; $\int \sin 2x \cos 3x dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+3x}}$; $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)}$; $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; $\int \sqrt{x} e^{x\sqrt{x}} dx$; $\int \sin^3 x dx$; $\int x \cos 5x dx$;
 $\int \cos 2x \cdot \sin 3x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \frac{dx}{x^2 - x}$; $\int \sqrt{1 - 2x^2} dx$.
3. $\int \sqrt{2+3x} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; $\int x^3 \cos x^2 dx$; $\int \cos^2 x dx$; $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$; $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$;
 $\int \frac{dx}{x(x-2)(x^2+1)}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$; $\int x^2 e^x dx$.
4. $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx$; $\int \frac{dx}{x(x+2)^2}$; $\int \sqrt{\frac{1+x}{2-x}} dx$; $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; $\int 2x \sin 2x dx$; $\int \sin^4 x dx$;
 $\int \sqrt{x^2 - 16} dx$; $\int \ln^2 x dx$; $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$; $\int \frac{e\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.
5. $\int \tg^2 2x dx$; $\int \frac{dx}{2+3x}$; $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$; $\int \arcsin x dx$; $\int \frac{3x}{2+x^2} dx$;

$$\int \frac{dx}{(2x^2+1)x}; \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx; \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$6. \int sh^2 x dx; \int \ln(1+e^{2x})e^{2x} dx; \int tg^3 x dx; \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}; \int \frac{tg(\ln x)}{x} dx; \int \sin 2x \cos x dx;$$

$$\int x^2 e^{-x} dx; \int x \ln x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}; \int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

$$7. \int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}; \int x \arctg x dx; \int x^4 e^{-2x^5} dx; \int \frac{5x}{1+2x} dx; \int ch^2 x dx; \int \cos^3 x dx; \int x \ln(1+x) dx;$$

$$\int \sin^4 2x dx; \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}; \int \frac{3dx}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$8. \int \sqrt{4-x^2} dx; \int e^{-2x} \cos x dx; \int x \cos x dx; \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}; \int 2 \ln \sqrt{x} dx; \int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)};$$

$$\int x \cos^2 x dx; \int x^2 e^{2x} dx; \int \frac{dx}{\sin^3 2x}; \int \frac{xdx}{x^2+4x+6}.$$

$$9. \int \frac{dx}{x^3+x^2}; \int \arctg 2x dx; \int \frac{tg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{x+1}{x-1} dx; \int x \sin^2 x dx; \int \sin 2x \cos 7x dx;$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx; \int \ln(2+3x) dx; \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \int \sqrt{5x-2} dx.$$

$$10. \int ctg^2 x dx; \int 5 \cos^2 2x dx; \int \ln x^2 dx; \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx; \int \frac{dx}{x(x-3)(x+1)}; \int x e^{-x} dx; \int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}; \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}; \int \arctg x dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{x^4+x^2}; \int \frac{\cos \sqrt{pc}}{\sqrt{x}} dx; \int x e^{-2x} dx; \int \sqrt{4-x^2} dx; \int \cos x \cos 4x dx; \int \frac{dx}{3+\sin x};$$

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx; \int \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx; \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx; \int e^x \cdot e^{e^x} dx.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}}; \int \frac{e\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx; \int x \sin 3x dx; \int \frac{dx}{x(x+5)}; \int \frac{dx}{x^2+x+2}; \int tg^2 x dx; \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx;$$

$$\int \sqrt{9-x^2} dx; \int x^2 \ln x dx; \int \sin x \cos 2x dx.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{2+3x}}; \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx; \int 3 \ln \sqrt[3]{x} dx; \int \frac{dx}{x^2-4}; \int \frac{x^3}{x+1}dx; \int x^2 e^{-3x} dx; \int \frac{dx}{x^2+x+4};$$

$$\int e^{-x} \cos 2x dx; \int \frac{dx}{\sin^4 2x}; \int \sqrt{x^2-4} dx.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{9+2x}}; \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+5}; \int \frac{dx}{x^2-9}; \int \frac{x^2}{x-1}dx; \int x^3 \ln x dx; \int \frac{dx}{2-\sin x};$$

$$\int \ln(x+2)dx; \int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx; \int \sqrt{x^2+4} dx.$$

$$15. \int \sqrt[4]{3-2x} dx; \int x e^{-6x} dx; \int x \arctg x^2 dx; \int \frac{\arctg^3 x}{1+x^2} dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+1}; \int \frac{dx}{x(x^2+9)};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 2x}; \int \frac{dx}{2-\cos x}; \int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}; \int \sqrt{x^2+x+1} dx; .$$

$$16. \int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}dx; \int \frac{\arctg(x+1)}{x^2+2x+2}dx; \int \frac{dx}{(2x-1)(x+3)}; \int \cos^6 x dx; \int \frac{x}{x^2+1}dx; \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$\int \frac{dx}{\cos x+6}; \int \sqrt{\frac{x}{3x+1}}dx; \int x \sin 7x dx; \int \cos^3(2x+1)dx; .$$

$$17. \int \frac{x}{x^2+x+3}dx; \int (2x+1)\cos(x^2+x)dx; \int \ln \sqrt[5]{x+2} dx; \int \sin^3(2x+1)dx; \int \frac{x^2+x+1}{3x-1}dx;$$

$$\int \cos x e^{\sin x} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{3+5x}}; \int \cos^4(3x+2)dx; \int \sin x \cos 5x dx.$$

$$18. \int \sin 2x e^{\cos 2x} dx; \int x^2 \sin 2x dx; \int \sin x \sqrt{\cos x} dx; \int \frac{dx}{(x+3)(x-4)}; \int \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} dx; \int \frac{dx}{\sin 2x+3};$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x}; \int \sqrt[3]{x-3} dx; \int x e^{x^2+1} dx; \int \arctg 3x dx.$$

$$19. \int x \sin(x^2 + 3) dx; \int \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x^2 + x + 10}; \int \frac{2x dx}{3x + 4}; \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + 4}}; \int \frac{dx}{x \ln x}; \int \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \int \ln^2(x + 2) dx.$$

$$20. \int \sqrt[3]{3 - 2x} dx; \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \int 5x \cos(6x + 1) dx; \int \frac{dx}{x^2 - 3}; \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; \int x^3 \ln \sqrt{x} dx;$$

$$\int \frac{dx}{3 + \sqrt{x}}; \int \sin^5 x dx; \int \cos^4 2x dx; \int \sqrt{x^2 + 16} dx.$$

$$21. \int \sqrt{16 + 21x} dx; \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x(x^2 + 16)}; \int \frac{dx}{2x + \sqrt{x}}; \int \arcsin x dx; \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 11};$$

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx; \int \frac{dx}{\sin^3 x}; \int \cos^2 x \sin^4 x dx; \int \sqrt{x^2 - 16} dx.$$

$$22. \int \sqrt[3]{9 + 17x} dx; \int \operatorname{arctg}(x + 6) dx; \int e^{-3x} \cos 2x dx; \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 19}; \int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x};$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}} dx; \int \frac{dx}{\cos^4 x}; \int \cos^3 x \sin^3 x dx; \int x^3 e^{-x^2} dx; \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + 2\sqrt{x}}.$$

$$23. \int \sqrt{5 + 6x} dx; \int \frac{\cos \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx; \int \frac{dx}{x(2x+3)}; \int \frac{dx}{\sin^6 x}; \int x 3^{2x} dx; \int \frac{dx}{x^2 + x + 10};$$

$$\int \sqrt{16 - x^2} dx; \int \sin^4 x dx; \int \cos 3x \sin x dx; \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}}.$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{3x-1}}; \int \frac{\operatorname{arctg}^2(x+1)}{x^2 + 2x + 2} dx; ; \int \frac{\sin \sqrt{3x}}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}; \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3}; \int \frac{dx}{x(x-4)};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 2x}; \int x^3 \ln x dx; \int \sin 5x \cos 2x dx; \int \sqrt{16 + 4x^2} dx.$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{5x+7}}; \int \frac{e^{\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} dx; \int x^2 \cos 5x dx; \int \frac{dx}{x(x-3)^2}; \int \operatorname{ctg}^2 2x dx; \int \cos 6x \sin x dx;$$

$$\int \sqrt{x^2 + x + 4} dx; \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{\sin^6 x}; \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}.$$

$$26. \int \sqrt{3x+10} dx; \int \frac{\cos \sqrt{3x+1}}{\sqrt{1+3x}} dx; \int \sqrt{x} \cos \sqrt{x^3} dx; \int \frac{dx}{x^2-x+2}; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}; \int \frac{dx}{1-3\sqrt{x}};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^6 2x}; \int \cos 4x \sin x dx; \int \cos^2 x \sin^6 x dx; \int x^3 e^{x^4} dx.$$

$$27. \int \frac{dx}{\sqrt{b+ax}}; \int x^3 e^{-x^4} dx; \int \cos^3 2x dx; \int \frac{dx}{(x+2)(x^2+81)}; \int 3x \sin 2x dx; \int \sin^4 x dx;$$

$$\int \cos 5x \cos 2x dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+5}; \int \frac{dx}{x^4+x^2}; \int \sqrt{3-5x} dx.$$

$$28. \int \sqrt{3+7x} dx; \int \frac{\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x^2-5x+6}; \int \frac{dx}{\sin^6 3x}; \int \frac{dx}{3+\sin x}; \int \sin 4x \sin 3x dx;$$

$$\int \sqrt{2x^2+4} dx; \int \frac{dx}{x(x+2)(x^2+4)}; \int 3x^2 e^{-2x} dx.$$

$$29. \int \frac{\arctg^2 2x}{1+4x^2} dx; \int \frac{dx}{3x(x+2)^2}; \int (5x+1) \sin 2x dx; \int \sqrt{\frac{1+2x}{2-3x}} dx; \int \frac{dx}{\sin^3 2x}; \int \frac{dx}{x^2+3x+5};$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}} dx; \int \cos^4 3x dx; \int \ln^2(3x) dx; \int \sqrt{4x^2-1} dx.$$

$$30. \int \frac{dx}{3+4x}; \int \sqrt{2x} e^{\sqrt{3x}} dx; \int \arcsin 2x dx; \int \frac{dx}{\sin^4 2x}; \int \operatorname{tg}^2 3x dx; \int \frac{4x}{7+9x^2} dx; \int \frac{dx}{x(4x^2+1)};$$

$$\int \frac{dx}{x(5x+1)^2}; \int \frac{dx}{x \ln 2x}; \int \ln(x+2) dx.$$

$$31. \int \operatorname{ch}^2 5x dx; \int e^{3x} \ln(1+e^{3x}) dx; \int \frac{dx}{\sqrt{9-7x}}; \int \frac{dx}{x^2+3x+11}; \int \operatorname{tg}^3 2x dx; \int \frac{dx}{(x+5)^2(x-4)};$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}(\ln 2x)}{x} dx; \int x^2 e^{-6x} dx; \int \sin 7x \cos 3x dx; \int x \ln(1+2x) dx.$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{3x}(2x+5)}; \int \frac{2x}{5+7x} dx; \int x^8 e^{-5x^9} dx; \int \frac{5dx}{\sqrt{11+9x}}; \int x \arctg 2x dx; \int \operatorname{ch}^2(2x+1) dx;$$

$$\int \cos^3(3x-2) dx; \int \sin^4(3x-1) dx; \int x \ln(1+3x) dx; \int \frac{dx}{(x+4)(x-7)}.$$

$$33. \int \sqrt{9-x^2} dx; \quad \int e^{-7x} \sin 2x dx; \quad \int (x+3) \cos 5x dx; \quad \int 3 \ln \sqrt[3]{x+1} dx; \quad \int \frac{dx}{x(x-2)(x-3)};$$

$$\int (x+3)^2 e^{-5x} dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^3(5x+1)}; \quad \int x \cos^2 2x dx; \quad \int \frac{dx}{3+5\sqrt{x+3}}; \quad \int \frac{x dx}{x^2+x+7}.$$

$$34. \int \frac{dx}{2x^3+x^2}; \quad \int \operatorname{arctg} 12x dx; \quad \int x \sin^2(3x-2) dx; \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x}; \quad \int \cos 4x \sin 9x dx; \quad \int \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}} dx;$$

$$\int \ln(7+9x) dx; \quad \int \sqrt{x^2+49} dx; \quad \int \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} dx; \quad \int \sqrt{3x+7} dx.$$

$$35. \int \operatorname{ctg}^2(2x+3) dx; \quad \int 5 \cos^2(3x-2) dx; \quad \int \ln(x+2)^2 dx; \quad \int \frac{\sqrt{\ln(x+1)}}{x+1} dx; \quad \int x e^{-(x+2)} dx;$$

$$\int \frac{\sin \frac{1}{x+1}}{(x+1)^2} dx; \quad \int \frac{dx}{\cos(3x+2)}; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}; \quad \int \operatorname{arctg} 2x dx; \quad \int \frac{(2x+1) dx}{(x-2)(x^2+4x+5)}.$$

$$36. \int \frac{dx}{x^4+x}; \quad \int \frac{\sin \sqrt{4+3x}}{\sqrt{4+3x}} dx; \quad \int x e^{-2x-3} dx; \quad \int \sqrt{9-x^2} dx; \quad \int \cos 2x \sin 5x dx; \quad \int \frac{dx}{5+6 \sin 2x};$$

$$\int \cos^2 2x \sin^4 2x dx; \quad \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx; \quad \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad \int \cos x e^{\sin x} dx.$$

$$37. \int \frac{dx}{\sqrt[6]{3-2x}}; \quad \int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int x \sin(2x+1) dx; \quad \int \frac{dx}{x^2+3x+5}; \quad \int \frac{dx}{x(2x+3)}; \quad \int x^2 \ln 11x dx;$$

$$\int \sin 3x \cos x dx; \quad \int \operatorname{ctg}^2 6x dx; \quad \int \sqrt{4+2x^2} dx; \quad \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$38. \int \frac{dx}{\sqrt[7]{5x+6}}; \quad \int \frac{\arcsin 9x}{\sqrt{1-81x^2}} dx; \quad \int 3 \ln \sqrt[4]{x} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2-16}; \quad \int \frac{dx}{x^2-4x+8}; \quad \int \frac{2x^2}{x-1} dx;$$

$$\int (x+1)^2 e^{-3x} dx; \quad \int \sqrt{4x^2-1} dx; \quad \int e^{-2x} \cos 3x dx; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 \frac{x}{3}}.$$

$$39. \int \frac{dx}{\sqrt[6]{5+3x}}; \int \frac{\sin \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} dx; \int \ln(3x+1) dx; \int \frac{dx}{9x^2-1}; \int \frac{dx}{x^2+2x+6}; \int \frac{x^2}{2x+3} dx;$$

$$\int x^3 \ln(x-3) dx; \int \frac{dx}{2+\cos x}; \int \frac{\sqrt{x}}{3-2x} dx; \int \sqrt{9x^2-1} dx.$$

$$40. \int \sqrt[6]{5-3x} dx; \int \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2} dx; \int x e^{-7x} dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+4}; \int \frac{dx}{x(4x^2+1)}; \int \frac{dx}{3+\cos 2x};$$

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x^3 dx; \int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}; \int \frac{dx}{\cos^4(3x+7)}; \int \sqrt{4x^2-3x} dx.$$

$$41. \int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx; \int \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{x^2-2x+2} dx; \int \sqrt{\frac{2x}{x-3}} dx; \int \frac{xdx}{x^2+4}; \int \cos^6 3x dx; \int \frac{dx}{(2x+1)(x-2)};$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}; \int \frac{dx}{7+\cos x}; \int 2x \cos 5x dx; \int \sin^3(x-2) dx.$$

$$42. \int \frac{xdx}{x^2+2x+3}; \int (1+3x) \cos\left(x+\frac{3x^2}{2}\right) dx; \int \cos^3(3x+1) dx; \int \frac{x^2-x+1}{x+5} dx;$$

$$\int \cos 2x e^{-\sin 2x} dx; \int \ln \sqrt[4]{2x+1} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}; \int \sin^4(2x+3) dx; \int \sin x \cos 4x dx; \int \sqrt{\frac{x-3}{x-2}} dx.$$

$$43. \int x^2 \sin(x^3+1) dx; \int \sqrt{x+1} e^{-\sqrt{x+1}} dx; \int \frac{e^{\arcsin \sqrt{x}}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x^2+2x+9}; \int \frac{3x}{2x+1} dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}; \int \ln^2(2x+1) dx; \int \frac{dx}{\cos^2(x+1) \sin^2(x+1)}; \int \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)}; \int \frac{\cos^2 \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$44. \int \sin 3x e^{\cos 3x} dx; \int (x+3)^2 \sin 3x dx; \int \sin 2x \sqrt{\cos 2x} dx; \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}; \int \ln \sqrt[3]{3+x} dx;$$

$$\int \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} dx; \int \frac{dx}{5+\cos 2x}; \int \frac{dx}{x^2+9x}; \int x e^{x^2+2} dx; \int \operatorname{arctg} 4x dx.$$

$$45. \int \sqrt[4]{7-3x} dx; \int x^3 \ln \sqrt[3]{x} dx; \int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int 3x \cos(5x-1) dx; \int \frac{dx}{4x^2-9}; \int \frac{dx}{x^2+4x+9};$$

$$\int \cos^5 x dx; \int \cos^4(3x+2) dx; \int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}}; \int \sqrt{4x^2+1} dx.$$

$$46. \int \sqrt{11+15x} dx; \quad \int \frac{\cos \sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}} dx; \quad \int \arcsin 4x dx; \quad \int \frac{dx}{x(x^2+10)}; \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+11};$$

$$\int x \arctg(x+2) dx; \int \cos^2 2x \sin^4 2x dx; \int \frac{dx}{\sin^3(x+1)}; \int \sqrt{x^2-9} dx; \int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}.$$

$$47. \int \sqrt[3]{10+9x} dx; \quad \int \frac{e^{\sqrt{3-x}}}{\sqrt{3-x}} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2+4x+10}; \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt[3]{x}} dx; \quad \int \arctg(x-5) dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+3x}; \int e^{-x} \cos 3x dx; \int \cos^3(2x+1) \sin(2x+1) dx; \int x^5 e^{-x^3} dx; \int \frac{dx}{\cos^4(2x-1)}.$$

$$48. \int \sqrt[3]{3+2x} dx; \quad \int \frac{\cos \sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x-1}} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2+x+9}; \quad \int \frac{dx}{x(3x+2)}; \quad \int x 2^{3x} dx; \quad \int \cos 7x \sin 2x dx;$$

$$\int \cos^4 2x dx; \int \frac{dx}{\sin^6 3x}; \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}; \int \sqrt{1-9x^2} dx.$$

$$49. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+7}}; \quad \int \frac{\arctg^3(2x+1)}{4x^2+4x+2} dx; \quad \int \frac{\sin \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} dx; \quad \int \frac{dx}{x(x+2)}; \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+2}; \quad \int x^2 \ln x dx;$$

$$\int \sin 6x \cos x dx; \int \sqrt{16+x^2} dx; \int \frac{dx}{\cos^4(2x+1)}; \int \frac{dx}{2\sqrt{x}-x}.$$

$$50. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x+5}}; \quad \int \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} dx; \quad \int x^2 \sin 7x dx; \quad \int \frac{dx}{x(2x+1)^2}; \quad \int \lg^2 3x dx; \quad \int \cos 7x \sin x dx;$$

$$\int \sqrt{x^2+x+1} dx; \int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x}} dx; \int \frac{dx}{\sin^6 2x}; \int \operatorname{ctg}^2 3x dx.$$

$$51. \int \sqrt{19x+23} dx; \int \frac{\cos \sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}} dx; \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x^3} dx; \int \frac{dx}{1+3\sqrt{x}}; \int \frac{dx}{x^2-x+4}; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^6(2x+1)}; \int x^2 e^{x^3} dx; \int \cos 4x \sin 2x dx; \int \cos^2 2x \sin^4 2x dx.$$

$$52. \int \frac{dx}{\sqrt{8-7x}}; \quad \int \sqrt{2x} e^{3x\sqrt{x}} dx; \quad \int \sin^3 7x dx; \quad \int \cos^4 5x dx; \quad \int 2x \cos 3x dx; \quad \int \frac{dx}{x^2(x^2-8)};$$

$$\int \cos 3x \sin 7x dx; \int \frac{dx}{x^2+5x+6}; \int \frac{dx}{x^2+5x}; \int \sqrt{2-x^2} dx.$$

$$53. \int \sqrt{2+8x} dx; \int \frac{dx}{\sin^6 7x}; \int 3x^3 \cos 5x^2 dx; \int \sin^2 3x dx; \int \frac{dx}{5+\sin x}; \int \sqrt{9x^2+5} dx;$$

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{2+3\sqrt{x}}; \int \frac{dx}{x^2+x-2}; \int \frac{dx}{x(x+3)(x^2+5)}; \int x^2 e^{-7x} dx.$$

$$54. \int \frac{\arctg^2 3x}{1+9x^2} dx; \int \frac{dx}{x(x-5)^2}; \int \sqrt{\frac{2x+1}{1+3x}} dx; \int \frac{dx}{\sin^3 5x}; \int (3x-1) \cos 3x dx; \int \sin^4 (3x+1) dx;$$

$$\int \ln^2 (7x) dx; \int \sqrt{16x^2-9} dx; \int \frac{dx}{x^2+5x+10}; \int \frac{e^{\sqrt{4+x}}}{\sqrt{4+x}} dx.$$

$$55. \int \lg^2 5x dx; \int \frac{dx}{7+6x}; \int \sqrt{2x} e^{\sqrt{2x}} dx; \int \frac{dx}{x(2x+3)^2}; \int \frac{dx}{\sin^4 3x}; \int \arcsin 4x dx; \int \frac{5x}{5+4x^2} dx;$$

$$\int \frac{dx}{x(9x^2+1)}; \int \frac{dx}{x \ln 5x}; \int \ln(2x-3) dx.$$

$$56. \int ch^2 3x dx; \int e^{5x} \ln(1+e^{5x}) dx; \int x \ln(5x+1) dx; \int \lg^3 4x dx; \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}; \int x^2 e^{-7x} dx;$$

$$\int \frac{\lg(\ln 3x)}{x} dx; \int \sin 5x \cos 2x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{11-7x}}; \int \frac{dx}{x^2+2x+9}.$$

$$57. \int \frac{dx}{\sqrt{2x}(3x-1)}; \int x \arctg 3x dx; \int x^6 e^{-5x^7} dx; \int ch^2 7x dx; \int \frac{3x}{7-2x} dx; \int \sin^3 (5x-1) dx;$$

$$\int \cos^4 (5x-2) dx; \int x \ln(3+2x) dx; \int \frac{dx}{(x-2)(x+9)}; \int \frac{dx}{\sqrt{9+11x}}.$$

$$58. \int \sqrt{7-x^2} dx; \int e^{-5x} \cos 3x dx; \int (x-2) \cos 7x dx; \int \ln \sqrt{2x-3} dx; \int \frac{dx}{x(x-7)(x+5)};$$

$$\int (x+1) \cos^2 3x dx; \int \frac{dx}{\cos^3 (3x-2)}; \int (x+1)^2 e^{-x} dx; \int \frac{dx}{3+\sqrt{x-2}}; \int \frac{x dx}{x^2+5x+11}.$$

$$59. \int \frac{dx}{x^3+5x^2}; \int \arctg 7x dx; \int \frac{3x+4}{x-2} dx; \int \sqrt{x^2+9} dx; \int \frac{\lg \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx; \int \sin 3x \cos 5x dx;$$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{2x+1}}}{(2x+1)^2} dx; \int \ln(5+11x) dx; \int x \cos^2 (5x+1) dx; \int \sqrt{2-7x} dx.$$

$$60. \int \frac{dx}{x^3 + 3x}; \int \frac{\cos \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx; \int x e^{-3x+4} dx; \int \sqrt{49-x^2} dx; \int \sin 3x \cos 2x dx; \int \frac{dx}{2+3\cos x};$$

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx; \int \frac{e^{\arcsin \sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} \sqrt{x} dx; \int \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx; \int \sin x e^{\cos x} dx.$$

$$61. \int t g^2(5x-3) dx; \int 3 \sin^2(5x+3) dx; \int \frac{dx}{x(5x+1)(2x-2)}; \int \ln(x+5)^2 dx; \int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx;$$

$$\int (2x-1) e^{-3x} dx; \int \frac{\sin \frac{1}{3x+1}}{(3x+1)^2} dx; \int \frac{dx}{\sin(x+2)}; \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}; \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$62. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{7-11x}}; \int \frac{e^{\sqrt{6x}}}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x^2-x+6}; \int \frac{dx}{x(3x+1)}; \int x \cos(3x-2) dx; \int x^2 \ln 3x dx;$$

$$\int \sin 7x \cos x dx; \int \operatorname{ctg}^2 3x dx; \int \sqrt{4x^2+1} dx; \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$63. \int \frac{dx}{\sqrt[8]{5x+1}}; \int \frac{\arcsin 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx; \int \frac{dx}{x^2-x+10}; \int \frac{dx}{x^2-81}; \int 2 \ln \sqrt[6]{x} dx; \int \frac{3x^2}{2x-1} dx;$$

$$\int x^2 e^{-2x+3} dx; \int e^{-4x} \cos 3x dx; \int \frac{dx}{\cos^4(2x+1)}; \int \sqrt{x^2-81} dx.$$

$$64. \int \frac{dx}{\sqrt[6]{7x+11}}; \int \frac{\cos \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+7}; \int \frac{dx}{25x^2-1}; \int \ln(5x+1) dx; \int \frac{x^3}{3x-1} dx;$$

$$\int x^3 \ln(1-3x) dx; \int \frac{dx}{3+2\cos x}; \int \frac{\sqrt{x}}{4+7x} dx; \int \sqrt{4x^2+1} dx.$$

$$65. \int \sqrt{5+10x} dx; \int \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{1+9x^2} dx; \int (x+2) e^{-5x} dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+4}; \int \frac{dx}{x(25x^2+1)}; \int \frac{dx}{3+\sin x};$$

$$\int x^3 \operatorname{arctg} x^4 dx; \int \frac{dx}{5\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}}; \int \frac{dx}{\cos^4(3x+1)}; \int \sqrt{x^2+6x+8} dx.$$

$$66. \int \frac{e^{\sqrt{1+3x}}}{\sqrt{1+3x}} dx; \int \frac{\operatorname{arctg}(2-x)}{x^2-4x+5}; \int \frac{5x dx}{x^2+9}; \int \sqrt{\frac{x}{x+3}} dx; \int \frac{dx}{(3x-1)(x+5)}; \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x+8}};$$

$$\int \frac{dx}{5-\sin x}; \int \sin^6 3x dx; \int (x-2) \cos 7x dx; \int \cos^3(3x+2) dx.$$

$$67. \int \frac{2x dx}{x^2 - x + 2}; \quad \int (2x + 1) \sin(x^2 + x) dx; \quad \int \cos 3x e^{-\sin 3x} dx; \quad \int \cos^3 2x dx; \quad \int \frac{x^2 - 3x}{2x + 1} dx;$$

$$\int \ln \sqrt[6]{3 - 2x} dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 5x}}; \quad \int \cos^4(5x + 2) dx; \quad \int \sin 2x \cos 3x dx; \quad \int \sqrt{\frac{2x + 3}{x - 2}} dx.$$

$$68. \int \cos 5x e^{-\sin 5x} dx; \quad \int (x + 2)^2 \cos 2x dx; \quad \int \frac{dx}{(x - 3)(x + 1)}; \quad \int \cos 3x \sqrt{\sin 3x} dx; \quad \int \ln \sqrt[4]{2x + 1} dx;$$

$$\int \arctg 6x dx; \quad \int \sqrt{\frac{x}{2x + 1}} dx; \quad \int \frac{dx}{4 + 2 \sin x}; \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2x}; \quad \int x^2 e^{x^3 + 1} dx.$$

$$69. \int x \cos(x^2 + 2) dx; \quad \int \sqrt{x - 2} e^{\sqrt{x - 2}} dx; \quad \int \frac{e^{\arccos \sqrt{x}}}{\sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{x}} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 10}; \quad \int \frac{5x}{2x + 1} dx;$$

$$\int x^3 e^{x^4 + 1} dx; \quad \int \ln^2(2x - 3) dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x}}; \quad \int \frac{dx}{(x + 2) \ln(x + 2)}; \quad \int \frac{\sin^2 \sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 - x}} dx.$$

$$70. \int (5 + 2x)^{-\frac{1}{2}} dx; \quad \int \frac{(\arcsin x)^4}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \quad \int 2x \sin(3x + 2) dx; \quad \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}; \quad \int \frac{dx}{x^2 - 5}; \quad \int x^2 \ln \sqrt[4]{x} dx;$$

$$\int \sqrt{25x^2 + 1} dx; \quad \int \cos^5(2x - 1) dx; \quad \int \sin^4(2x + 1) dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + 5}.$$

$$71. \int \sqrt{12 - 7x} dx; \quad \int \frac{\cos \sqrt{3x + 1}}{\sqrt{3x + 1}} dx; \quad \int \frac{dx}{x(x^2 + 7)}; \quad \int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x}}; \quad \int \arcsin 7x dx; \quad \int x \arctg(x - 3) dx;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x - 3)}; \quad \int \cos^2 2x \sin^4 2x dx; \quad \int \sqrt{4x^2 - 1} dx; \quad \int \ln^2(x + 1) dx.$$

$$72. \int \sqrt[3]{11 - 12x} dx; \quad \int \frac{e^{-\sqrt{2 + x}}}{\sqrt{2 + x}} dx; \quad \int \arctg(3x - 2) dx; \quad \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}; \quad \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 5x};$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4(2x + 1)}; \quad \int \frac{\sqrt[4]{x} dx}{1 + 3\sqrt{x}}; \quad \int e^{-2x} \sin 3x dx; \quad \int \cos^3(3x + 1) \sin^3(3x + 1) dx; \quad \int x^5 \sin x^3 dx.$$

$$73. \int \sqrt[6]{7x + 2} dx; \quad \int \frac{\sin \sqrt{3x + 2}}{\sqrt{3x + 2}} dx; \quad \int \frac{dx}{x^2 - x + 4}; \quad \int \frac{dx}{x(5x + 1)}; \quad \int 2x \cdot 4^{3x} dx; \quad \int \frac{dx}{\cos^6 3x};$$

$$\int \frac{dx}{3 + 2\sqrt[4]{x}}; \quad \int \sin^4 3x dx; \quad \int \cos 5x \sin 3x dx; \quad \int \sqrt{49 - x^2} dx.$$

$$74. \int \frac{dx}{\sqrt[8]{3x+2}}; \int \frac{\arctg^2(1-2x)}{4x^2-4x+2} dx; \int \frac{\cos \sqrt{3x}}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x^2+x+4}; \int \frac{dx}{x(3x+1)}; \int \frac{dx}{\sin^4(3x+1)};$$

$$\int \frac{dx}{x-2\sqrt{x}}; \int (x+1)^2 \ln x dx; \int \sin 3x \cos 2x dx; \int \sqrt{9x^2+1} dx.$$

$$75. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}; \int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}} dx; \int (x-2) \cos 3x dx; \int \operatorname{tg}^2 9x dx; \int \frac{dx}{x(x+4)^2}; \int \cos 5x \sin 6x dx;$$

$$\int \sqrt{x^2-x+3} dx; \int \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt[3]{x}} dx; \int \frac{dx}{\cos^6 3x}; \int \operatorname{ctg}^2 5x dx.$$

$$76. \int \sqrt{7x+1} dx; \int \frac{\sin \sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}} dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+5}; \int \frac{dx}{3+2\sqrt[3]{x}}; \int \sqrt{x} \cos \sqrt{2x^3} dx;$$

$$\int \cos 6x \sin 3x dx; \int \cos^4 x \sin^2 x dx; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+4}}; \int \frac{dx}{\sin^6(3x+1)}; \int x e^{-x^2} dx.$$

$$77. \int \frac{dx}{\sqrt{11x+3}}; \int \sqrt{5x} e^{7x\sqrt{x}} dx; \int \cos 4x \sin 5x dx; \int \sin^3 8x dx; \int 3x \cos 5x dx; \int \cos^4 7x dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+3x}; \int \frac{dx}{x^2(2x^2+12)}; \int \frac{dx}{x^2+3x+7}; \int \sqrt{4+x^2} dx.$$

$$78. \int \sqrt{4+5x} dx; \int \frac{dx}{\sin^6 5x}; \int \sqrt{16x^2+6} dx; \int \frac{\sqrt{x} dx}{5+2\sqrt{x}}; \int 5x^3 \sin 3x^2 dx; \int \cos^2 7x dx;$$

$$\int 2x^2 e^{-5x} dx; \int \frac{dx}{3+2\sin x}; \int \frac{dx}{x(x+3)(x^2+7)}; \int \frac{dx}{x^2-9x+20}.$$

$$79. \int \frac{\arctg^2 5x}{1+25x^2} dx; \int \frac{dx}{x(x+7)^2}; \int \sqrt{\frac{1-3x}{2+x}} dx; \int \frac{dx}{\cos^3 3x}; \int (3x-1) \cos 5x dx; \int \cos^4(2x+1) dx;$$

$$\int \ln^2(8x) dx; \int \sqrt{9x^2-1} dx; \int \frac{dx}{x^2+5x+6}; \int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$80. \int \operatorname{tg}^2 7x dx; \int \frac{dx}{5-3x}; \int \sqrt{5x} e^{\sqrt{3x}} dx; \int \frac{dx}{x(3x+2)^2}; \int \arcsin 3x dx; \int \frac{dx}{\sin^4 5x}; \int \ln(x+5) dx;$$

$$\int \frac{2x}{3+2x^2} dx; \int \frac{dx}{x(16x^2+1)}; \int \frac{dx}{x \ln 3x}.$$

$$81. \int sh^2 3x dx; \int e^{7x} \ln(1 + e^{7x}) dx; \int tg^3 3x dx; \int \frac{dx}{(x+3)(x-2)}; \int \frac{tg(\ln 5x)}{x} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{9x+5}};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 10}; \int x^2 e^{-5x} dx; \int \sin 6x \cos x dx; \int x \ln(7x+9) dx.$$

$$82. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(2x-4)}; \int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}}; \int \frac{4x}{2+11x} dx; \int \frac{dx}{(x-3)(x+9)}; \int x \arctg 5x dx; \int x^5 e^{-2x^6} dx;$$

$$\int \sin^3(2x-4) dx; \int ch^2 3x dx; \int \cos^4(2x-3) dx; \int x \ln(7x+5) dx.$$

$$83. \int \sqrt{11-x^2} dx; \int e^{-3x} \cos 2x dx; \int (2x-1) \cos 5x dx; \int 2 \ln \sqrt{2x+1} dx; \int (x-2) \sin^2 3x dx;$$

$$\int (x-2)^2 e^{-2x} dx; \int \frac{dx}{x(x+3)(x+2)}; \int \frac{dx}{\cos^3(2x+3)}; \int \frac{dx}{5+\sqrt{2x-1}}; \int \frac{dx}{x^2+4x+9}.$$

$$84. \int \frac{dx}{x^4+x^2}; \int \frac{3x+2}{2x-3} dx; \int \frac{tg \sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}} dx; \int \frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} dx; \int \arctg 9x dx; \int x \cos^2(2x-3) dx;$$

$$\int \cos 2x \cos 3x dx; \int \ln(2+7x) dx; \int \sqrt{x^2+10} dx; \int \sqrt{11x+3} dx.$$

$$85. \int tg^2(3x+2) dx; \int 2 \sin^2(7x-2) dx; \int \ln(2x-3)^2 dx; \int \frac{dx}{x(3x+2)(x-2)}; \int \frac{\sqrt{\ln(x+2)}}{x+2} dx;$$

$$\int \frac{\cos \frac{1}{2x+1}}{2x+1} dx; \int \frac{dx}{\cos(2x-1)}; \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}; \int (x+2)e^{-3x} dx; \int \arctg(5x+1) dx.$$

$$86. \int \frac{dx}{x^4+3x^2}; \int \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx; \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x}+1}; \int e^{e^x+1} dx; \int (x-2)e^{-3x} dx; \int \sqrt{16-x^2} dx;$$

$$\int \cos 3x \cos 5x dx; \int \sin^2 2x \cos^4 2x dx; \int \frac{dx}{4+3 \cos 2x}; \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$87. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{2+5x}}; \int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{x}} dx; \int \frac{dx}{x(2x+3)}; \int \frac{dx}{x^2-2x+7}; \int x \cos(5x+3) dx; \int x^2 \ln 5x dx;$$

$$\int \sin 5x \cos 7x dx; \int tg^2 5x dx; \int \sqrt{2x^2+7} dx; \int \frac{\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$88. \int \frac{dx}{\sqrt[9]{2x-9}}; \int \frac{\arcsin 11x}{\sqrt{1-121x^2}} dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+4}; \int \frac{dx}{4x^2-1}; \int 5 \ln \sqrt[7]{x+2} dx; \int x^2 e^{-5x+1} dx;$$

$$\int e^{-3x} \cos 2x dx; \int \frac{x^3}{2x-3} dx; \int \frac{dx}{\sin^4(3x-2)}; \int \sqrt{9x^2-1} dx.$$

$$89. \int \frac{dx}{\sqrt[9]{3-13x}}; \int \frac{\cos \sqrt{2+3x}}{\sqrt{2+3x}} dx; \int \frac{dx}{16x^2-1}; \int \frac{x^3 dx}{2x+1}; \int \ln(2x-1) dx; \int x^3 \ln(2x+1) dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-x+9}; \int \frac{dx}{3-2 \sin x}; \int \frac{\sqrt{x}}{5-2x} dx; \int \sqrt{25x^2+1} dx.$$

$$90. \int \sqrt[4]{7x+5} dx; \int \frac{\arctg^3 5x}{25x^2+1} dx; \int (2x-1)e^{-3x} dx; \int \frac{dx}{x^2-6x+9}; \int \frac{dx}{x(9x^2+1)}; \int \frac{dx}{2-\sin 4x};$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}; \int x^4 \arctg x^5 dx; \int \frac{dx}{\sin^4(2x+1)}; \int \sqrt{x^2-2x+3} dx.$$

$$91. \int \frac{x}{x^2-2x+3} dx; \int (x-3) \sin\left(\frac{x^2}{2}-3x\right) dx; \int \frac{x^2+1}{2x-1} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{4+7x}}; \int \sin^3 5x dx;$$

$$\int \sin 5x e^{-\cos 5x} dx; \int \frac{dx}{3-2 \cos 2x}; \int \ln \sqrt[3]{2+3x} dx; \int \sin 3x \cdot \cos 2x dx; \int \sqrt{\frac{2x+1}{x-2}} dx.$$

$$92. \int \cos 7x e^{-\sin 7x} dx; \int \frac{dx}{(2x+1)(x-2)}; \int \sqrt{\frac{3+x}{2x-1}} dx; \int \frac{dx}{x^2-3x}; \int (2x-1)^2 \sin 2x dx;$$

$$\int \ln \sqrt[5]{x+5} dx; \int x^3 e^{x^4+2} dx; \int \frac{dx}{3-\cos 2x}; \int \cos 5x \sqrt{\sin 5x} dx; \int \arctg 5x dx.$$

$$93. \int x^2 (\cos^3 x - 1) dx; \int \sqrt{x+3} e^{-\sqrt{x+3}} dx; \int \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx; \int \frac{dx}{x^2-x+9}; \int \frac{9x dx}{5x+2}; \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}; \int \frac{dx}{(x-3) \ln(x-3)}; \int \ln^2(3x-2) dx; \int \frac{\cos^2 \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} dx.$$

$$94. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-4x}}; \int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+8}; \int \frac{dx}{3x^2-1}; \int x \sin(7x-3) dx; \int x^4 \ln \sqrt[3]{x} dx;$$

$$\int \sin^5(x+3) dx; \int \sin^4(2x-2) dx; \int \sqrt{9x^2-11} dx; \int \frac{dx}{3\sqrt{x-4}}.$$

$$95. \int \sqrt{7-11x} dx; \int \frac{\sin \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} dx; \int \frac{dx}{x(x^2+9)}; \int \frac{dx}{x-3\sqrt{x}}; \int \arcsin 3x dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+11};$$

$$\int x \arctg(x+5) dx; \int \cos^2 2x \sin^4 2x dx; \int \frac{dx}{\cos^3(x+1)}; \int \sqrt{9x^2-1} dx.$$

$$96. \int \sqrt[4]{9+15x} dx; \int \frac{e^{\sqrt{x+5}}}{\sqrt{x+5}} dx; \int \frac{dx}{x^2+7x+14}; \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}; \int \arctg(2x+1) dx; \int \frac{dx}{x^3+x^2+x};$$

$$\int e^{-5x} \sin 4x dx; \int \cos^3(3x-2) \sin^3(3x-2) dx; \int \frac{dx}{\sin^4(3x+2)}; \int x^5 \cos x^3 dx.$$

$$97. \int \sqrt[5]{2+3x} dx; \int \frac{\cos \sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}} dx; \int \frac{dx}{x(4x-2)}; \int \frac{dx}{\cos^6 2x}; \int x 2^{5x} dx; \int \frac{dx}{x^2-x+12};$$

$$\int \cos 11x \sin x dx; \int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}}; \int \cos^4 5x dx; \int \sqrt{25-x^2} dx.$$

$$98. \int \frac{dx}{\sqrt[9]{5-3x}}; \int \frac{\arctg(3x+1)}{9x^2+6x+2} dx; \int \frac{\cos \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+1}} dx; \int \frac{dx}{x^2+x+2}; \int (x-1)^2 \ln x dx;$$

$$\int \sin 3x \cos 4x dx; \int \frac{dx}{3x(x+1)}; \int \sqrt{4+x^2} dx; \int \frac{dx}{\sin^4(2x-1)}; \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x}}.$$

$$99. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x+1}}; \int \frac{e^{\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}} dx; \int \frac{dx}{x(x+7)^2}; \int \frac{\sqrt{x} dx}{2+\sqrt{x}}; \int (x+3) \sin 6x dx; \int \operatorname{ctg}^2 5x dx;$$

$$\int \sqrt{x^2-2x+9} dx; \int \cos 3x \cos 4x dx; \int \frac{dx}{\cos^6 5x}; \int \operatorname{tg}^2 4x dx.$$

$$100. \int \sqrt{11x+13} dx; \int \frac{\sin \sqrt{7+5x}}{\sqrt{7+5x}} dx; \int \sqrt{x} \sin \sqrt{4x^3} dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+9}; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+9}};$$

$$\int \frac{dx}{2+3\sqrt[3]{x}}; \int \frac{dx}{\sin^6(2x-1)}; \int \cos 5x \sin 3x dx; \int x^4 e^{-x^5} dx; \int \cos^4 2x \sin^2 2x dx.$$

Література

1. Луценко Ю.Л. Канівець Володимир Васильович Канівець Володимир Васильович: навч.-метод. посіб. для студ.-заочн. Контрольні завдання, Вища математика. - Вінниця: ВДАУ, 2000. - С. 499,[1].
2. Валєєв К.Г. Джалалова І.А. Яременко В.В. Сліпущко О.М. Яременко В.В. Сліпущко О.М. Яременко В.В. Сліпущко О.М. : навч. посібник у 2 ч., Вища математика. - К.: , 2001. - С. 546.
3. Луценко Ю.Л. Чубатюк В.М. : Курс лекцій. Навчальний посібник для студентів агр, Прикладна математика. - Вінниця: ВДАУ, 2001. - С. 264.
4. Бугров Я.С. Никольский С.М. : учеб. для студ. вузов, Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1980. - С. 432.
5. Данко П.Е. Попов А.Г. Кожевникова Т.Я. : учеб. пособие для студ. вузов, Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2. ч. Ч. 1. - М.: Высшая школа, 1986. - С. 304.
6. Барковський В..В. Барковська Н.В. : , Вища математика для економістів. - К.: Центр навчальної літератури, 2005. - С. 448.
7. Шкіль М.І. Колесник Т.В. Котлова В.М. : навч. посіб. для студ. вузів, Вища математика. Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. - К.: Вища школа, 1984. - С. 391.
8. Бугров Я.С. Никольский С.М. : , Высшая математика. Задачник. - М.: Наука, 1987. - С. 256.
9. Коваленко І.П. : Навчальний посібник, Вища математика. - К.: Вища школа, 2006. - С. 624.
10. Дубчак В.М. Левчук О.В. : Методичні вказівки для проведення практичних занят, Вища математика. Практикум. - Вінниця: , 2004. - С. 67.

- 11.Зайцев И.А. : учебник, Высшая математика. - М.: Высшая школа, 1991. - С. 400.
- 12.Шипачев В.С. Тихонов А.Н. : учеб. для вузов, Высшая математика. - М.: Высшая школа, 1990. - С. 479, [1].
- 13.Васильченко І.П. : підручник, Вища математика для економістів. - К.: Знання, 2007. - С. 454, [2].
- 14.Барковський В.В. Барковська Н.В. : навч. посіб. для вузів, Вища математика для економістів. - К.: ЦУЛ, 2002. - С. 2002.
- 15.Барковський В. В. Барковська Н. В. : навч. посібник, Вища математика для економістів. - К.: Центр учбової літератури, 2010. - С. 417, [1].
- 16.Клепко В. Ю. Голець В. Л. : навч. посібн., Вища математика в прикладах і задачах. - К.: ЦУЛ, 2009. - С. 592, [4].