Р.І. Сивак
І.А. Деревенько

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
СТАТИКА.
КІНЕМАТИКА.

2010

УДК: 531.

Сивак Р.І. Деревенько І.А.Теоретична механіка. Статика. Кінематика. Навчальний посібник.– Вінниця: ВЦ ВДАУ, 2010. – 91 с.

Рецензенти: Друкований М.Ф., д.т.н. професор кафедри АКМТП ВНАУ
Вірник М.М. к.т.н., доцент кафедри МРВ ОАВ ВНТУ

В навчальному посібнику викладені основні теоретичні матеріали з механіки, що дозволяє проводити аналіз механічних систем. Теоретичні положення ілюстровані прикладами. Містить по 20 варіантів для 8 розрахунково – графічних завдань.

Навчальний посібник може бути використаний для загально фахової підготовки студентів вузів і коледжів.

Рекомендовано навчально-методичною комісією Вінницького національного аграрного університету
(ПРОТОКОЛ № ВІД 24 ЧЕРВНЯ 2010 Р.)

Зав. видавничим центром ВНАУ О.М.Романов
Підписано до друку Формат
Ум. друк. арк. 5.6 Обл.-вид. арк.
Наклад 50 пр. Зам. №

Видавничий центр ВНАУ
вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008.

Зміст

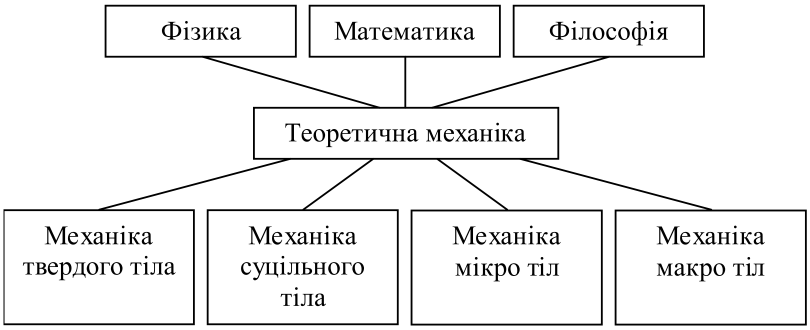
СТАТИКА

КІНЕМАТИКА

СТАТИКА

1. Основні поняття

Теоретична механіка – це наука, в якій вивчаються загальні закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл.



Механічним рухом називається переміщення тіла по відношенню до іншого тіла, яке відбувається у просторі і в часі.

Статикою називається розділ механіки, в якому вивчаються методи перетворення систем в еквівалентні системи і встановлюються умови рівноваги сил, які прикладені до твердого тіла.

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл в просторі з геометричної точки зору, поза зв'язком з силами, які визначають цей рух.

Динамікою називається розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл в просторі в залежності від діючих на них сил.

Під матеріальною точкою розуміють таке тіло, розміри якого по всім напрямкам досить малі, так що різницею у русі окремих точок цього тіла можна знехтувати. Матеріальна точка має масу і здатна взаємодіяти з іншими тілами.

Системою матеріальних точок, або механічною системою, називається таке сполучення матеріальних точок, в які положення і рух кожної точки залежать від положення і руху інших точок цієї системи.

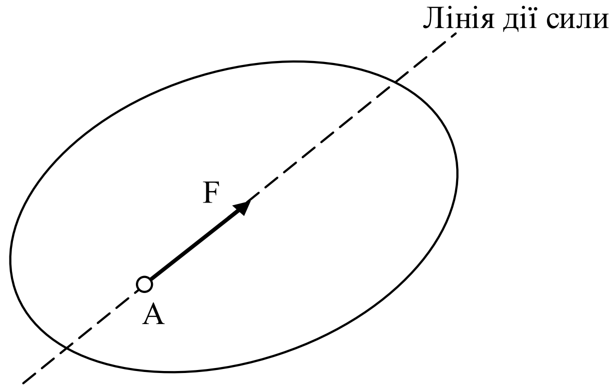
Абсолютно твердим називається таке тіло, відстані між кожними двома точками якого залишаються завжди незмінними; іншими словами, абсолютно тверде тіло завжди зберігає незмінною свою геометричну форму.

Тверде тіло може знаходитися в стані покою або певного руху. Кожне з цих станів називається к і н е м а т и ч н и м с т а н о м т і л а .

Взаємодія двох тіл здатна змінити їх кінематичний стан, називається м е х а н і ч н о ю в з а є м о д і є ю .

С и л а – це міра механічної взаємодії тіл, яка визначає інтенсивність і напрямок цієї взаємодії.

Сила визначається трьома елементами: ч и с е л ь н и м з н а ч е н н я м (м о д у л е м), н а п р я м к о м і т о ч к о ю п р и к л а д е н н я . Пряма, по які направлена сила, називається л і н і є ю д і ї с и л и . За одиницю сили в Міжнародні системі одиниць виміру СІ приймається н ь ю т о н (Н) . Сукупність кількох сил, які діють на дане тіло або систему тіл, називається с и с т е м о ю с и л .



Системи сил, під дією кожної з яких тверде тіло перебуває в однаковому кінематичному стані, називаються е к в і в а л е н т н и м и .

Сила, еквівалентна певні системі сил, називається р і в н о д і ю ч о ю .

Система сил, яка прикладена до твердого тіла, яке знаходиться в покої, не виводить його з цього стану, називається с и с т е м о ю с и л я к і в з а є м о у р і в н о в а ж е н і .

Сили, які діють на механічну систему, ділять на дві групи: зовнішні і внутрішні сили.

З о в н і ш н і м и називають сили, які діють на матеріальні точки (тіла) даної системи зі сторони матеріальних точок (тіл), які не належать цій системі.

В н у т р і ш н і м и називають сили взаємодії між матеріальними точками системи що розглядається.

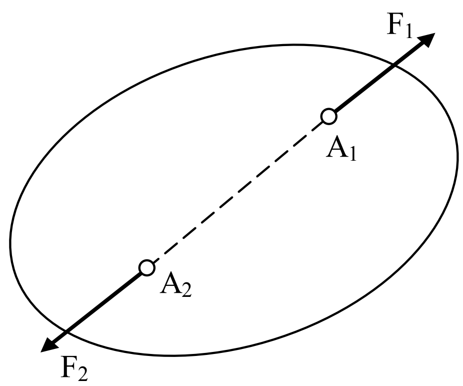
2. Аксіоми статики

1. Аксіома інерції

Під дією взаємоврівноважених сил матеріальна точка (тіло) або знаходиться в стані покою, або рухається прямолінійно і рівномірно.

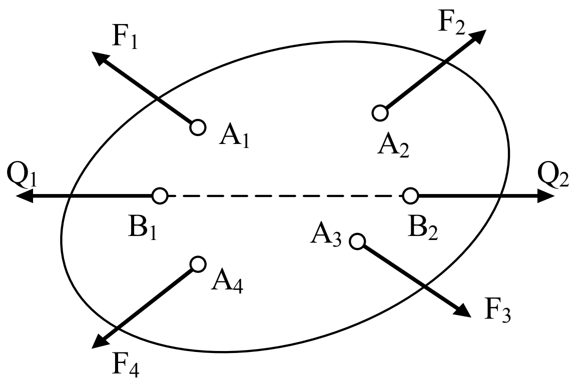
2. Аксіома рівноваги двох сил

Дві сили, які прикладені до твердого тіла, взаємо врівноважуються тільки в тому випадку, якщо їх модулі рівні і вони направлені по одні прямі в протилежні сторони.

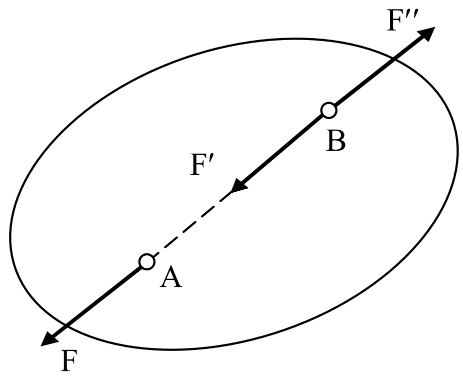


3. Аксіома приєднання і виключення врівноважених сил

Якщо до твердого тіла, яке знаходиться під дією певної системи сил, прикласти врівноважену систему або виключити таку систему сил, то утвориться система сил, еквівалентна задані системі.

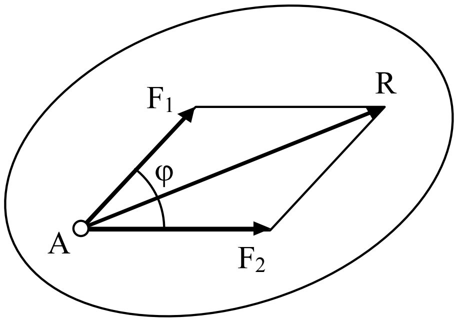


Н а с л і д о к . Не змінюючи кінематичного стану абсолютно твердого тіла, силу можна переносити вздовж лінії її дії, зберігаючи незмінним її модуль і напрямок.



4. Аксіома паралелограма сил

Рівнодіюча двох сил які перетинаються прикладена в точці їх перетину і зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах.



Геометрична рівність:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Модуль рівнодіючої сили:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}$$

5. Аксіома рівності дії і протидії

Всякі дії відповідає рівна і протилежно направлена протидія.

6. Аксіома збереження рівноваги сил, прикладених до деформуємого тіла, коли воно стає твердим

Якщо деформуєме тіло, яке знаходиться під дією даних сил в стані рівноваги, стане абсолютно твердим, то його рівновага не порушиться.

3. Невільне тверде тіло. В'язі. Реакції в'язів

Тверде тіло називається *вільним*, якщо воно може пересуватися в просторі в будь-якому напрямку.

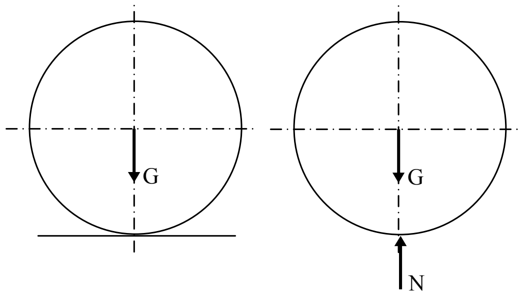
Тіло, яке обмежує свободу руху даного твердого тіла, є по відношенню до нього *в'язю*.

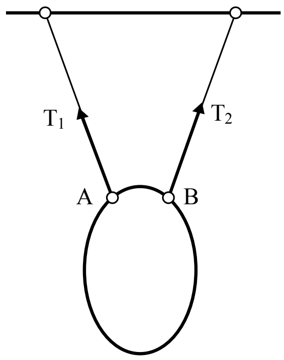
Тверде тіло, свобода руху якого обмежена в'язями, називається *невільним*.

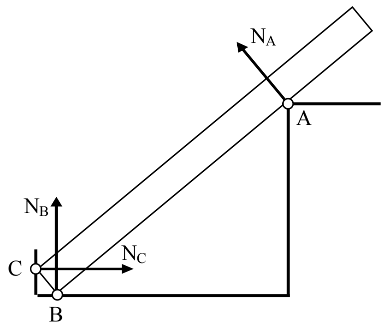
Задані сили виражають дію на тверде тіло других тіл, які викликають або здатні викликати зміну його кінематичного стану.

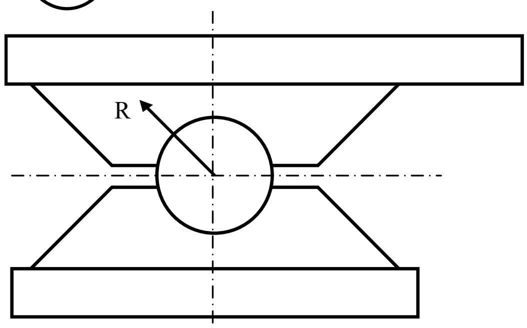
Реакцією в’язі називається сила або система сил, яка виражає механічну дію в’язі на тіло.

Згідно принципу звільнення твердих тіл від в’язів невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке крім заданих сил, діють реакції в’язів.

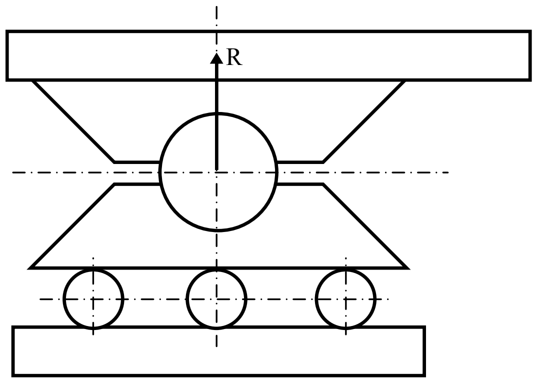








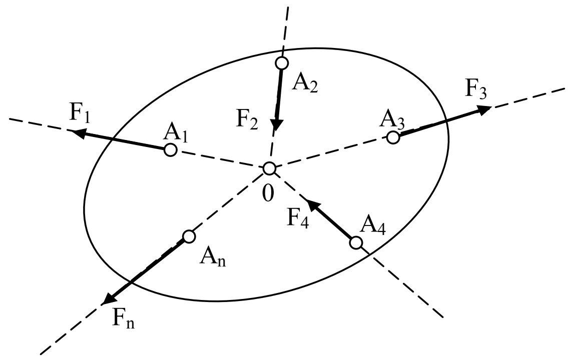
Шарнірно-нерухома опора

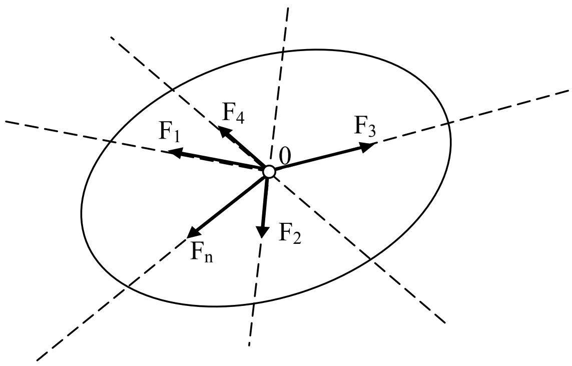


Шарнірно-рухома опора

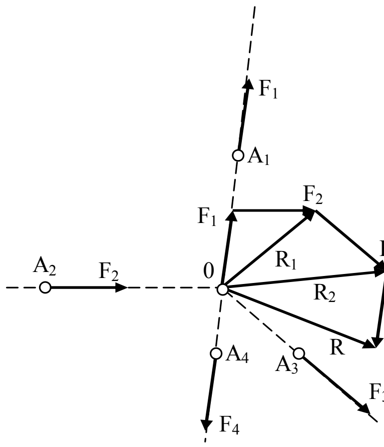
4. Збіжна система сил на площині і в просторі

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **збіжною системою сил**.



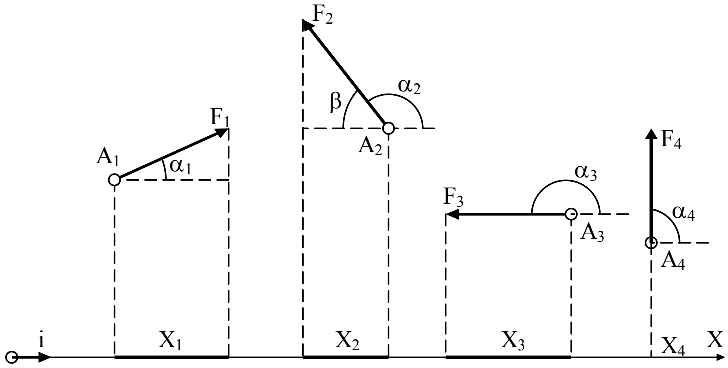


4.1. Графічний спосіб додавання збіжних сил



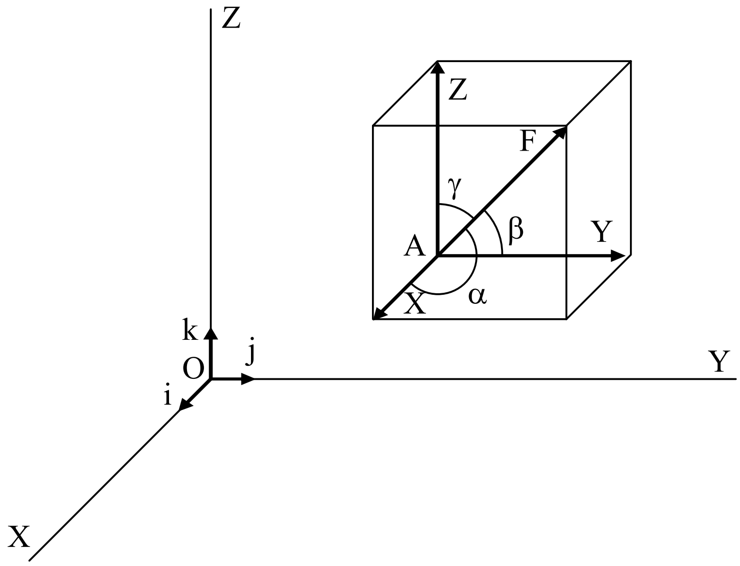
$$R_1=F_1+F_2$$
$$R_2=R_1+F_3=F_1+F_2+F_3$$
$$R=R_2+F_4=F_1+F_2+F_3+F_4$$
$$R=F_1+F_2+\ldots+F_n$$
$$R=\sum_{i=1}^{n}F_i$$

4.2. Аналітичний спосіб додавання збіжних сил



$$X_1=F_1\cos\alpha_1$$
$$X_2=F_2\cos\alpha_2=-F_2\cos\beta,$$
$$X_3=F_3\cos\alpha_3=F_3\cos180=-F_3$$
$$X_4=F_4\cos\alpha_4=F_4\cos90=0$$

$X=F\cos(F,i)$ – проекція сили на ось



$$F=X+Y+Z \text{ або } F=Xi+Yj+Zk$$

i, j, k – орти прямокутних систем координат
X, Y, Z – проекції сили F на відповідні осі координат

$$X=F\cos\alpha=F\cos(F,i);\ Y=F\cos\beta=F\cos(F,j);\ Z=F\cos\gamma=F\cos(F,k)$$

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$ - модуль сили

$R=F_1+F_2+\ldots+F_n$ – рівнодіюча системи збіжних сил

$$R_x=X_1+X_2+\ldots+X_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$R_y=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$$ - проекції рівнодіючої

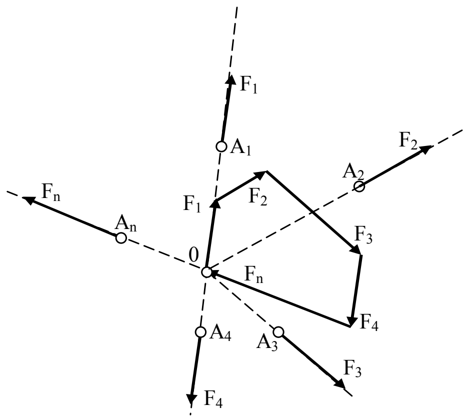
$$R_z=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n=\sum_{i=1}^{n}Z_i$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}$$ - модуль рівнодіючої сили

4.3. Рівновага збіжної системи сил

Якщо рівнодіюча збіжної системи сил дорівнює нулю, то система знаходиться в рівновазі.

$$R=0$$
$$F_1+F_2+\ldots+F_n=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}F_i=0$$



Графічна умова рівноваги системи – для рівноваги збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб їх геометрична сума дорівнювала нулю, тобто щоб силовий багатокутник, побудований на додаваємих силах був замкнутий.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

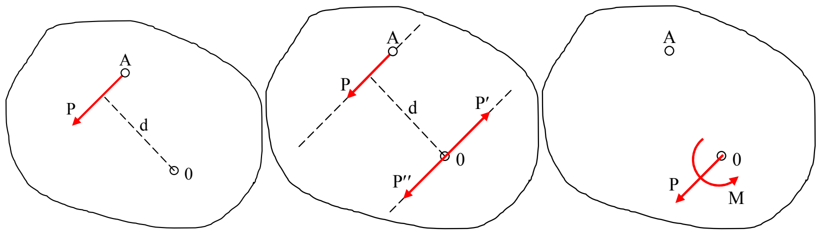
$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$ - рівняння рівноваги просторової збіжної системи сил

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

5. Система сил довільно розташованих на площині

5.1. Приведення сили до заданого центра

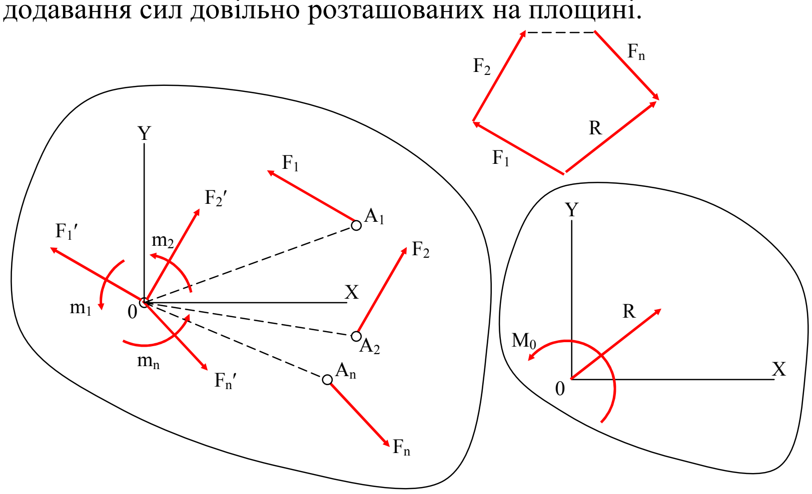
Для додавання сил, довільно розташованих на площині належить застосовувати метод Пуансо, який полягає в приведенні сил до заданого центра.



Метод Пуансо полягає в заміні сили P еквівалентною її сукупністю – геометрично рівною їй силою P″, яка прикладена в центрі приведення, і парою сил з моментом, який дорівнює моменту сили відносно центра приведення.

5.2. Приведення плоскої системи сил до даного центру. Головний вектор і головний момент

Застосуємо метод приведення сили до заданого центру до додавання сил довільно розташованих на площині.



0 – центр приведення

$$R=\Sigma F_k$$

$$M_0=\Sigma m_0(F_k)$$

Величина R, яка дорівнює геометричні сумі всіх сил системи, називається г о л о в н и м в е к т о р о м с и с т е м и. Величину M_0, яка дорівнює сумі моментів всіх сил системи відносно центра 0, називають головним моментом системи відносно центра 0.

5.3. Рівняння рівноваги системи сил, довільно розташованих на площині

Для сил довільно розташованих на площині є дві умови рівноваги:

$$\left.\begin{array}{r} M = \sum M_{0i} = 0 \\ R = \sum F_i = 0 \end{array}\right\}$$

З другої умови витікає, що $X = \sum X_i = 0$ і $Y = \sum Y_i = 0$. Таким чином, дві умови рівноваги сил, довільно розташованих на площині, можна виразити у вигляді системи трьох рівнянь:

I. $\left.\begin{array}{r} \sum M_{0i} = 0 \\ \sum X_i = 0 \\ \sum Y_i = 0 \end{array}\right\}$ - основні рівняння рівноваги плоскої системи сил

Центр моментів і напрямок координатних осей для цієї системи рівнянь можна вибирати довільно.

II. $\left.\begin{array}{r} \sum M_{Ai} = 0 \\ \sum M_{Bi} = 0 \\ \sum U_i = 0 \end{array}\right\}$

Ось U не повинна бути перпендикулярна прямі, що проходить через точки A і B.

III. $\left.\begin{array}{r} \sum M_{Ai} = 0 \\ \sum M_{Bi} = 0 \\ \sum M_{Ci} = 0 \end{array}\right\}$

Точки A, B і C не повинні лежати на одні прямі.

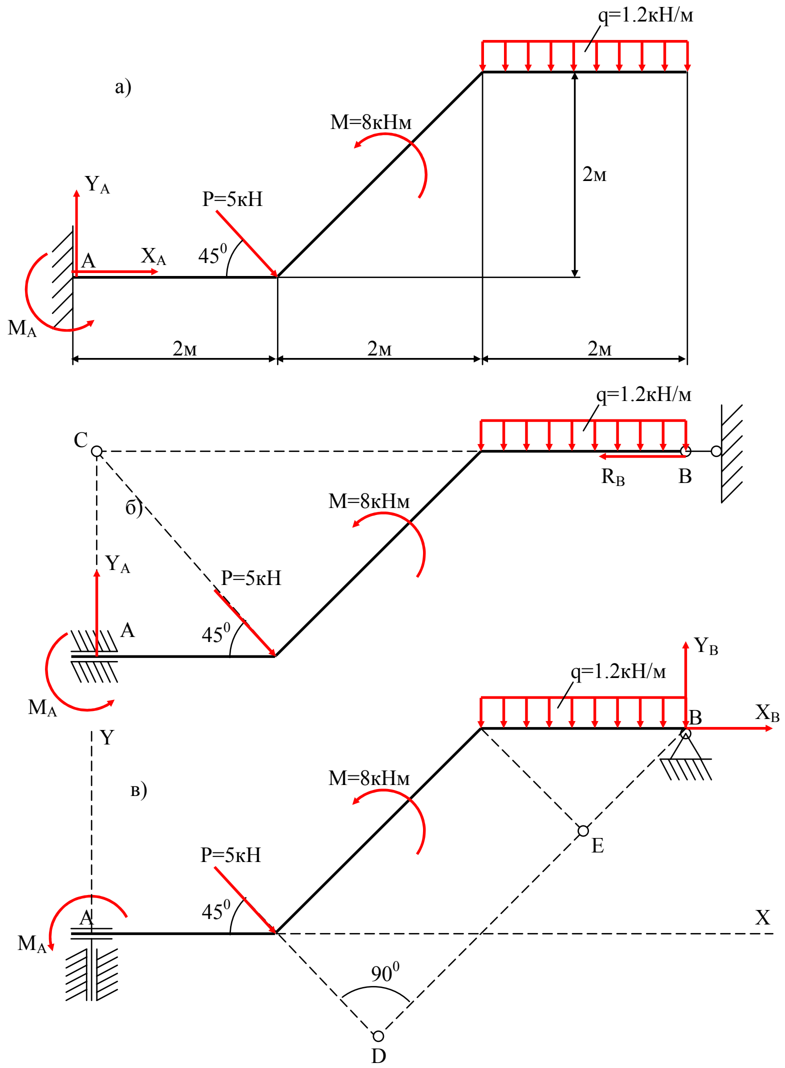
<u>Приклад.</u> Визначення реакцій опор твердого тіла

Визначити реакції опор для того способу закріплення, при якому момент M_A в защемленні має найменше числове значення.

<u>Розв’язок</u>

Розглянемо систему врівноважених сил, які прикладені до конструкції. Дію в'язей на конструкцію замінимо їх реакціями.

Для того щоб вияснити, в якому випадку момент є найменшим, знайдемо його для всіх трьох схем, не визначаючи інших реакцій.



Для схеми а

а) $\Sigma M_{iA}=0$; M_A-$P\cdot 2\sin45+M-q\cdot 2\cdot 5=0$;

звідки M_A=11.07кНм.

Для схеми б

б) $\Sigma M_{iC}=0$; $M_A+M-q\cdot 2\cdot 5=0$;

звідки M_A=4кНм.

Для схеми в

в) $\Sigma M_{iB}=0$; $M_A+P\cdot BD+M+q\cdot 2\cdot 1=0$;

звідки M_A=-31.61кНм.

де $BD=BE+ED=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4.24$м

Таким чином, найменший момент в виникає при закріпленні бруса по схемі (б). Визначимо опорні реакції для цієї схеми:

$\Sigma X_i=0$; $P\cos45-R_B=0$;

звідки R_B=3.54кН.

$\Sigma Y_i=0$; $Y_A-P\cdot\sin45-q\cdot 2=0$;

звідки Y_A=5.94кН.

Приклад. Визначення реакцій опор і сил в стержнях плоскої ферми

Визначити реакції опор ферми від заданого навантаження, а також сили у всіх стержнях способом вирізання вузлів, якщо P_1=2кН, P_2=4кН, P_3=6кН, a=4м, h=3м.

Розв’язок

1. Визначення реакцій опор.

Покажемо зовнішні сили, які прикладені до ферми: активні (задані) сили $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ і реакції опор А і В.

Оскільки лінія дії реакції опори А невідома, визначимо її складові по координатним осям $\vec{X}_A$ і $\vec{Y}_A$.

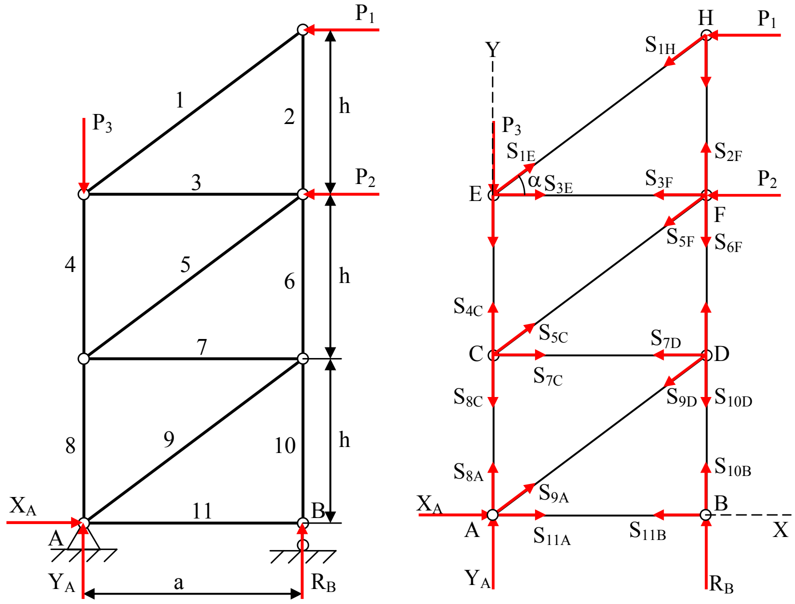
Опора В – стержнева; лінія дії її реакції відома – вона направлена вздовж опорного стержня.

Складемо рівняння рівноваги сил, що прикладені до ферми:

$$\left.\begin{array}{ll}\sum M_{Ai}=0; & P_1\cdot 3h+P_2\cdot 2h+R_B a=0\\ \sum X_i=0; & X_A-P_1-P_2=0\\ \sum Y_i=0; & Y_A+R_B-P_3=0\end{array}\right\}$$

З цих рівнянь

R_B=-10.5кН; Y_A=6кН; X_A=16.5кН.



2. Визначення сил в стержнях ферми способом вирізання вузлів.

Стержні, що сходяться у вузлі ферми, є для вузлового з’єднання в’язями. Відкинемо уявно в’язі і замінимо їх дію на вузли реакціями.

Силу у стержні з номером i позначимо S_i. Реакцію стержня, прикладену до вузла M, - S_{iM}. Для стержня, що з’єднує вузли M і N,

$\vec{S}_{iM}=-\vec{S}_{iN}$, але $S_{iM}=S_{iN}=S_i$.

Напрямок реакцій всіх стержнів показані від вузлів в середину стержнів вважаючи що стержні розтягнуті. Якщо в результаті розв’язку реакція стержня буде від’ємною, це буде означати, що відповідний стержень стиснутий.

Для кожного вузла складемо два рівняння рівноваги:

$\Sigma X_i=0$ і $\Sigma Y_i=0$. (2)

Неважко переконатися, що з цих рівнянь можна визначити не тільки всі сили, але і реакції опор, так що попереднє визначення реакцій опор не є необхідним. Дійсно, вузлів 7 (A, B, C, D, E, F, H), рівнянь, відповідно, 14, а невідомих теж 14, тобто 11 зусиль в стержнях і 3 складових опорних реакцій. Раніше знайдені реакції опор можуть служити для перевірки рішення.

Рекомендується розглядати вузли в такі послідовності, щоб кожен раз в рівняння (2) входило не більше двох невідомих.

Почнемо з вузла H:

$$\Sigma X_i=0;\ -P_1-S_{1H}\cos\alpha=0;$$
$$\Sigma Y_i=0;\ -S_{1H}\sin\alpha-S_{2H}=0,$$

звідки визначаємо

$S_{1H}=S_1=-2.5$кН (стержень стиснутий) і $S_{2H}=S_2=1.5$кН

Для вузла E

$$\Sigma X_i=0;\ S_{1E}\cos\alpha+S_{3E}=0;$$
$$\Sigma Y_i=0;\ S_{1E}\sin\alpha-P_3-S_{4E}=0,$$

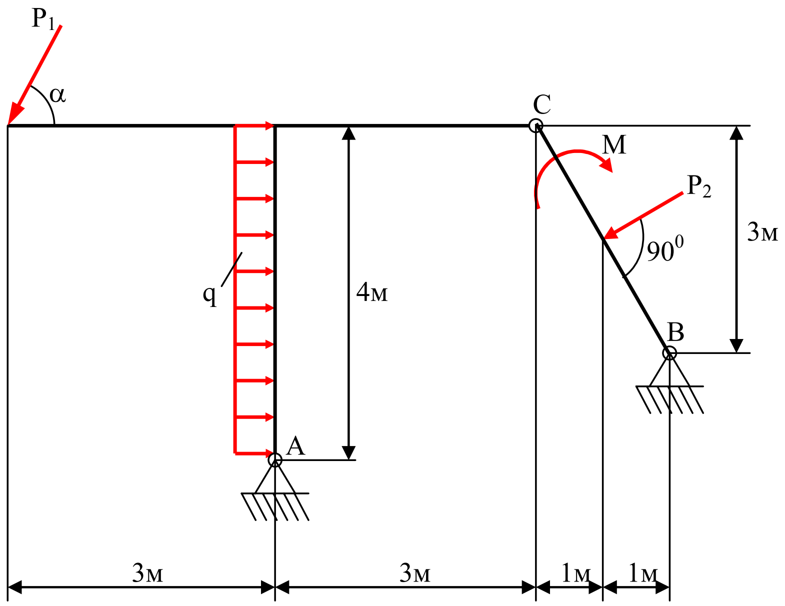
звідки знаходимо

$S_{3E}=S_3=2$кН, $S_{4E}=S_4=-7.5$кН (стержень стиснутий).

Потім складаємо рівняння рівноваги сил, які прикладені до вузлів F, C, D, B, A і знаходимо решту реакцій $S_5=-7.5$кН, $S_6=6$кН, $S_7=6$кН, $S_8=-12$кН, $S_9=-7.5$кН, $S_{10}=10.5$кН, $S_{11}=0$кН.

Приклад. Визначення реакцій опор складеної конструкції

Конструкція складається з двох частин. Визначити реакції опор, а також реакції в з'єднанні C, якщо $P_1=5$кН, $P_2=7$кН, $M=22$кН, $q=2$кН/м, $\alpha=60^0$.



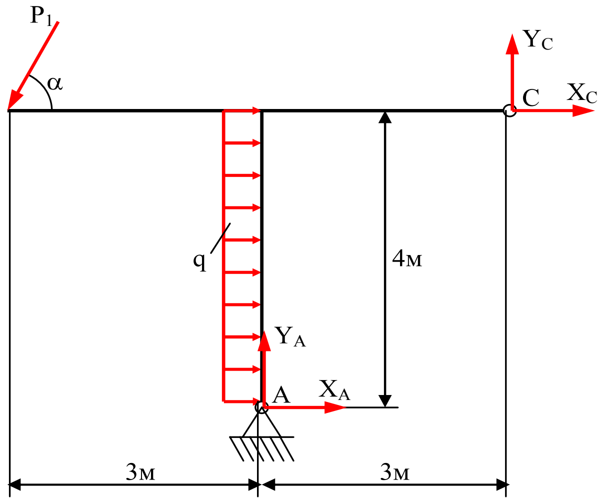
Розв'язок

Розглянемо систему сил, що врівноважуються, які прикладені до частини конструкції розташованої ліворуч від шарніра С:

$\Sigma M_{iC}=0;\ P_1\sin\alpha\cdot 6+Q\cdot 2+X_A\cdot 4-Y_A\cdot 3=0;$ (1)

$\Sigma X_i=0;\ -P_1\cos\alpha+Q+X_A+X_C=0;$ (2)

$\Sigma Y_i=0;\ -P_1\sin\alpha+Y_A+Y_C=0.$ (3)

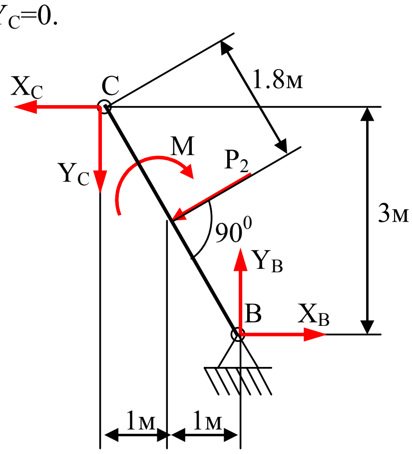


Розглянемо систему сил, що врівноважуються, які прикладені до частини конструкції розташованої з праворуч від шарніра С:

$\Sigma M_{iC}=0$; $-P_2 \cdot 1.8 - M + X_B \cdot 3 + Y_B \cdot 2 = 0$; (4)

$\Sigma X_i=0$; $-P_2\cos\beta + X_B - X_C = 0$; (5)

$\Sigma Y_i=0$; $-P_2\sin\beta + Y_B - Y_C = 0$. (6)



Розв’язавши спільно рівняння (1), (2), (3), (4), (5), (6) знаходимо невідомі реакції

$X_A=-7.974$кН; $Y_A=3.362$кН; $X_C=2.474$кН; $Y_C=0.968$кН; $X_B=8.298$кН; $Y_B=4.853$кН.

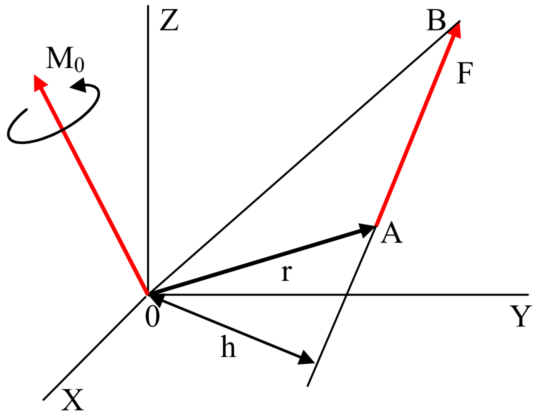
6. Системи пар і сил довільно розташованих в просторі

6.1. Момент сили відносно центра як вектор

Щоб перейти до розв'язку задач статики для системи сил довільно розташованих в просторі необхідно уточнити і розширити ряд введених раніше понять.

1. Зображення моменту вектором

Момент $m_0(F)$ сили F відносно центра O будемо показувати прикладеним в центрі O вектором M_0, який дорівнює по модулю добутку модуля сили F на плече h і перпендикулярним до площини OAB, яка проходить через центр O і силу F. Направляти вектор M_0 будемо в ту сторону, звідки поворот, що здійснюється силою, видний проти хода годинникової стрілки.



2. Вираз моменту сили за допомогою векторного добутку

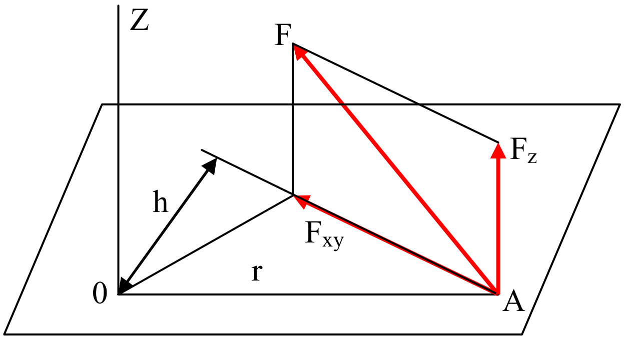
Момент сили F відносно центра O дорівнює векторному добутку радіуса вектора r=OA, який з'єднує центр O з точкою прикладення сили A, на саму силу.

$$M_0 = r \times F$$

6.2. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називається скалярна величина, яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, яка перпендикулярна осі, взятому відносно точки перетину осі з площиною.

$$m_z(F)=m_0(F_{xy})=\pm F_{xy}h$$

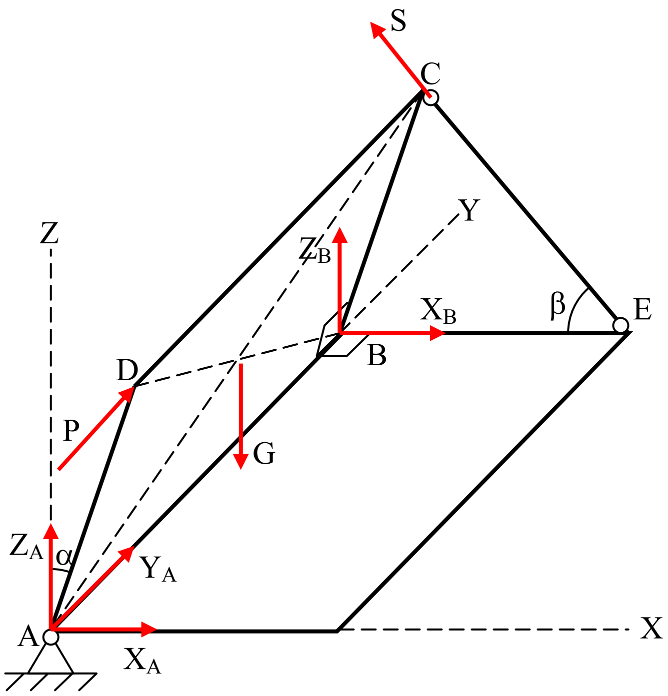


6.3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей були рівні нулю

$$\left.\begin{array}{r} \sum F_{xi}=0 \\ \sum F_{yi}=0 \\ \sum F_{zi}=0 \\ \sum m_x(F_i)=0 \\ \sum m_y(F_i)=0 \\ \sum m_z(F_i)=0 \end{array}\right\}$$

<u>Приклад.</u> Визначення реакцій опор твердого тіла



Знайти реакції опор конструкції, якщо вага рами ABCD G=1кН, P=2кН, AB=BC=60см, AB=CD=100см, $\alpha=30^0$, $\beta=60^0$.

Розв'язок

Рівняння моментів сил відносно координатних осей:

$\sum M_{xi}=0$; $-P\cdot AD\cdot\cos30^0-G\cdot AB/2+S\cdot\cos30^0\cdot AB+Z_B\cdot AB=0$,

$\sum M_{yi}=0$; $G\cdot(BC/2)\cdot\sin30^0-S\cdot BC\cdot\sin60^0=0$,

$\sum M_{zi}=0$; $P\cdot AD\cdot\sin30^0+S\cdot\cos60^0\cdot AB-X_B\cdot AB=0$,

$\sum X_i=0$; $X_A+X_B-S\cdot\cos60^0=0$,

$\sum Y_i=0$; $Y_A+P=0$,

$\sum Z_i=0$; $Z_A-G+Z_B+S\cdot\cos30^0=0$.

З цих рівнянь знаходимо S=0.289кН, X_A=-0.6кН, Y_A=-2кН, Z_A=-0.54кН, X_B=0.744кН, Z_B=1.29кН.

7. Центр ваги

7.1. Послідовне додавання паралельних сил. Центр паралельних сил

$$R_1=P_1+P_2,\ \frac{A_1B_1}{A_2B_1}=\frac{P_2}{P_1},$$

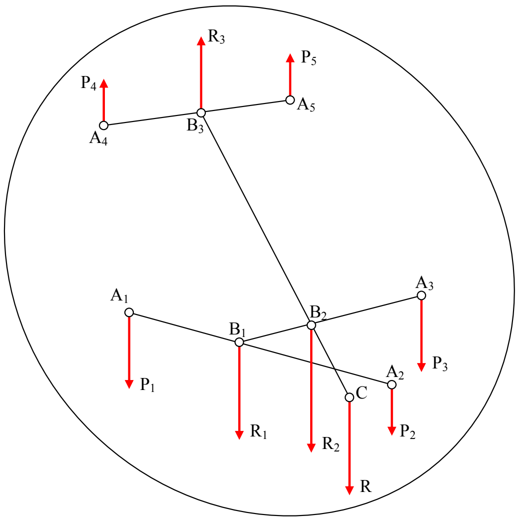
$$R_2=R_1+P_3,\ \frac{A_3B_2}{B_1B_2}=\frac{R_1}{P_3},$$

$$R_3=P_4+P_5,\ \frac{A_4B_3}{A_5B_3}=\frac{P_5}{P_4},$$

1. Сили R_2 і R_3 не рівні по модулю. Нехай $R_2>R_3$, тоді рівнодіюча $R=R_2-R_3$ і направлена в сторону більшої сили. Точка C, в які прикладена рівнодіюча, знаходиться на продовжені B_2B_3, за точкою прикладення більшої сили, причому

$$\frac{B_2C}{B_3C}=\frac{R_3}{R_2}$$

Точка C називається центром паралельних сил.



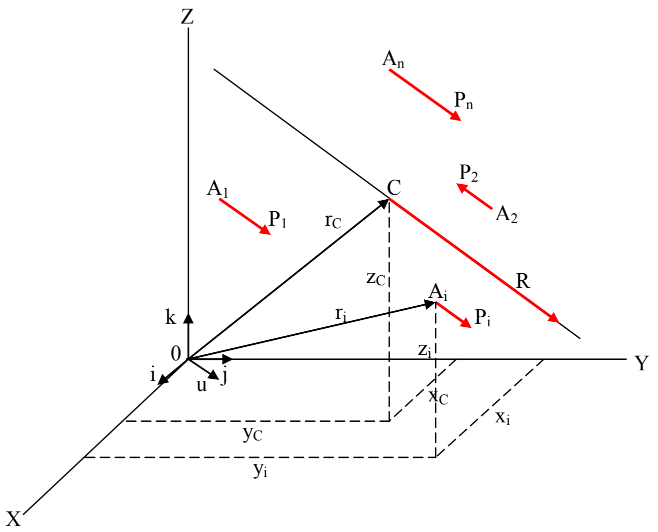
2. Сили R_2 і R_3 рівні по модулю, але їх лінії дії не співпадають. В цьому випадку задані сили приводяться до пари сил.
3. Сили R_2 і R_3 рівні по модулю і їх лінії дії співпадають. В цьому випадку задані сили взаємозрівноважуються.

7.2. Формули радіуса вектора і координат центра паралельних сил

$$M_0(R)=\Sigma M_{0i}$$
$$r_C\times R=\Sigma r_i\times P_i.$$
$$P_i=uP_i,$$
$$R=\Sigma P_i=u\Sigma P_i.$$
$$r_C\times u\Sigma P_i=\Sigma r_i\times uP_i.$$
$$r_C\Sigma P_i\times u=\Sigma r_iP_i\times u, \text{ або } (r_C\Sigma P_i-\Sigma r_iP_i)\times u=0.$$
звідси витікає $r_C\Sigma P_i-\Sigma r_iP_i=0$

Радіус-вектор центра паралельних сил:

$$r_C=\frac{\sum r_iP_i}{\sum P_i}.$$



Спроектувавши вектори лівої і правої частин рівності на вісі координат отримаємо формули для обрахунку координат центра паралельних сил:

$$x_C = \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}.$$

$$z_C = \frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i}.$$

7.3. Координати центрів ваги однорідних тіл

Центр ваги об'єму V:

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V}, \; y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \; z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}$$

Центр ваги площі А:

$$x_C = \frac{\sum a_k x_k}{A}, \; y_C = \frac{\sum a_k y_k}{A}$$

де А – площа всієї пластини; a_k – площі її частин

Центр ваги лінії:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \; y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \; z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}$$

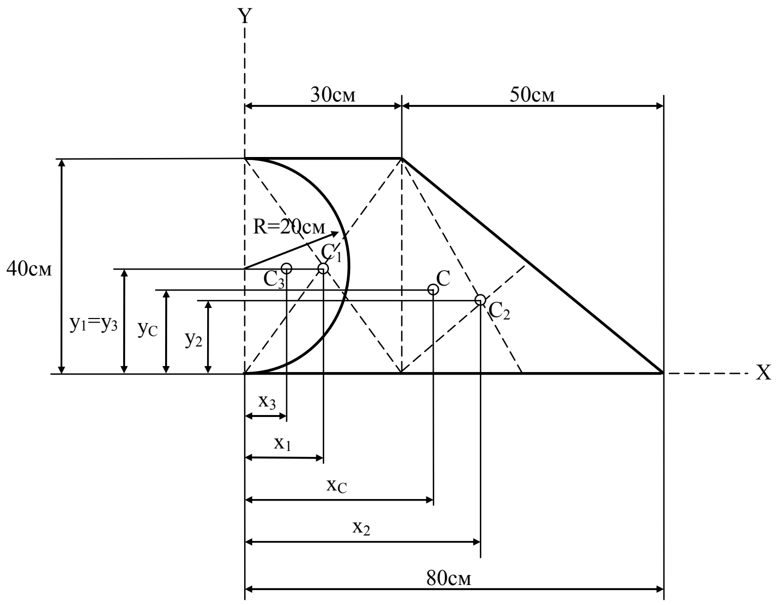
де L – довжина всієї лінії; l_k – довжина її частин

Приклад. Визначити координати центра ваги плоскої фігури.

Розв'язок

Ділимо плоску фігуру на частини, для яких відомі або легко визначаються площі і координати центрів ваги.

В даному випадку в якості таких частин приймаємо прямокутник, трикутник і півкруг. Площу півкруга, яка вирізана із прямокутника, вважаємо від'ємною.

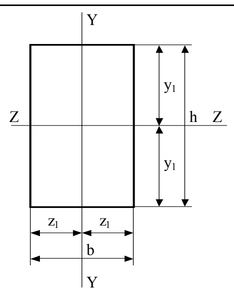


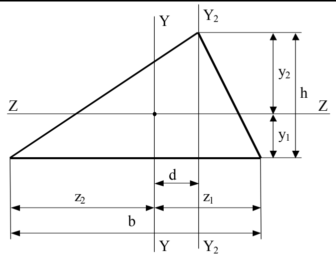
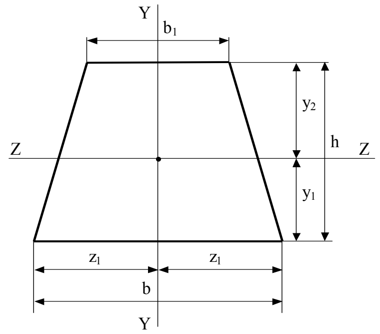
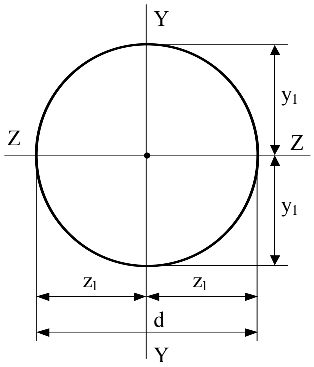
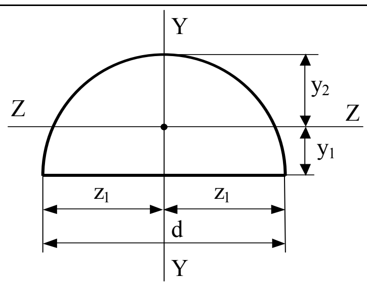
Координати центра ваги плоскої фігури визначаємо по формулам

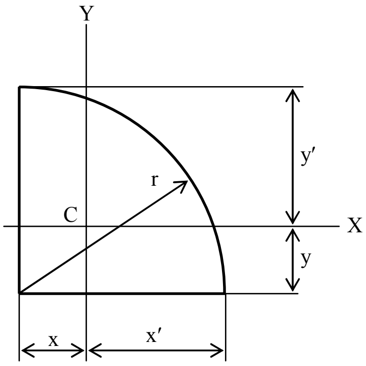
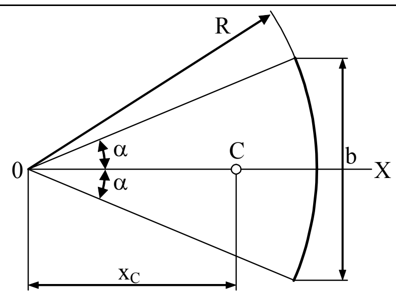
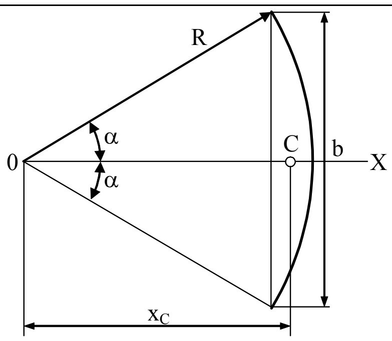
$$x_C = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 - A_3x_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{1200 \cdot 15 + 1000 \cdot 46.7 - 628 \cdot 8.5}{1200 + 1000 - 628} = 37.8\text{см}$$

$$y_C = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 - A_3y_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{1200 \cdot 20 + 1000 \cdot 13.3 - 628 \cdot 20}{1200 + 1000 - 628} = 15.7\text{см}$$

Площі і координати центрів ваги плоских фігур, що зустрічаються при виконанні завдання, приведені в таблиці.

Плоска фігура	Площа	Координати центра ваги
	A=bh	$z_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

	$A=\frac{1}{2}bh$	$y_1=\frac{1}{3}h$ $y_2=\frac{2}{3}h$ $d=\frac{1}{3}(z_2-z_1)$
	$A=\frac{1}{2}(b_1+b)h$	$y_1=\frac{b+2b_1}{3(b+b_1)}h$ $y_2=\frac{2b+b_1}{3(b+b_1)}h$ $z_1=\frac{b}{2}$
	$A=\frac{\pi d^2}{4}$	$z_1=y_1=\frac{d}{2}$
	$A=\frac{\pi d^2}{8}$	$z_1=\frac{d}{2}$ $y_1=\frac{2}{3}\frac{d}{\pi}$

	$A=\dfrac{\pi d^2}{16}$	$x=y=\dfrac{4r}{3\pi}$
	$A=\alpha R^2$	$x_C=\dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$
	$A=\dfrac{1}{2}R^2(2\alpha-\sin 2\alpha)$	$x_C=\dfrac{4R\sin^3\alpha}{3(2\alpha-\sin 2\alpha)}$

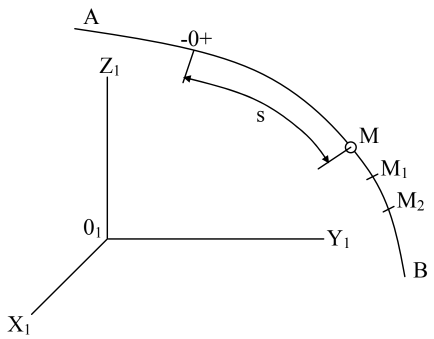
КІНЕМАТИКА

8. Способи завдання руху точки

Для завдання криволінійного руху точки можна застосовувати один з наступних способів:

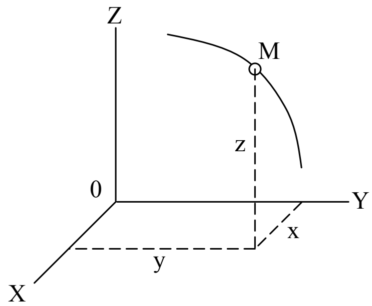
1. Природній спосіб завдання руху.

Безперервна лінія, яку описує точка, що рухається, відносно даної системи відліку, називається траєкторією точки. Якщо траєкторією є пряма лінія, рух точки називається прямолінійним, а якщо крива – криволінійним.



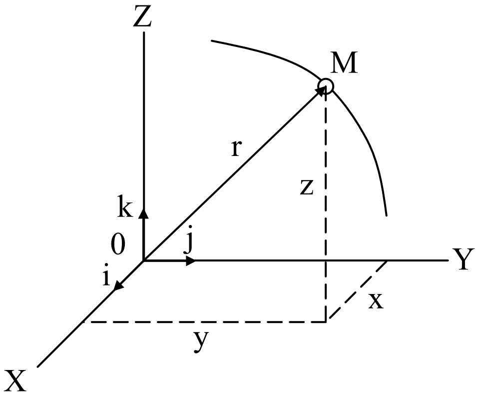
Щоб задати рух точки природнім способом, треба знати: 1) траєкторію точки; 2) початок відліку на траєкторії з вказаним додатнім і від'ємним напрямком відліку; 3) закон руху точки вздовж траєкторії у вигляді s=f(t).

2. Координатний спосіб завдання руху.



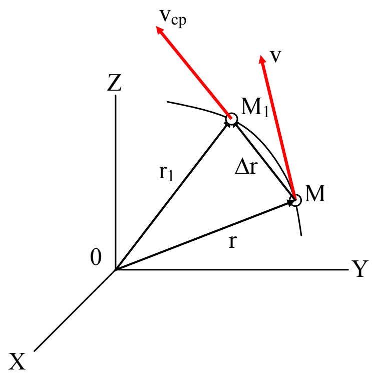
$x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ – рівняння руху точки в декартових прямокутних осях координат визначають закон криволінійного руху точки при координатному способі завдання руху

3. Векторний спосіб завдання руху.



$r=r(t)$ – рівність яка визначає закон криволінійного руху точки у векторні формі, так як воно дозволяє в будь який момент часу t побудувати відповідний радіус-вектор r і знайти положення точки, що рухається.

8.1. Вектор швидкості точки



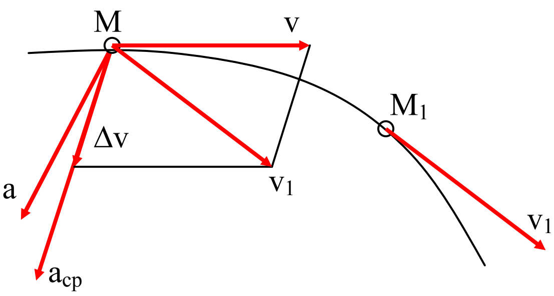
$v_{cp}=\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ - середня по модулю і напрямку швидкість точки за проміжок часу Δt.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$ - швидкість точки в даний момент часу

Вектор швидкості точки в даний момент часу дорівнює перші похідні від радіуса-вектора точки по часу.

$$v = \frac{dr}{dt}$$

8.2. Вектор прискорення точки



$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$ - вектор середнього прискорення точки за проміжок часу Δt.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$ - прискорення точки в даний момент часу

Вектор прискорення точки в даний момент часу дорівнює перші похідні від вектора швидкості або другі похідні від радіус-вектора точки по часу.

8.3. Визначення швидкості і прискорення точки при координатному способі завдання руху.

1. Визначення швидкості точки

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

Проекції швидкості на осі координат дорівнюють першим похідним від відповідних координат точки по часу.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$ - модуль швидкості

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v},\ \cos\beta = \frac{v_y}{v},\ \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$ - напрямок швидкості

де α, β, γ - кути вектора v з осями координат.

2. Визначення прискорення точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

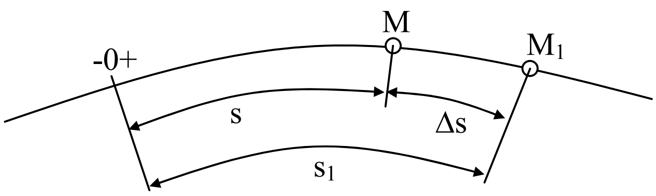
Проекції прискорення на осі координат дорівнюють першим похідним від проекцій швидкостей або другим похідним від відповідних координат точки по часу.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$ - модуль прискорення

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a},\ \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a}$$ - напрямок прискорення

де α_1, β_1, γ_1 - кути вектора прискорення а з осями координат.

8.4. Визначення швидкості точки при природному способі завдання руху.

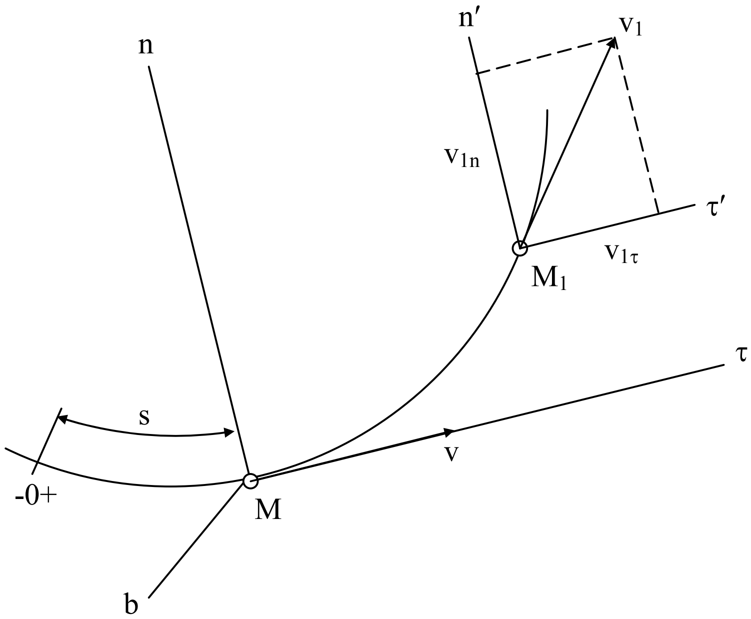


$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ - середня по модулю і напрямку швидкість точки за проміжок часу Δt.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$ - швидкість точки в даний момент часу

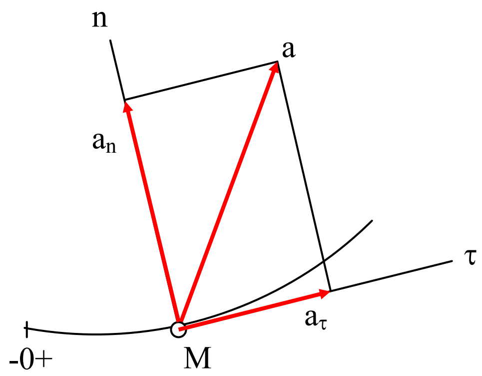
Чисельна величина швидкості точки в даний момент часу дорівнює перші похідні від відстані (криволінійної координати) s точки по часу.

8.5. Дотичне і доцентрове прискорення точки.



$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2};\ a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Проекція прискорення точки на дотичну дорівнює перші похідні від чисельної величини швидкості або другі похідні від відстані (криволінійної координати) s по часу, а проекція прискорення на головну нормаль дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії в дані точці кривої.



<u>Приклад</u> Визначення швидкості і прискорення точки по заданим рівнянням її руху.

По заданим рівнянням руху точки М встановити вид її траєкторії і для моменту часу t (c) найти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне і доцентрове, а також радіус кривизни траєкторії.

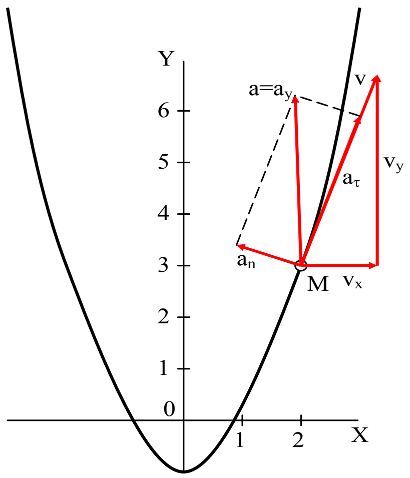
$x=4t;\ y=16t^2-1;$ (1)

$t=0.5$ с.

<u>Розв'язок.</u>

Рівняння руху (1) можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії точки. Щоб отримати рівняння траєкторії в координатні формі, виключимо час t з рівнянь (1).

Отримаємо $y=x^2-1$, тобто траєкторією точки є парабола.



Координати точки в момент часу t=0.5c:

x(t=0.5)=4t=4·0.5=2см; y(t=0.5)=$16t^2$-1=16·0.5^2-1=3см

Знайдемо швидкість і прискорення диференціюючи по часу рівняння руху (1):

$v_x = \dot{x} = 4см/c$; $a_x = \ddot{x} = 0$;

$v_y = \dot{y} = 32t$; v_y(t=0.5)=32·0.5=16см/с; $a_y = \ddot{y} = 32см/c^2$.

По знайденим проекціям визначаються модуль швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 16.5см/c$$

і модуль прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 32^2} = 32см/c^2$$

Модуль дотичного прискорення точки

$$a_\tau = \left|\frac{(v_x a_x + v_y a_y)}{v}\right| = \left|\frac{(4 \cdot 0 + 16 \cdot 32)}{16.5}\right| = 31см/c^2$$

Модуль доцентрового прискорення точки

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v} = \frac{|4 \cdot 32 - 16 \cdot 0|}{16.5} = 7.8см/c^2$$

Радіус кривизни траєкторії в точці що розглядається визначається з виразу

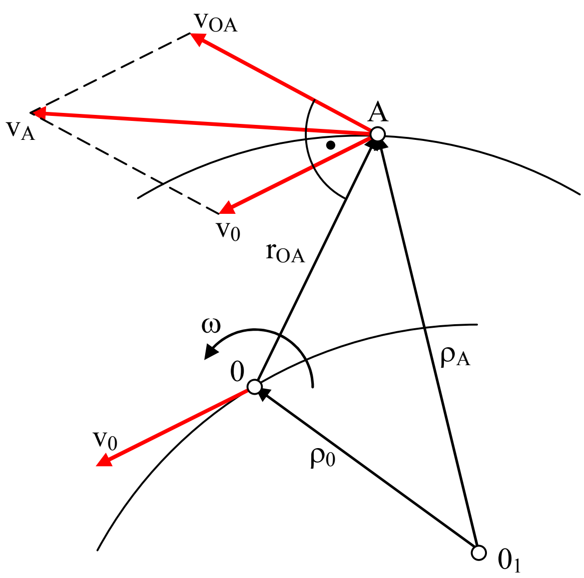
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{16.5^2}{7.8} = 35см$$

9. Плоский рух твердого тіла

9.1. Теорема про швидкості точок плоскої фігури

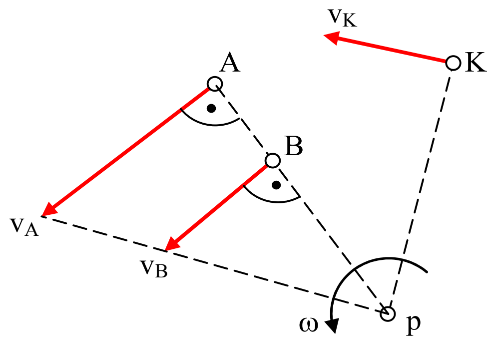
Швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричні сумі швидкості полюса і обертової швидкості цієї точки навколо полюса.

$$v_A = v_0 + \omega \times r_{OA}$$



9.2. Миттєвий центр швидкостей

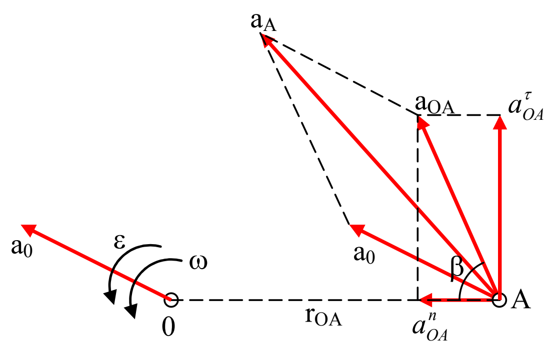
В кожен момент часу існує точка, незмінно зв'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в цей момент дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром швидкостей.



$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA}$, $\frac{v_K}{v_A} = \frac{PK}{PA}$, тобто модулі швидкостей точок плоскої фігури в кожен момент часу пропорційний відстаням від цих точок до миттєвого центру швидкостей.

9.3. Теорема про прискорення точок плоскої фігури

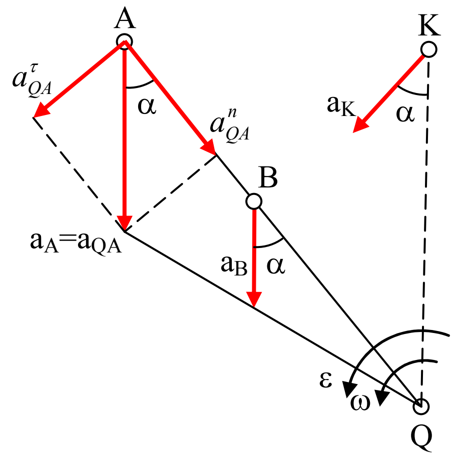
Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричні сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки в обертовому русі навколо полюса.



$a_A = a_0 + \varepsilon \times r_{OA} + \omega \times v_{OA}$

9.4. Миттєвий центр прискорень

В кожен момент часу існує точка плоскої фігури, прискорення якої в цей момент дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром прискоень.



Кут α:

$$\alpha = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Відрізок AQ

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

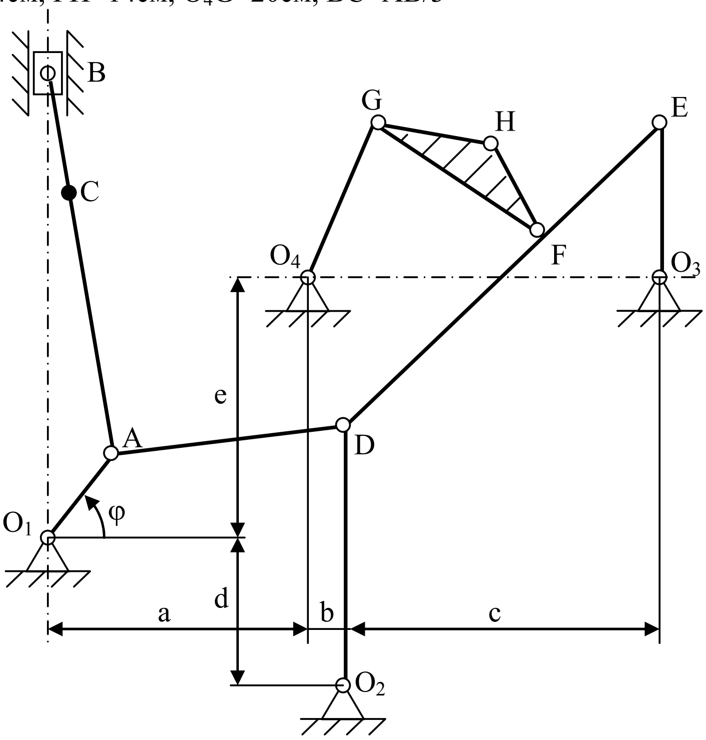
$\dfrac{a_B}{a_A} = \dfrac{QB}{QA}$; $\dfrac{a_K}{a_A} = \dfrac{QK}{QA}$, тобто модулі прискорень точок плоскої фігури в кожен момент часу пропорційні відстаням від цих точок до миттєвого центра прискорень, а вектори прискорень складають з відрізками, що з'єднують ці точки з миттєвим центром прискорень, однаковий кут α.

Приклад Кінематичний аналіз багатоланкового механізму.

Кривошип OA обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_{O_1A} = 2 рад/с$. Визначити для заданого положення механізму:

1) швидкості точок A, B, C, … механізму і кутові швидкості ланок за допомогою плану швидкостей;
2) швидкості цих точок механізму і кутові швидкості ланок за допомогою миттєвого центра швидкостей;
3) прискорення точок A і B і кутове прискорення ланки AB;
4) положення миттєвого центру прискорень ланки AB;
5) прискорення точки M, яка ділить ланку AB дві рівні половини.

Дано: $\varphi=52^0$, a=32см, b=4см, c=39см, d=19см, e=32см, O_1A=12см, AB=46см, AD=29см, O_2D=32см, DE=53см, O_3E=18см, FG=25см, GH=14см, FH=14см, O_4G=20см, BC=AB/3

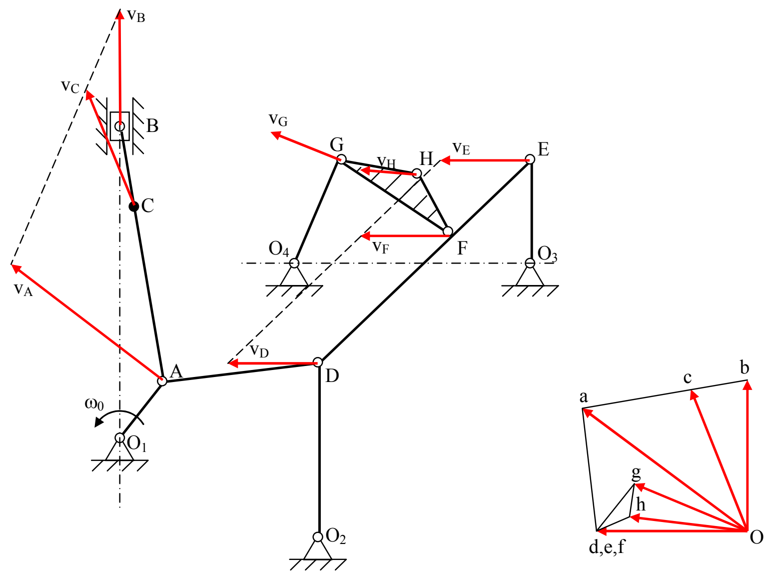


Розв’язок.

1. Визначення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей

а) *Визначаємо швидкості точок.* Будуємо схему механізму у вибраному масштабі. Визначаємо модуль швидкості точки А кривошипа O_1A:

$$v_A = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 12 = 24 см/с$$



Вектор v_A перпендикулярний O_1A і направлений в сторону обертання кривошипа.

Будуємо план швидкостей. З довільно вибраного полюса О проводимо промінь Оа, який представляє собою у вибраному масштабі швидкість точки А. Для визначення швидкості точки В через полюс О проводимо пряму, яка паралельна швидкості v_B, через точку а – пряму, яка перпендикулярна АВ. Отримаємо точку b; відрізок Ob визначає швидкість точки В. Вимірюємо довжину променя Ob і користуючись масштабом швидкостей знаходимо v_B=17.5см/с.

Для визначення швидкості точки С ділимо відрізок ab плана швидкостей в відношенні ac/cb=AC/CB.

Промінь Ос представляє собою швидкість точки С. Користуючись мастабом швидкостей, отримаємо v_C=17.5см/с.

Продовжуючи побудову плана швидкостей знаходимо $v_D=v_E=v_F$=17.5см/с, v_G=14.8см/с, v_H=14.4см/с.

На кресленні механізму кінці векторів швидкостей точок прямолінійної ланки (наприклад, A, B, C або D, E) знаходяться на одні прямі.

б) Визначаємо кутові швидкості ланок механізму. Відрізок ab плана швидкостей представляє собою обертову швидкість точки B навколо точки A:

$$ab=v_{AB}=\omega_{AB}\cdot AB;$$

звідси кутова швидкість ланки AB

$$\omega_{AB}=ab/AB=19.5/46=0.424 \text{рад/с}.$$

Аналогічно визначаються кутові швидкості ланок AD, DE, FGH:

$$\omega_{AD}=ad/AD=0.5 \text{рад/с};$$

$$\omega_{DE}=de/DE=0 \text{рад/с};$$

$$\omega_{FGH}=fg/FG=0.272 \text{рад/с}.$$

Кутову швидкість ω_{FGH}=gh/GH=fh/FH.

Кутова швидкість ланки O_2D визначається по обертові швидкості точки D навколо нерухомого центра O_2:

$$\omega_{O_2D} = v_d / O_2D = 0.547 \, рад/с$$

Аналогічно визначаються кутові швидкості ланок O_3E, O_4G:

$$\omega_{O_3E} = v_E / O_3E = 0.972 \, рад/с; \; \omega_{O_4G} = v_G / O_4G = 0.74 \, рад/с.$$

2. Визначення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок механізму за допомогою миттєвих центрів швидкостей.

а) *Визначаємо положення миттєвих центрів швидкостей ланок механізму.* Будуємо схему механізму у вибраному масштабі. Ланки O_1A, O_2D, O_3E, O_4G обертаються навколо нерухомих центрів O_1, O_2, O_3, O_4.

Миттєвий центр швидкостей P_{AB} ланки AB знаходиться як точка перетину перпендикулярів, проведених із точок A і B до їх швидкостей. Аналогічно визначається положення миттєвих центрів швидкостей P_{AD} і P_{FGH}. Миттєвий центр швидкостей ланки DE знаходиться в нескінченності.

б) *Визначаємо швидкості точок.* Швидкості точок ланок механізму пропорційні відстаням від цих точок до миттєвих центрів швидкостей відповідних ланок.

Ці відстані вимірюються на кресленні.

Для визначення швидкостей точок B і C ланки AB маємо пропорції $v_A/v_B=AP_{AB}/BP_{AB}$; $v_A/v_C=AP_{AB}/CP_{AB}$.

$$v_B=v_A\cdot BP_{AB}/AP_{AB};$$

$$v_C=v_A\cdot CP_{AB}/AP_{AB}.$$

Аналогічно, для точки D ланки AD

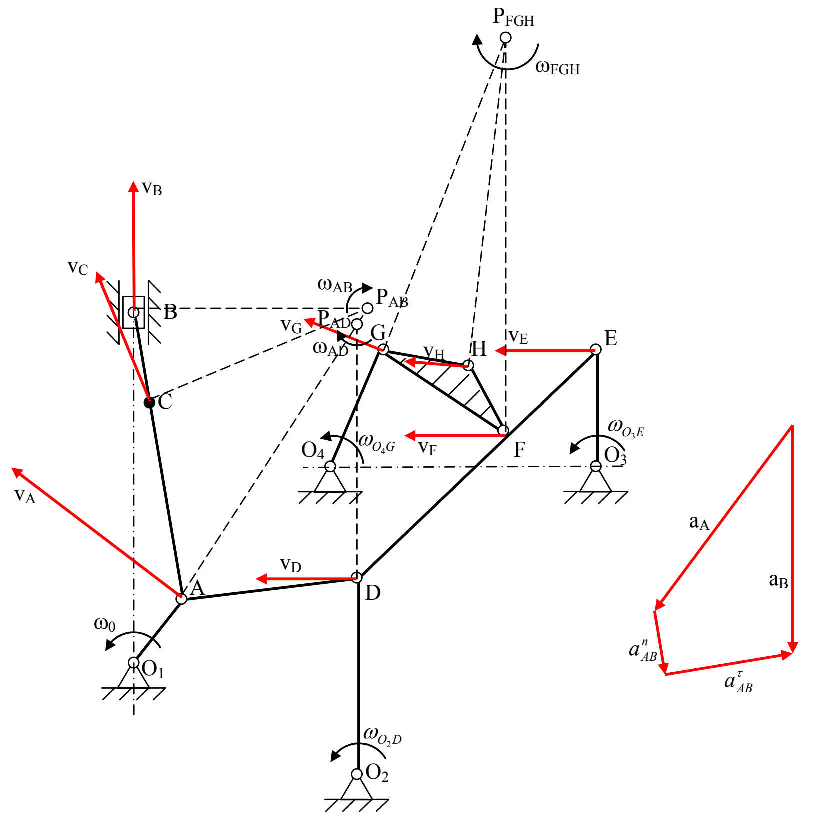
$$v_A/v_D=AP_{AD}/DP_{AD},$$

звідки

$$v_D=v_A\cdot DP_{AD}/AP_{AD}.$$

Так як миттєвий центр швидкостей ланки DE знаходиться в нескінченності, то $v_E=v_F=v_D$.

Для визначення швидкостей точок G і H маємо пропорції $v_F/v_G=FP_{FGH}/GP_{FGH}$; $v_F/v_H=FP_{FGH}/HP_{FGH}$.



Тоді,

$$v_G=v_F\cdot GP_{FGH}/FP_{FGH};\ v_H=v_F\cdot HP_{FGH}/FP_{FGH}.$$

Користуючись масштабом довжин, визначаємо відстані від точок до миттєвого центра швидкостей.

AP_{AB}=57см, BP_{AB}=41см, CP_{AB}=41.5см, AP_{AD}=47.5см, DP_{AD}=34.5см, FP_{FGH}=62.7см, GP_{FGH}=52.8см, HP_{FGH}=50.8см.

Швидкості точок обраховані по вказаним формулам за допомогою миттєвих центрів швидкостей:

v_A=24см/с,v_B=17.3см/с,v_C=17.5см/с,v_D=17.4см/с,v_E=17.4см/с,v_F=17.4см/с,v_G=14.6см/с,v_H=14.1см/с

Одночасно з визначенням модулів швидкостей точок знаходимо їх напрямок, а також напрямок обертання ланок механізму. Наприклад, по напрямку швидкості точки A і положенню миттєвого центру швидкостей P_{AB} встановлюємо, що обертання ланки AB відбувається за годинниковою стрілкою. Тому швидкість точки B при даному положенні механізму направлена вверх.

Аналогічно визначаємо напрямок обертання інших ланок і напрямок швидкостей точок механізму.

в) *Визначаємо кутові швидкості ланок механізму.* Швидкість будь-якої точки ланки дорівнює добутку кутової швидкості цієї ланки на відстань від точки до миттєвого центру швидкостей:

$$v_A=\omega_{AB}\cdot AP_{AB}=\omega_{AD}\cdot AP_{AD}.$$

Звідси визначаємо кутові швидкості ланок AB і AD:

$$\omega_{AB}=v_A/AP_{AB},\ \omega_{AD}=v_A/AP_{AD}.$$

Кутова швидкість ланки O_2D визначається по швидкості точки D:

$$\omega_{O_2D} = v_D / O_2D .$$

Кутова швидкість ланки DE при даному положенні механізму дорівнює нулю, так як миттєвий центр швидкостей ланки в даному випадку знаходиться в нескінченості: $\omega_{DE}=0$.

Аналогічно визначаємо кутові швидкості інших ланок механізму:

$$\omega_{O_3E} = v_E / O_3E ;$$

$$\omega_{FGH}=v_F/FP_{FGH};$$

$$\omega_{O_4G} = v_G / O_4G .$$

Кутові швидкості ланок, обраховані по вказаним співвідношенням:

ω_{AB}=0.421рад/с, ω_{AD}=0.505рад/с, ω_{DE}=0рад/с, $\omega_{O_2D} = 0.544\,рад/с$,

$\omega_{O_3E} = 0.967\, рад/с$, ω_{FGH}=0.278рад/с, $\omega_{O_4G} = 0.73\, рад/с$.

3. Визначення прискорень точок A, B, D і кутових прискорень ланок AB і BD.

а) Визначаємо a_A, a_B і ε_{AB}. За допомогою теореми про прискорення точок плоскої фігури визначаємо прискорення точки B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{AB} + \vec{a}^\tau_{AB}$$

Так як кривошип O_1A обертається рівномірно, то прискорення точки A направлено до центру O_1 і дорівнює

$$a_A = a^n_A = O_1A \cdot \omega^2_{O_1A} = 12 \cdot 2^2 = 48 см/с^2.$$

Центробіжне прискорення точки B в обертовому русі шатуна AB навколо полюса A направлено від точки B до точки A і дорівнює

$$a^n_{AB} = AB \cdot \omega^2_{AB} = 46 \cdot 0.4^2 = 7.36 см/с^2.$$

Відкладаємо від точки B у відповідному масштабі прискорення полюса a_A. З кінця вектора a_A будуємо вектор $\vec{a}^n_{AB}$, проводячи його паралельно BA. Через кінець вектора $\vec{a}^n_{AB}$ проводимо пряму, перпендикулярну BA, тобто паралельну обертовому прискоренню $\vec{a}^\tau_{AB}$. Точка перетину цієї прямої з прямою, по які направлений вектор прискорення повзуна B, визначає кінці векторів a_B будуємо вектор $\vec{a}^\tau_{AB}$.

Вимірами на кресленні отримуємо a_B=39см/с^2; $a^\tau_{AB} = 30 см/с^2$.

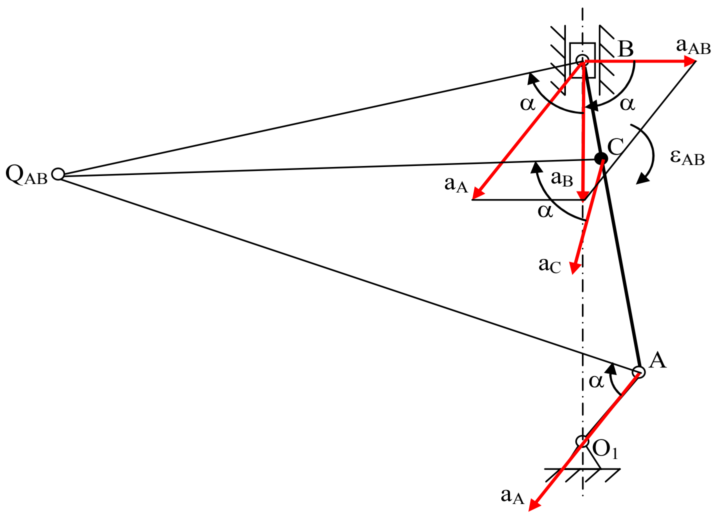
Так як $a^\tau_{AB} = AB \cdot \varepsilon_{AB}$, то кутове прискорення ланки AB

$$\varepsilon_{AB} = a^\tau_{AB} / AB = 30/46 = 0.652\, рад/с^2$$

4. Визначення положення миттєвого центра прискорень ланки AB.

Приймемо точку A за полюс. Тоді прискорення точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}.$$



Будуємо паралелограм прискорень при точці B по діагоналі a_B і стороні a_A. Сторона паралелограма a_{AB} виражає прискорення точки B в обертанні AB навколо полюса A. Прискорення a_{AB} складає з відрізком AB кут α, який можна виміряти на кресленні.

Напрямок вектора $\vec{a}_{AB}^{\tau}$ відносно полюса A дозволяє визначити напрямок ε_{AB}, в даному випадку відповідні напрямку обертання годинникової стрілки. Відклавши кут α від векторів a_A і a_B в цьому напрямку і провівши дві напівпрямі, знайдемо точку їх перетину Q_{AB} – миттєвий центр прискорень ланки AB.

5. Визначення прискорення точки C.

Знайдемо прискорення точки C за допомогою миттєвого центра прискорень.

Прискорення точок плоскої фігури пропорційні їх відстаням до миттєвого центра прискорень:

$$a_C/a_A=CQ_{AB}/AQ_{AB}.$$

Підставивши відстані, які визначені по кресленню, CQ_{AB}=67.5см, AQ_{AB}=77см, отримаємо прискорення точки C:

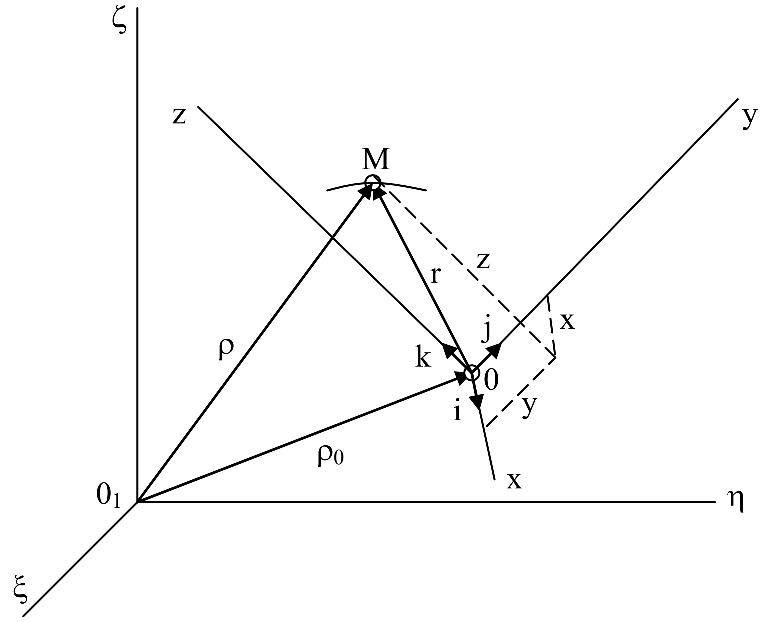
$$a_C=a_A\cdot CQ_{AB}/AQ_{AB}=48\cdot 67.5/77=42.1 см/с^2.$$

Прискорення a_C складає з прямою CQ_{AB} кут α; напрямок цього вектора відповідає кутовому прискоренню ε_{AB}.

10. Складний рух точки

10.1. Відносний, переносний і абсолютний рух точки

Складний рух точки (тіла) – це такий рух, при якому точка (тіло) одночасно приймає участь в двох або більше рухах.



0xyz – рухома система відліку

$0\xi\eta\zeta$ - нерухома система відліку

Рух т.М по відношенню до нерухомої системи відліку називають **абсолютним рухом точки**. Швидкість і прискорення точки в абсолютному русі називають **абсолютною швидкістю і абсолютним прискоренням точки** і позначаються v і a.

Рух точки по відношенню до рухомої системи відліку називають **відносним рухом точки**. Швидкість і прискорення точки у відносному русі називають **відносною швидкістю і відносним прискоренням точки** і позначаються v_r і a_r.

Рух рухомої системи відліку 0xyz і незмінно зв'язаного з нею тіла по відношенню до нерухомої системи відліку $0\xi\eta\zeta$ є для т.М **переносним рухом**. Швидкість і прискорення точки тіла, зв'язаного з рухомою системою відліку, що співпадає в даний момент з рухомою точкою, називають переносною швидкістю і переносним прискоренням точки і позначаються v_e і a_e.

10.2. Терема про додавання швидкостей.

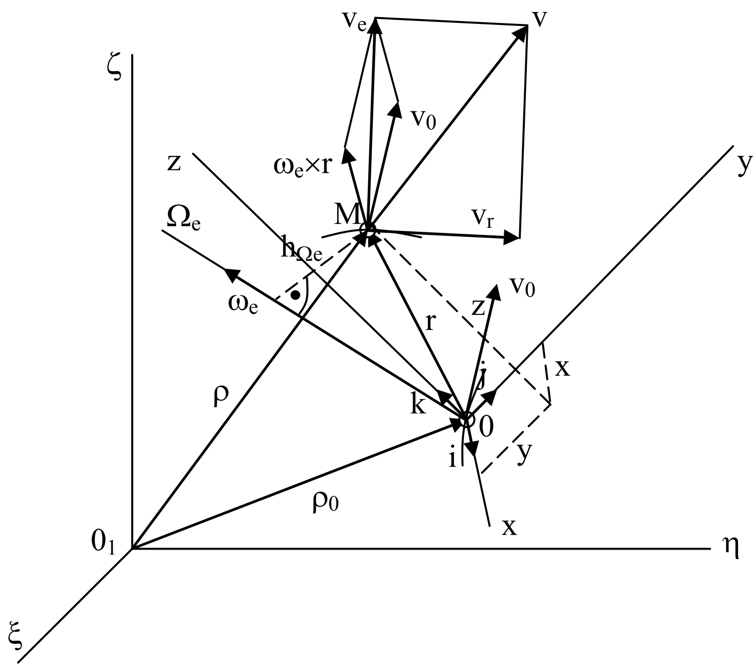
Рух вільного твердого тіла в загальному випадку складається з поступального руху разом з певним полюсом і сферичного руху навколо цього полюса. Цей сферичний рух в кожен момент можна розглядати як обертання рухомої системи з кутовою швидкістю ω_e навколо миттєвої осі Ω_e, що проходить через полюс 0.

$$\rho=\rho_0+r=\rho_0+(ix+jy+kz)$$

Вектор абсолютної швидкості точки

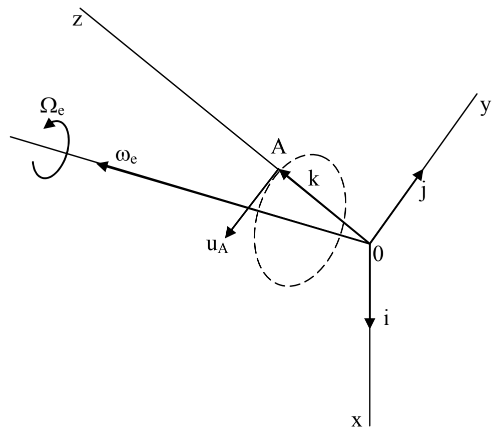
$$v=\frac{d\rho}{dt}$$

$$v=\frac{d\rho_0}{dt}+\left(\frac{di}{dt}x+\frac{dj}{dt}y+\frac{dk}{dt}z\right)+\left(i\frac{dx}{dt}+j\frac{dy}{dt}+k\frac{dz}{dt}\right) \qquad (2)$$



Похідна від кожного орта по часу є лінійна швидкість точки, для якої цей орт є радіусом-векром

$$\frac{dk}{dt} = u_A$$



Але кожен орт обертається навколо миттєвої осі Ω_e і обертова швидкість його кінця визначається векторним добутком

$$u_A=\omega_e \times k$$

тобто

$$u_A = \frac{dk}{dt} = \omega_e \times k$$

Таким чином, будемо мати

$$\frac{di}{dt} = \omega_e \times i\,,\ \frac{dj}{dt} = \omega_e \times j\,,\ \frac{dk}{dt} = \omega_e \times k \qquad (3)$$

Підставивши (3) в (2), отримаємо

$$v = \frac{d\rho_0}{dt} + \omega_e \times (ix + jy + kz) + \left(i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} \right)$$

$\frac{d\rho_0}{dt} = v_0$ - швидкість полюса О

$ix+jy+kz=r$

$i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} = iv_{rx} + jv_{ry} + kv_{rz} = v_r$ - відносна швидкість точки

Тому

$$v=v_0+\omega_e \times r+v_r \qquad (4)$$

Переносна швидкість точки

$$v_e=v_0+\omega_e \times r$$

На цій основі формула (4) приймає вид

$v=v_e+v_r$ – теорема про додавання швидкостей

Абсолютна швидкість точки дорівнює геометричні сумі її переносної і відносної швидкості.

10.3. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Абсолютна швидкість точки

$$v = \frac{d\rho_0}{dt} + \left(\frac{di}{dt}x + \frac{dj}{dt}y + \frac{dk}{dt}z \right) + \left(i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} \right)$$

Абсолютна прискорення точки

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\rho_0}{dt^2} + \left(\frac{d^2 i}{dt^2}x + \frac{d^2 j}{dt^2}y + \frac{d^2 k}{dt^2}z\right) + \left(i\frac{d^2 x}{dt^2} + j\frac{d^2 y}{dt^2} + k\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \qquad (1)$$
$$+ 2\left(\frac{di}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dj}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dk}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}\right)$$

На основі (3) маємо

$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\omega_e \times i) = \frac{d\omega_e}{dt}\times i + \omega_e \times \frac{di}{dt} = \varepsilon_e \times i + \omega_e \times (\omega_e \times i)$ Аналогічно

$$\frac{d^2 j}{dt^2} = \varepsilon_e \times j + \omega_e \times (\omega_e \times j)$$
$$\frac{d^2 k}{dt^2} = \varepsilon_e \times k + \omega_e \times (\omega_e \times k)$$

$\frac{d^2\rho_0}{dt^2} = a_0$ - прискорення полюса 0

$$\frac{d^2 i}{dt^2}x + \frac{d^2 j}{dt^2}y + \frac{d^2 k}{dt^2}z = [\varepsilon_e \times i + \omega_e \times (\omega_e \times i)]x + [\varepsilon_e \times j + \omega_e \times (\omega_e \times j)]y +$$
$$+ [\varepsilon_e \times k + \omega_e \times (\omega_e \times k)]z = \varepsilon_e \times (ix + jy + kz) + \omega_e \times \omega_e \times (ix + jy + kz) =$$
$$= \varepsilon_e \times r + \omega_e \times (\omega_e \times r)$$

$i\frac{d^2 x}{dt^2} + j\frac{d^2 y}{dt^2} + k\frac{d^2 z}{dt^2} = ia_{rx} + ja_{ry} + ka_{rz} = a_r$ - відносне прискорення точки

$$\frac{di}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dj}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dk}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} = \omega_e \times \left(i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}\right) = \omega_e \times (iv_{rx} + jv_{ry} + kv_{rz}) =$$
$$= \omega_e \times v_r$$

Підставляючи ці вирази у формулу (1) отримаємо

$$a = a_0 + \varepsilon_e \times r + \omega_e \times (\omega_e \times r) + a_r + 2(\omega_e \times v_r)$$

Переносне прискорення точки

$$a_e = a_0 + \varepsilon_e \times r + \omega_e \times (\omega_e \times r)$$

Враховуючи це отримаємо

$$a = a_e + a_r + 2(\omega_e \times v_r)$$

$2(\omega_e \times v_r)=a_c$ – поворотне прискорення (прискорення Коріоліса)
Таким чином

$$a=a_e+a_r+a_c \text{ – теорема Коріоліса}$$

У випадку непоступального переносного руху абсолютне прискорення точки дорівнює геометричні сумі переносного, відносного і поворотного прискорення

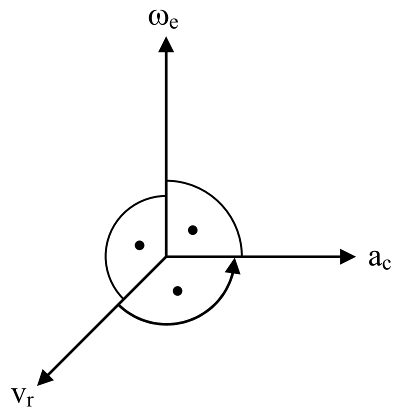
10.4. Модуль і напрямок поворотного прискорення (прискорення Коріоліса)

Поворотне прискорення (прискорення Коріоліса)

$$a_c=2(\omega_e \times v_r)$$

Модуль поворотне прискорення

$$a_c=2\omega_e v_r \sin(\omega_e, v_r)$$



Правило Жуковського: щоб знайти напрямок поворотного прискорення, необхідно спроектувати відносну швидкість точки на площину, перпендикулярну осі переносного обертання, і повернути цю проекцію в цій же площині на 90^0, в сторону переносного обертання

Приклад Визначення абсолютною швидкості і абсолютного прискорення.

Точка M рухається відносно тіла D. По заданим рівнянням відносного руху точки M і руху тіла D визначити для моменту часу t абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M.

s_r=OM=16-8cos3πt см; $\varphi_e=0.9t^2-9t^3$ рад; t=2/9c.

<u>Розв'язок</u>

Положення точки M на тілі D визначається відстанню s_r=OM.

$$s_r\left(t=\frac{2}{9}\right)=16-8\cos 3\pi t=16-8\cdot\cos\left(3\cdot\pi\cdot\frac{2}{9}\right)=20\text{см}$$

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму відносної і переносної швидкостей:

$$\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e$$

Модуль відносної швидкості

$$v_r=\frac{ds_r}{dt}=24\sin 3\pi t$$

$$v_r\left(t=\frac{2}{9}\right)=24\cdot\sin\left(3\cdot\pi\cdot\frac{2}{9}\right)=65.2\text{см}/\text{с}$$

Додатній знак у v_r показує, що вектор v_r направлений в сторону зростання s_r.

Модуль переносної швидкості

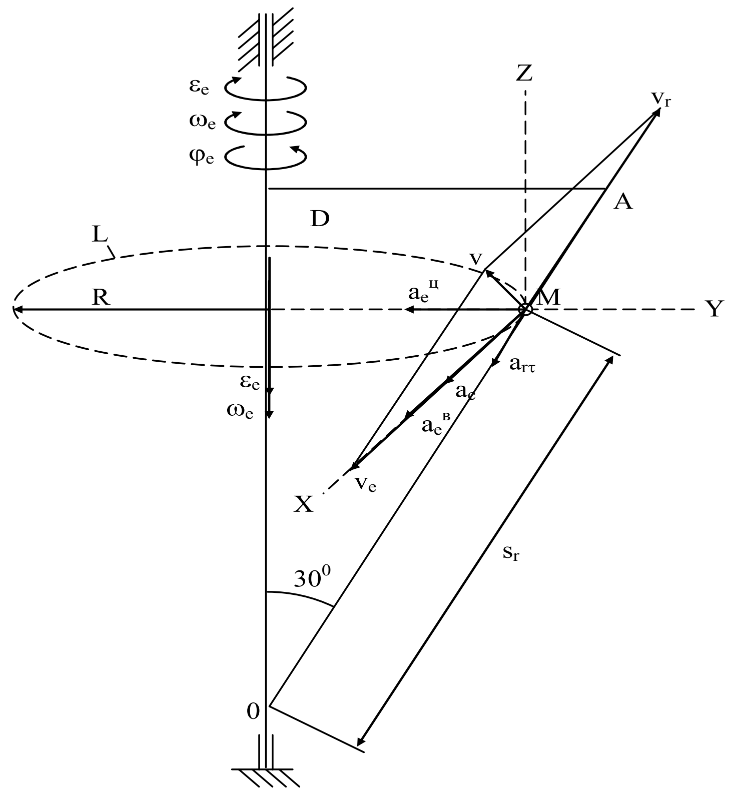
$$v_e=R\omega_e=10\cdot 0.93=9.3\text{см/с},$$

де R – радіус круга L, описаного тією точкою тіла, з якою в даний момент співпадає точка M, $R=s_r\sin 30^0=10$см.

Модуль кутової швидкості тіла:

$$\omega_e=\frac{d\varphi_e}{dt}=1.8t-27t^2$$

$$\omega_e\left(t=\frac{2}{9}\right)=1.8\cdot\frac{2}{9}-27\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2=-0.93\text{рад}/\text{с}$$



Від'ємний знак у величини ω_e вказує, що обертання трикутника відбувається навколо осі 0Z в сторону, яка зворотна напрямку відліку кута φ. Тому вектор ω_e направлений по осі OZ вниз.

Вектор v_e направлений по дотичні до кола L в сторону обертання тіла.

Модуль абсолютної швидкості точки М

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{65.2^2 + 9.3^2} = 65.9 см/с$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричні сумі відносного, переносного і прискорення Коріоліса:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_e^в + \vec{a}_e^ц + \vec{a}_c$$

Модуль відносного дотичного прискорення

$$a_{r\tau} = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = 72\pi^2 \cos 3\pi t$$

$$a_{r\tau}\left(t=\frac{2}{9}\right)=72\cdot\pi^2\cdot\cos\left(3\cdot\pi\cdot\frac{2}{9}\right)=-355\text{см}/\text{с}^2$$

Від'ємний знак $a_{r\tau}$ вказує, що вектор $a_{r\tau}$ направлений в сторону від'ємних значень s_r. Знаки v_r і $a_{r\tau}$ однакові; відповідно, відносний рух точки М прискорений.

Відносне доцентрове прискорення

$$a_{rn}=\frac{v_r^2}{\rho}=0,$$

так як траєкторія відносного руху – пряма ($\rho=\infty$).

Модуль переносного обертового прискорення

$$a_e^{в}=R\varepsilon_e=10\cdot 10.2=102\text{см}/\text{с}^2$$

Модуль кутового прискорення тіла D:

$$\varepsilon_e=\frac{d^2\varphi_e}{dt^2}=1.8-54t$$

$$\varepsilon_e\left(t=\frac{2}{9}\right)=1.8-54\cdot\frac{2}{9}=-10.2\text{рад}/\text{с}^2$$

Знаки ε_e і ω_e однакові; відповідно, обертання трикутника D прискорене, напрямок векторів ω_e і ε_e співпадають.

Вектор $a_e^{в}$ направлений в ту ж сторону, що і v_e.

Модуль переносного центробіжного прискорення

$$a_e^{ц}=R\omega_e^2=10\cdot 0.93^2=9\text{см}/\text{с}^2$$

Вектор $a_e^{ц}$ направлений до центра кола L.

Прискорення Коріоліса

$$\vec{a}_c=2\vec{\omega}_e\times\vec{v}_r$$

Модуль прискорення Коріоліса

$$a_c=2\omega_e v_r\sin\left(\vec{\omega}_e,\vec{v}_r\right)=2\cdot 0.93\cdot 65.2\cdot\sin 150^0=61\text{см}/\text{с}^2$$

Вектор a_c направлений згідно правилу векторного добутку.

Модуль абсолютного прискорення точки М знаходимо методом проекцій:

$$a_x=a_e^{в}+a_c=102+61=163\text{см}/\text{с}^2$$

$$a_y=-a_e^{ц}-a_{r\tau}\cos 60^0=-9-355\cos 60^0=-186\text{см}/\text{с}^2$$

$$a_z=-a_{r\tau}\cos 30^0=-355\cos 30^0=-308\text{см}/\text{с}^2$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{163^2+(-186)^2+(-308)^2}=395\text{см}/\text{с}^2$$

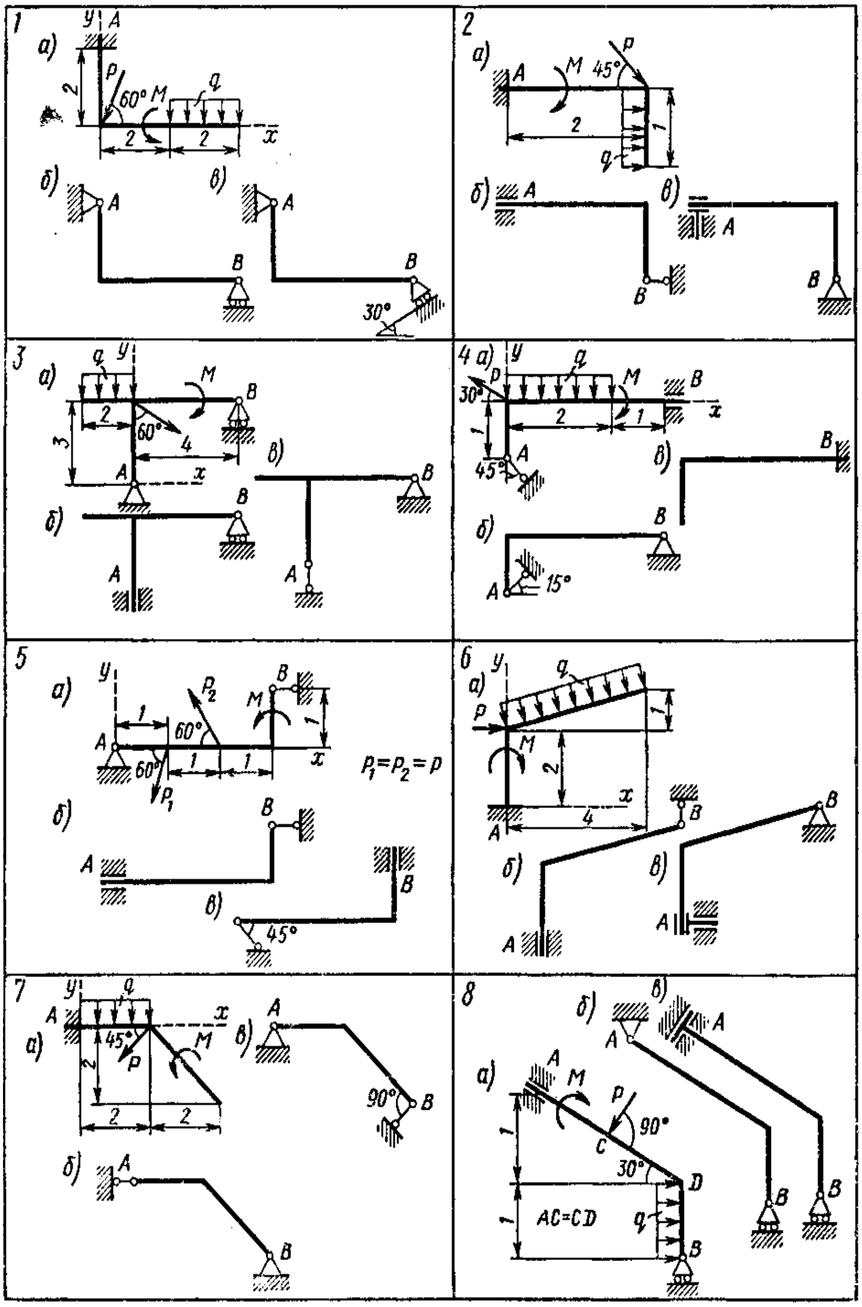
Завдання для розрахунково-графічних робіт

С.1. Визначення реакцій опор твердого тіла

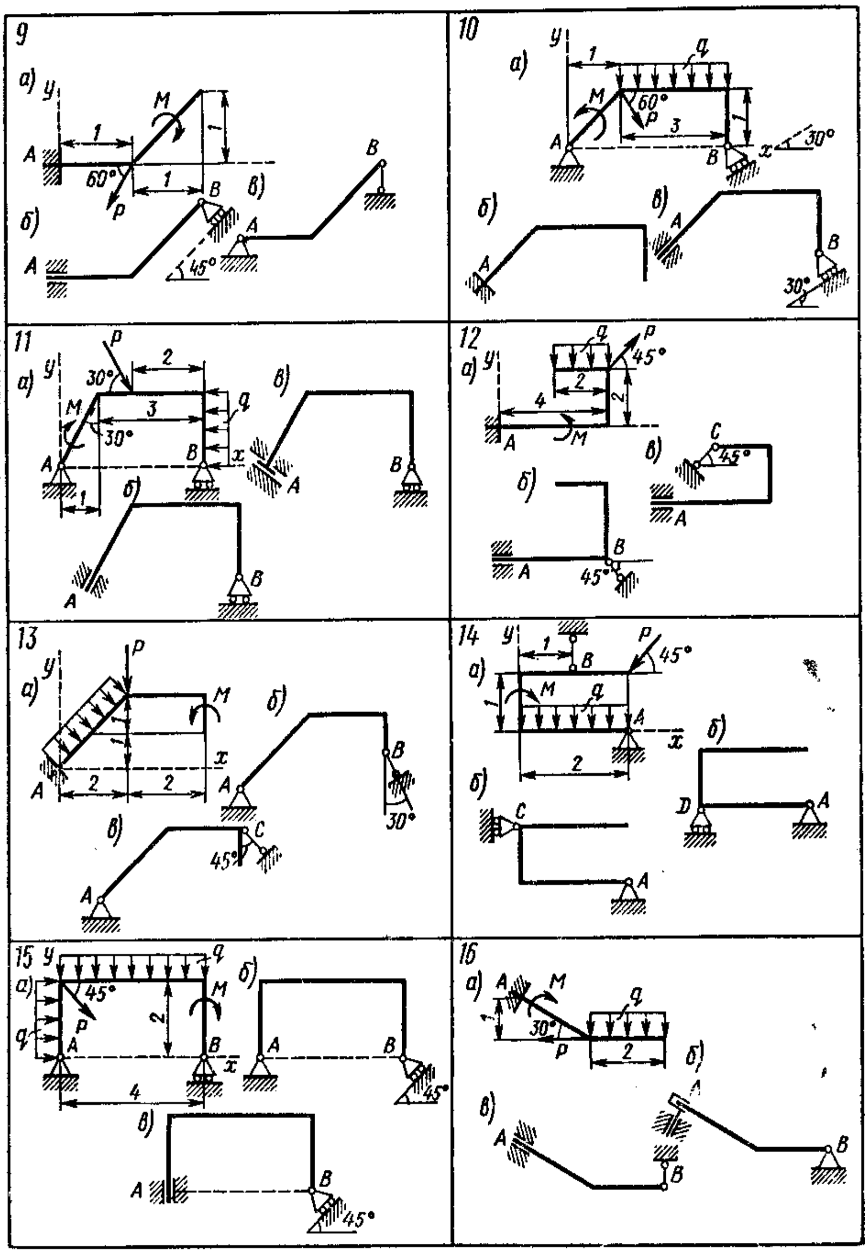
На схема показані три способи закріплення бруса, вісь якого – ломана лінія. Задане навантаження і розміри у всіх трьох випадках однакові.

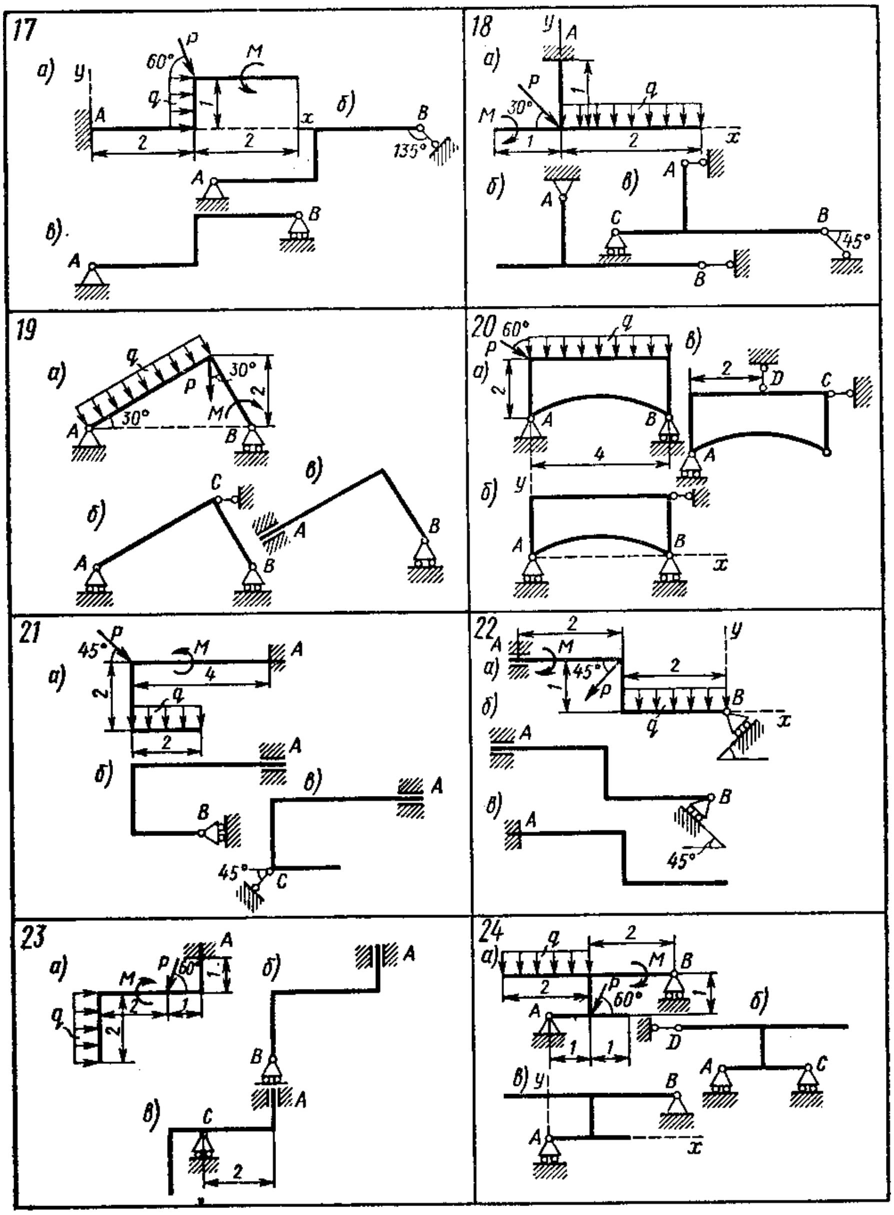
Визначити реакції опор для того способу закріплення бруса, при якому невідома реакція спільна для всіх трьох схем буде мати найменший модуль.

Номер варіанта	P, кН	M, кНм	q, кН/м
1	10	6	2
2	20	5	4
3	15	8	1
4	5	2	1
5	10	4	1
6	6	2	2
7	2	4	4
8	20	10	2
9	10	6	1
10	2	4	2
11	4	10	2
12	10	5	3
13	20	12	2
14	15	4	2
15	10	5	3
16	12	6	2
17	20	4	1
18	14	4	4
19	16	6	2
20	10	10	1



1
а)
б)
в)
y
A
P
60°
M
q
x
2
2
2
B
30°
2
а)
б)
в)
A
M
45°
P
2
1
q
B
3
а)
б)
в)
q
y
M
B
2
60°
3
4
A
x
4 а)
б)
в)
y
q
M
B
30°
P
x
2
1
1
A
45°
15°
5
а)
б)
в)
y
P_2
B
M
1
60°
A
P_1
60°
1
1
x
$P_1=P_2=P$
45°
6
а)
б)
в)
y_1
q
P
M
2
1
4
x
A
B
7
а)
б)
в)
y
q
A
x
45°
P
M
2
2
2
90°
B
8
а)
б)
в)
A
M
P
90°
C
30°
D
1
1
AC=CD
q
B

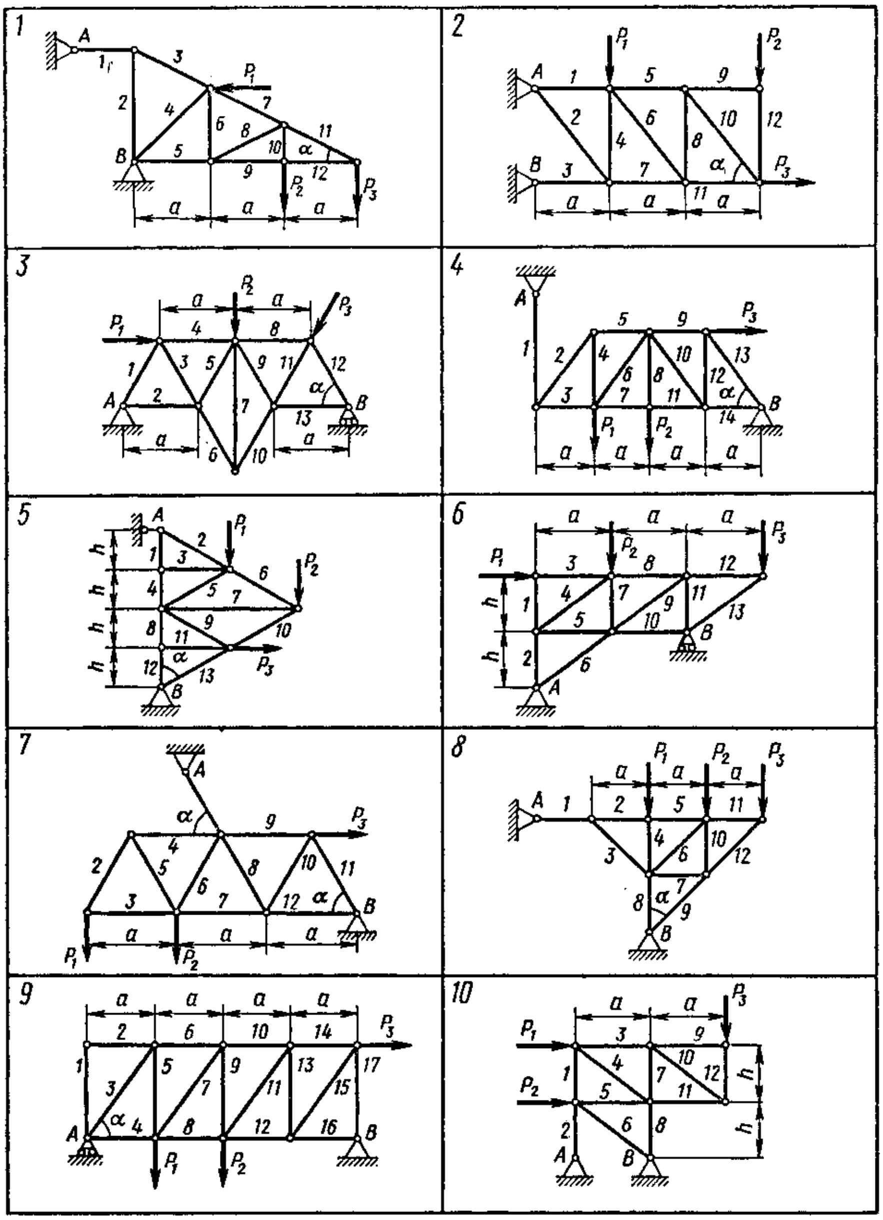

9
а) y A 1 M 1 60° P 1 B в) B A
б) A 45°
10
а) y 1 q M 60° P 3 1 A B x 30°
б) A в) A B 30°
11
а) y P 30° 2 M 3 q 30° A B x 1 в) A B
б) A B
12
а) y q P 45° 2 2 4 A M
в) C 45° A
б) B A 45°
13
а) y P M 1 1 x A 2 2 б) A B 30°
в) A C 45°
14
y 1 B P 45° а) M q 1 A x 2 б) D A
б) C A
15
y q а) P 45° q 2 M A B x 4 б) A B 45°
в) A B 45°
16
а) A M q 1 30° P 2 б) A B
в) A B

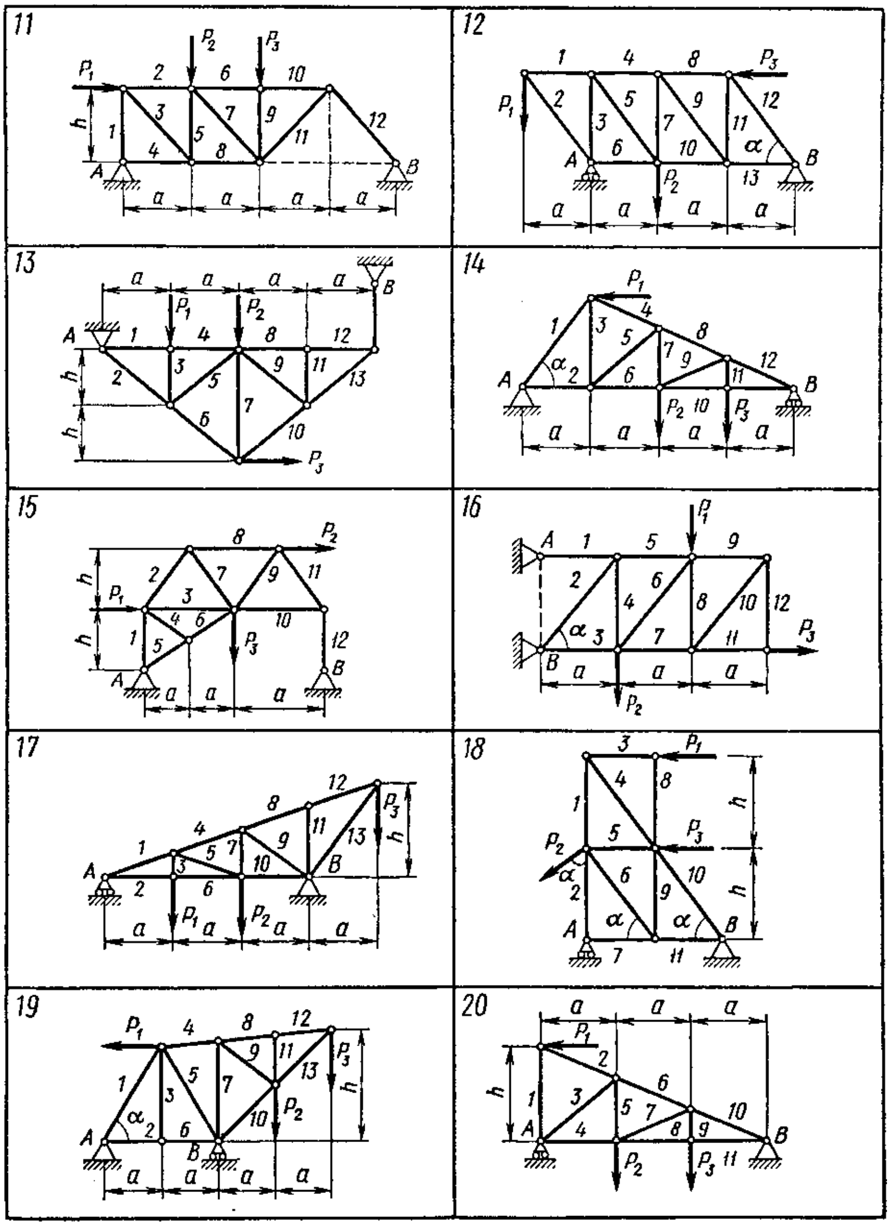

17
а)
б)
в)
60°
135°
18
а)
б)
в)
30°
45°
19
а)
б)
в)
30°
20
а)
б)
в)
60°
21
а)
б)
в)
45°
22
а)
б)
в)
45°
23
а)
б)
в)
60
24
а)
б)
в)
60°

С.2. Визначення реакцій опор і сил в стержнях плоскої ферми

Визначити реакції опор ферми від заданого навантаження, а також сили у всіх стержнях способом вирізання вузлів.

Номер варіанта	P_1	P_2	P_3	a	h	α, град
	кН			м		
1	4	9	2	2.0	2.0	30
2	10	3	4	2.5	3.0	60
3	2	12	6	3.0	3.3	60
4	10	10	5	4.0	3.0	60
5	2	4	2	4.0	3.6	60
6	3	7	5	4.0	6.0	60
7	4	6	3	3.2	6.0	45
8	5	7	7	5.0	5.0	60
9	10	8	2	4.4	10.0	60
10	3	4	5	2.5	6.0	60
11	2	6	8	4.0	9.0	60
12	5	7	2	4.8	3.3	60
13	4	6	2	3.0	3.0	60
14	3	5	5	4.0	2.0	45
15	2	2	10	5.0	2.0	45
16	5	6	2	4.0	3.0	30
17	4	4	10	5.0	3.3	45
18	5	2	8	4.0	3.0	30
19	8	4	10	6.0	3.6	30
20	2	3	5	4.0	6.0	45

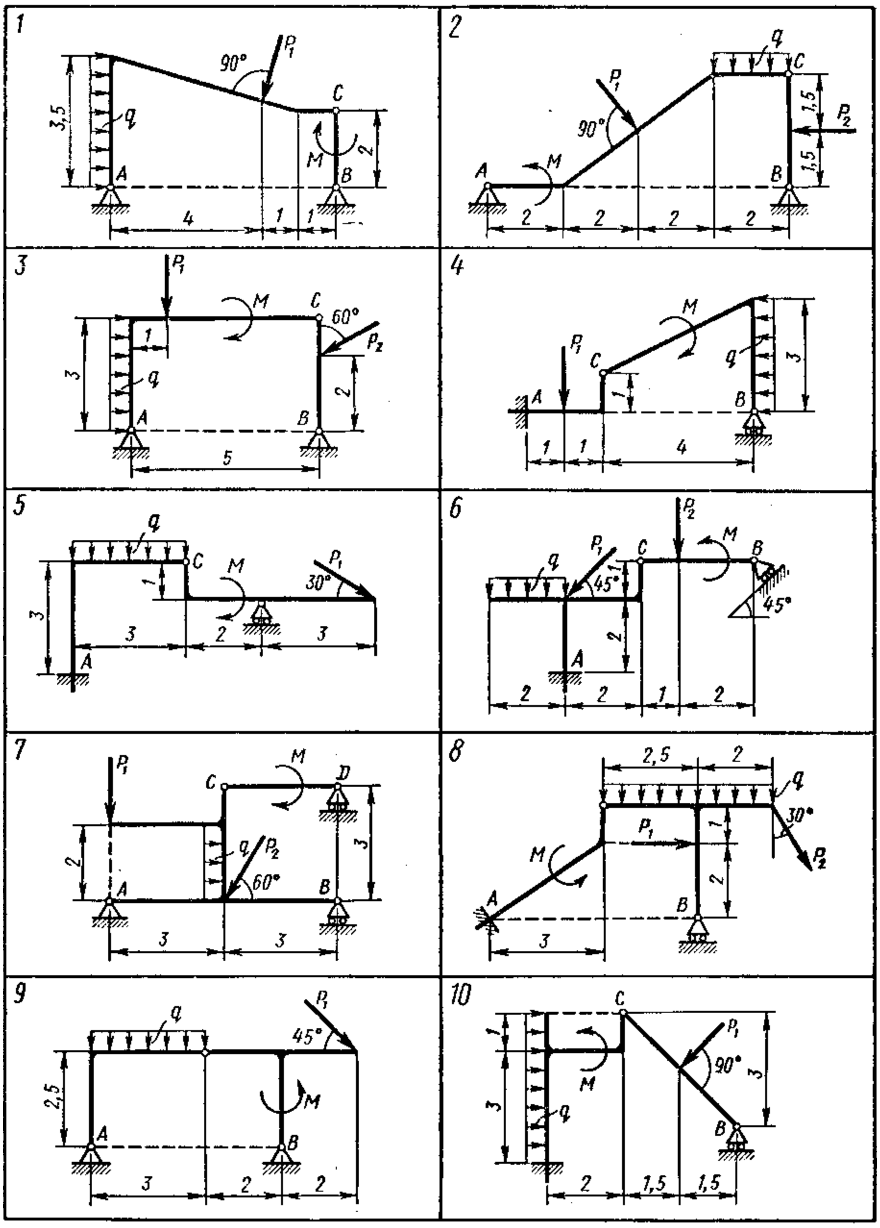

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

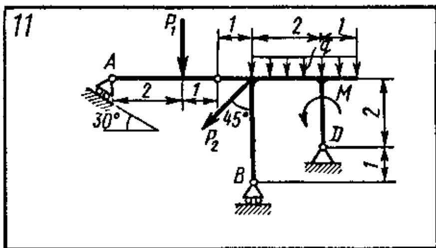

11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

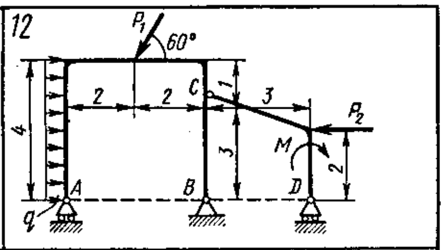
С.3. Визначення реакцій опор складеної конструкції

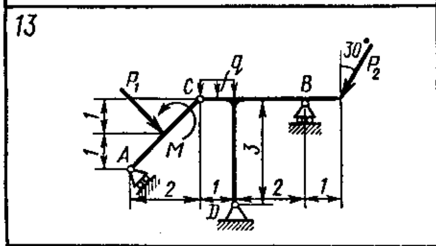
Конструкція складається з двох частин. Визначити реакції опор, а також з'єднання С

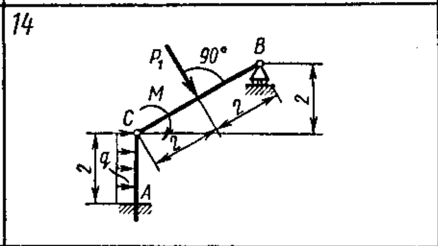
Номер варіанта	P_1	P_2	М, кНм	q, кН/м
	кН			
1	5.0	10.0	24.0	0.8
2	6.0	9.0	22.0	1.0
3	7.0	8.0	20.0	1.2
4	8.0	7.0	18.0	1.4
5	9.0	6.0	16.0	1.6
6	10.0	5.0	25.0	1.8
7	11.0	4.0	20.0	2.0
8	12.0	6.0	15.0	2.2
9	13.0	8.0	10.0	2.4
10	14.0	10.0	12.0	2.6
11	15.0	12.0	14.0	2.8
12	12.0	10.0	16.0	3.0
13	9.0	9.0	18.0	3.2
14	6.0	8.0	20.0	3.4
15	5.0	7.0	22.0	3.6
16	7.0	6.0	14.0	3.8
17	9.0	5.0	26.0	4.0
18	11.0	4.0	18.0	3.5
19	13.0	6.0	30.0	3.0
20	15.0	8.0	25.0	2.5

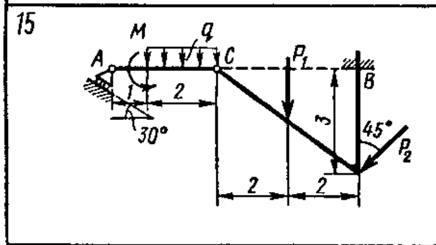


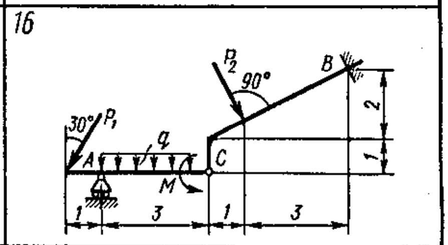

11

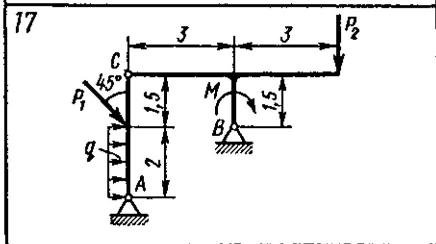

12

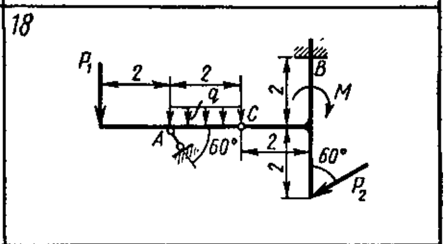

13

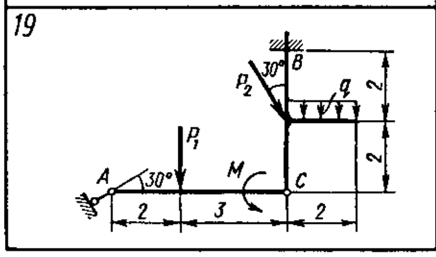

14

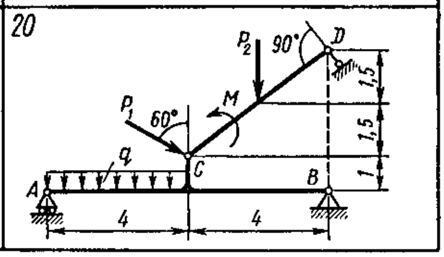

15


16


17


18

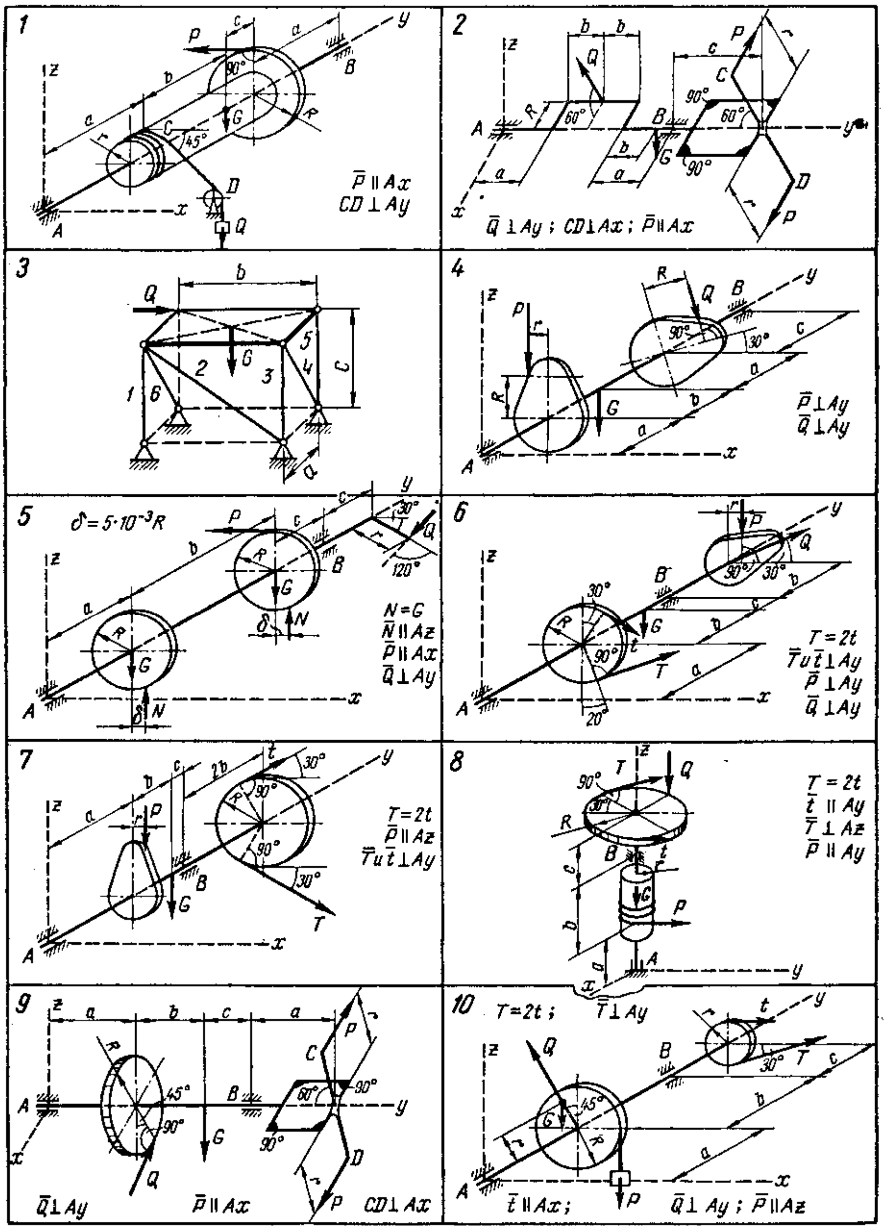

19

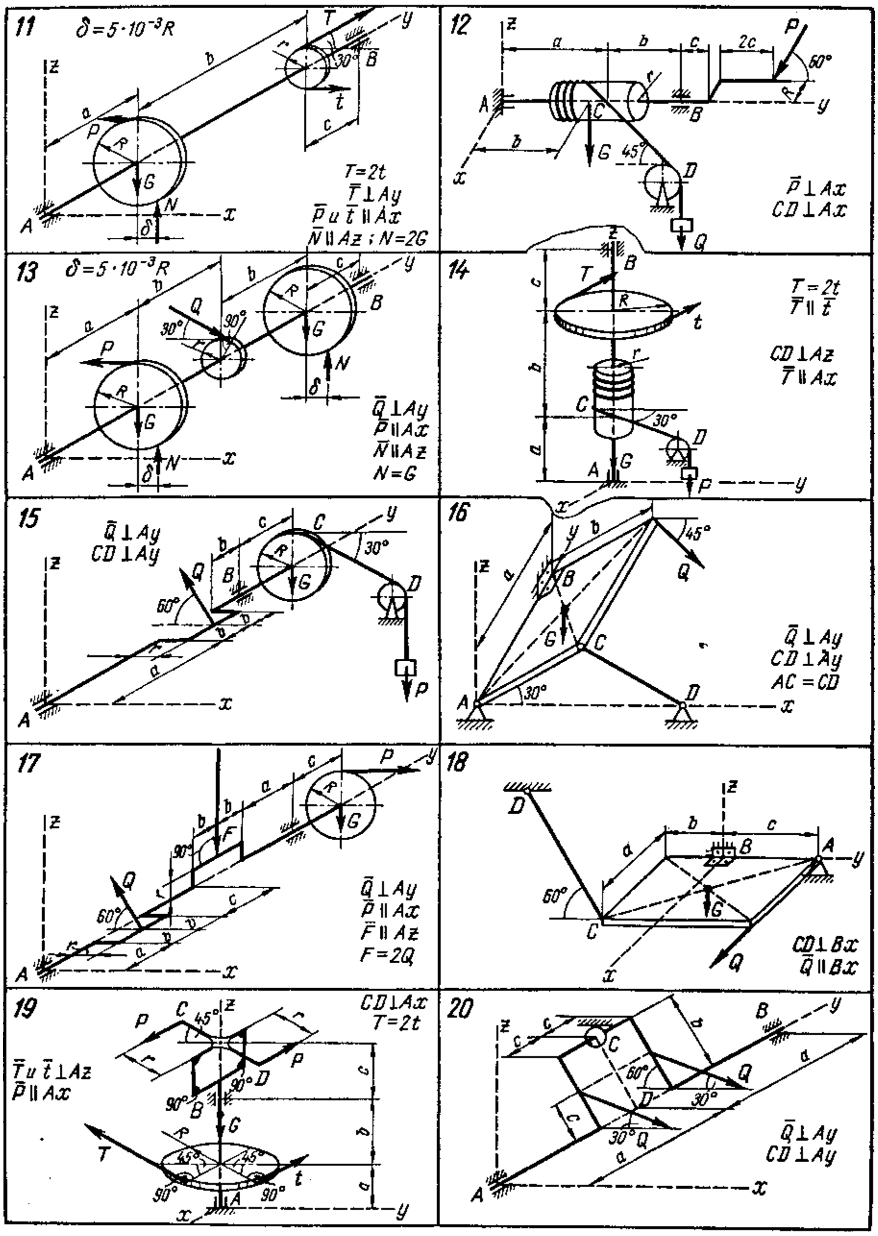

20

С.7. Визначення реакцій опор твердого тіла

Знайти реакції опор конструкції. Схеми конструкцій показані на рис., а необхідні для розрахунку дані приведені в табл.

Номер варіанта	Сили, кН			Розміри, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	4	20	20	30	10	15	5
2	4	3	2	20	10	30	10	10
3	20	6	18	40	40	45	15	10
4	3	4	2	30	20	40	20	15
5	5	2	3	30	40	20	20	10
6	1	2	2	40	30	20	18	6
7	4	8	1	30	10	5	20	10
8	5	4	3	20	40	15	30	40
9	1	4	3	20	15	10	20	10
10	4	3	2	30	40	20	15	10
11	10	6	1	20	30	15	15	10
12	3	4	1	25	20	8	25	15
13	4	2	5	40	30	20	30	10
14	2	2	1	30	90	20	20	5
15	6	8	2	60	20	40	20	5
16	4	4	2	50	30	20	20	15
17	2	4	1	15	10	60	15	10
18	5	3	2	60	40	40	15	5
19	10	6	2	20	30	20	10	10
20	35	4	5	60	40	30	15	10


1
P ∥ Ax
CD ⊥ Ay
2
Q ⊥ Ay ; CD ⊥ Ax ; P ∥ Ax
3
4
P ⊥ Ay
Q ⊥ Ay
5
δ = 5·10⁻³R
N = G
N ∥ Az
P ∥ Ax
Q ⊥ Ay
6
T = 2t
T и t ⊥ Ay
P ⊥ Ay
Q ⊥ Ay
7
T = 2t
P ∥ Az
T и t ⊥ Ay
8
T = 2t
t ∥ Ay
T ⊥ Az
P ∥ Ay
9
Q ⊥ Ay
P ∥ Ax
CD ⊥ Ax
10
T = 2t ; T ⊥ Ay
t ll Ax;
Q ⊥ Ay ; P ∥ Az

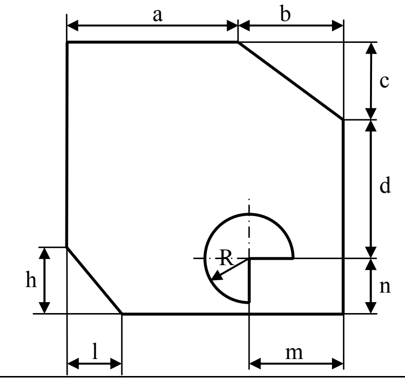

11
δ=5·10⁻³R
T=2t
T̄ ⊥ Ay
P̄ и t̄ ∥ Ax
N̄ ∥ Az ; N=2G
12
P̄ ⊥ Ax
CD ⊥ Ax
13
δ=5·10⁻³R
Q̄ ⊥ Ay
P̄ ∥ Ax
N̄ ∥ Az
N=G
14
T̄=2t
T̄ ∥ t̄
CD ⊥ Az
T̄ ∥ Ax
15
Q̄ ⊥ Ay
CD ⊥ Ay
16
Q̄ ⊥ Ay
CD ⊥ Ay
AC = CD
17
Q̄ ⊥ Ay
P̄ ∥ Ax
F̄ ∥ Az
F=2Q
18
CD ⊥ Bx
Q̄ ∥ Bx
19
CD ⊥ Ax
T=2t
T̄ и t̄ ⊥ Az
P̄ ∥ Ax
20
Q̄ ⊥ Ay
CD ⊥ Ay

С.8. Визначення положення центра ваги тіла

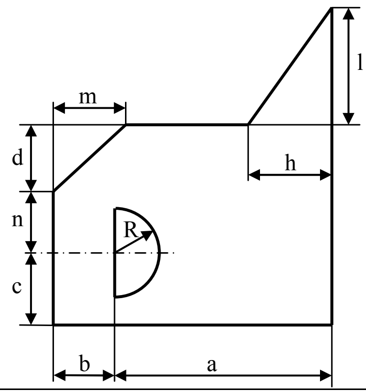
Визначити координати центра ваги плоскої фігури показаної на рис. Розмір а указаний в табл., всі інші розміри пропорційні розміру а.

№ п/п	а, см
01	6
02	8
03	10
04	12
05	14
06	16
07	18
08	20
09	22
10	24
11	26
12	28
13	30
14	32
15	34
16	36
17	38
18	40
19	42
20	44

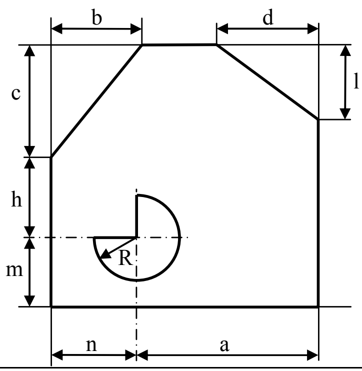
1


a
b
c
d
n
m
l
h
R

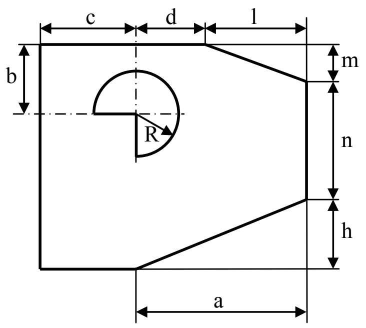
2


l
m
d
h
n
R
c
b
a

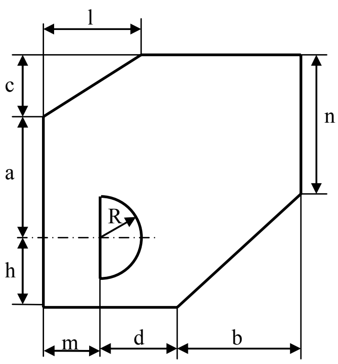
3


b
d
l
c
h
m
R
n
a

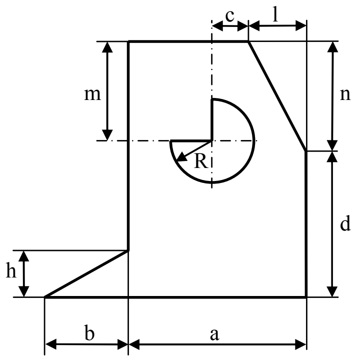
4


c
d
l
m
b
R
n
h
a

5

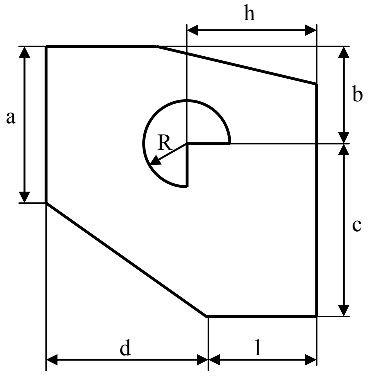

l
c
n
a
R
h
m
d
b

6

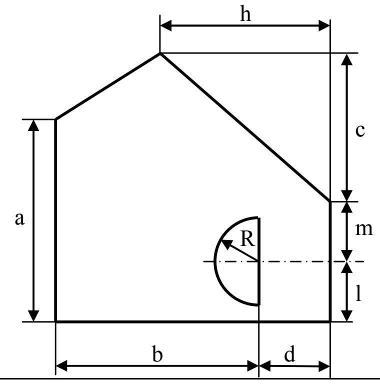

c
l
m
n
R
d
h
b
a

7

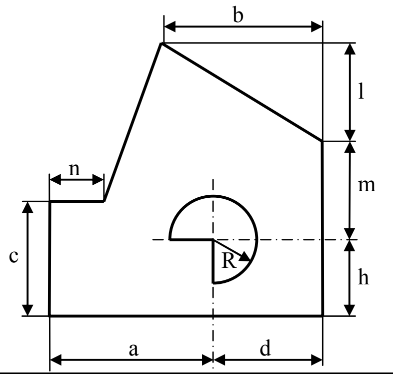
8



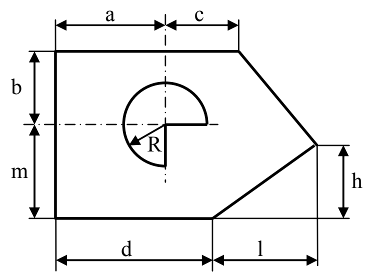
9



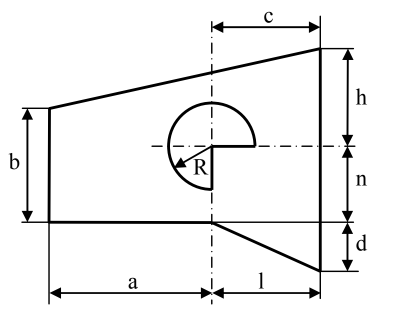
10



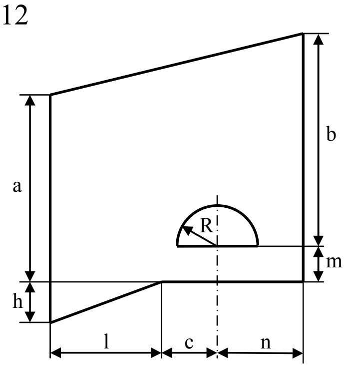
11



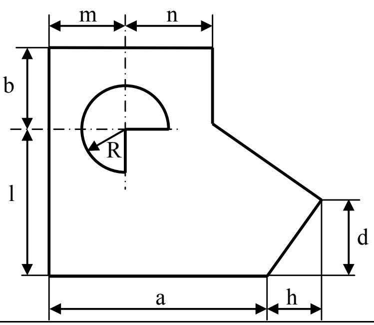
12

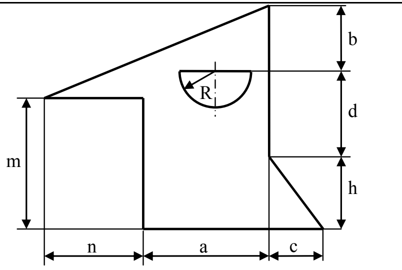


13

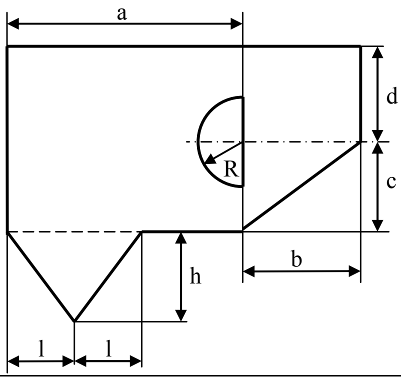


14

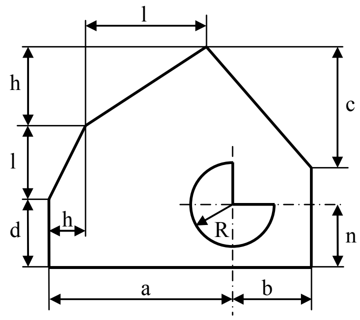

m
n
b
R
l
d
a
h


b
R
d
m
h
n
a
c

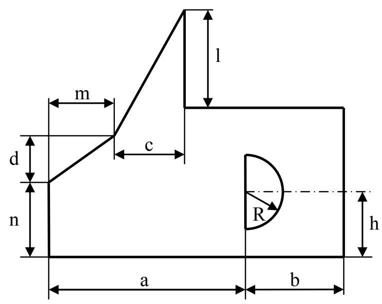
15


a
d
R
c
h
b
l
l

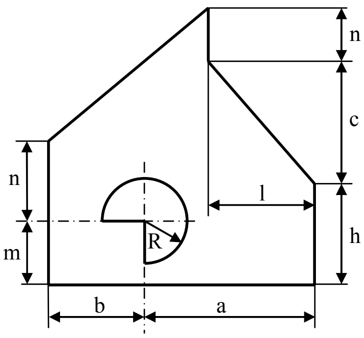
16


l
h
c
l
d
h
R
n
a
b

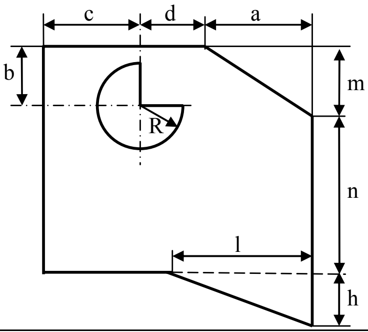
17


l
m
c
d
n
R
h
a
b

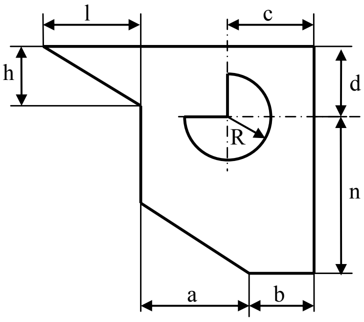
18


n
c
n
l
R
m
h
b
a

19



20



К.1. Визначення швидкості і прискорення точки по заданим рівнянням її руху.

По заданим рівнянням руху точки М встановити вид її траєкторії і для моменту часу t (с) найти положення точки на траєкторії, її швидкість, повне, дотичне і доцентрове, а також радіус кривизни траєкторії.

№ варіанта	A	B	C	D	k
01	4	1	5	2	π/3
02	-5	2	6	3	π/4
03	6	-3	-7	4	π/5
04	7	-4	-8	-5	π/4
05	-8	-5	-9	-6	π/3
06	9	6	10	7	π/2
07	10	-7	39	8	π
08	-19	8	38	-9	π/4
09	-18	-9	-37	10	π/5
10	-17	-10	-36	-9	π/4
11	16	29	35	8	π/3
12	15	28	-34	7	π/2
13	-14	-27	33	6	π
14	-13	-26	32	-5	π/4
15	-12	-25	-31	-4	π/5
20	70	-20	35	25	π/3
21	40	10	-10	10	π
22	50	25	10	-30	π/5
23	64	16	-30	18	π/4
24	80	-40	36	50	π/3
25	-55	11	20	25	π/6

Варіант	x(t), y(t), см	t, c
01	$x=-At^2+C,\ y=-Dt$	1
02	$x = A\cos^2\left(\frac{kt}{3}\right),\ y = B\sin^2\left(\frac{kt}{3}\right)$	0.5
03	$x = -C\cos\left(\frac{kt^2}{3}\right),\ y = D\sin\left(\frac{kt^2}{3}\right)$	0.3
04	$x=At+B,\ y = -\frac{D}{t+1}$	2
05	$x = A\sin\left(\frac{kt}{3}\right),\ y = -B\cos\left(\frac{kt}{3}\right)+C$	1
06	$x=At^2+C,\ y=-Bt$	2
07	$x=3t^2-t+C,\ y = Dt^2 - \frac{D}{3}t - B$	1.5
08	$x = B\sin\left(\frac{kt^2}{6}\right),\ y = A - C\cos\left(\frac{kt^2}{6}\right)$	4
09	$x = -\frac{A}{t+B}$, $y=At+2B$	2
10	$x = -D\cos\left(\frac{kt}{3}\right),\ y = -C\sin\left(\frac{kt}{3}\right) - D$	1
11	$x=At^2+D,\ y=-Bt$	1.5
12	$x = B\sin^2\left(\frac{kt}{6}\right),\ y = -B\cos^2\left(\frac{kt}{6}\right)$	1
13	$x = D\cos\left(\frac{kt^2}{3}\right),\ y = -D\sin\left(\frac{kt^2}{3}\right)$	1
14	$x=-At-C,\ y = -\frac{A}{t+1}$	0.5
15	$x = B\cos\left(\frac{kt}{3}\right),\ y = -D\sin\left(\frac{kt}{3}\right)$	2
16	$x=At,\ y=Bt^2-D$	1

17	$x = C\sin^2\left(\frac{kt}{6}\right) - D$, $y = -A\cos^2\left(\frac{kt}{6}\right)$	1
18	$x = A + B\cos\left(\frac{kt}{3}\right)$, $y = C\sin\left(\frac{kt}{3}\right) + D$	1
19	$x=-Dt^2-C$, $y=At$	0.5
20	$x=B-Ct-At^2$, $y=C-Ct-At^2$	1

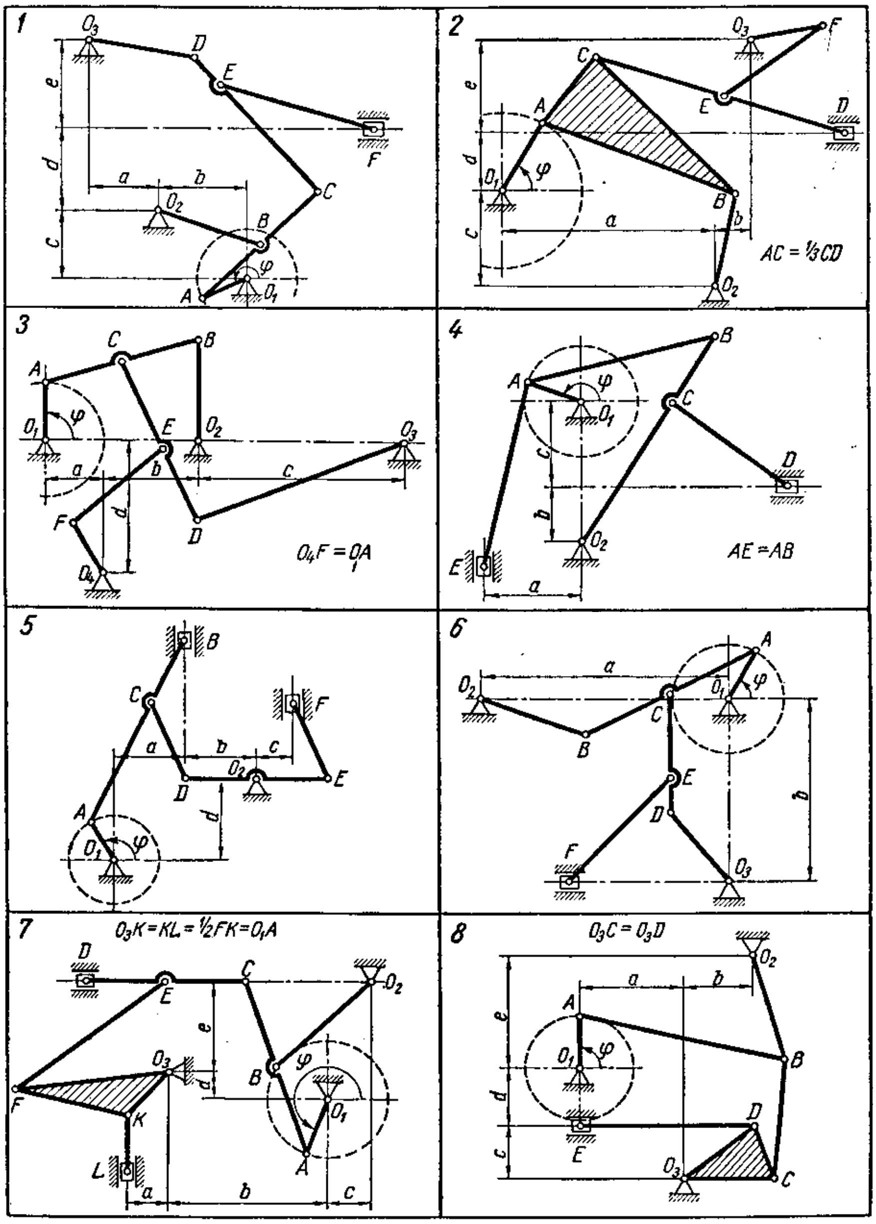
К.4. Кінематичний аналіз багатоланкового механізму

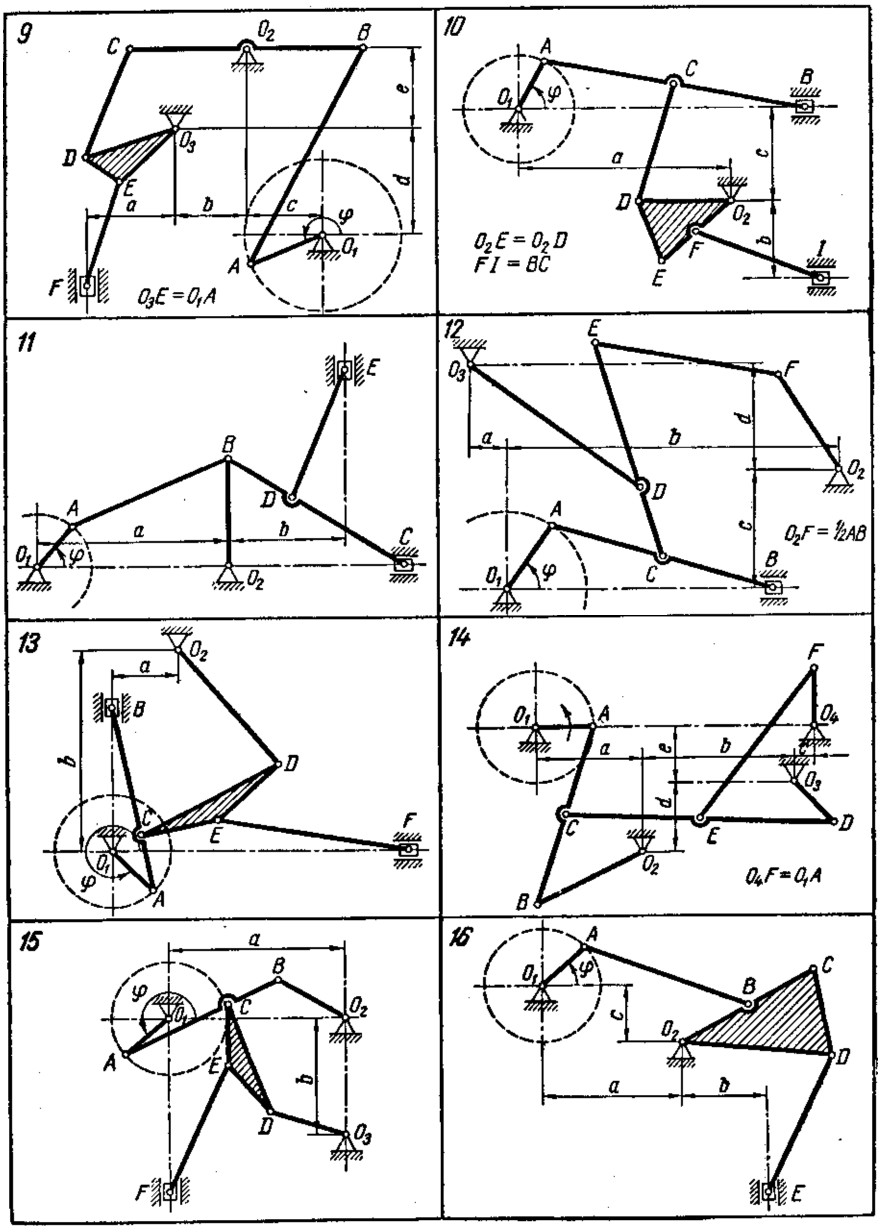
Кривошип O_1A обертається з постійною кутовою швидкістю ω_{O_1A} =2рад/с. Визначити для заданого положення механізму:

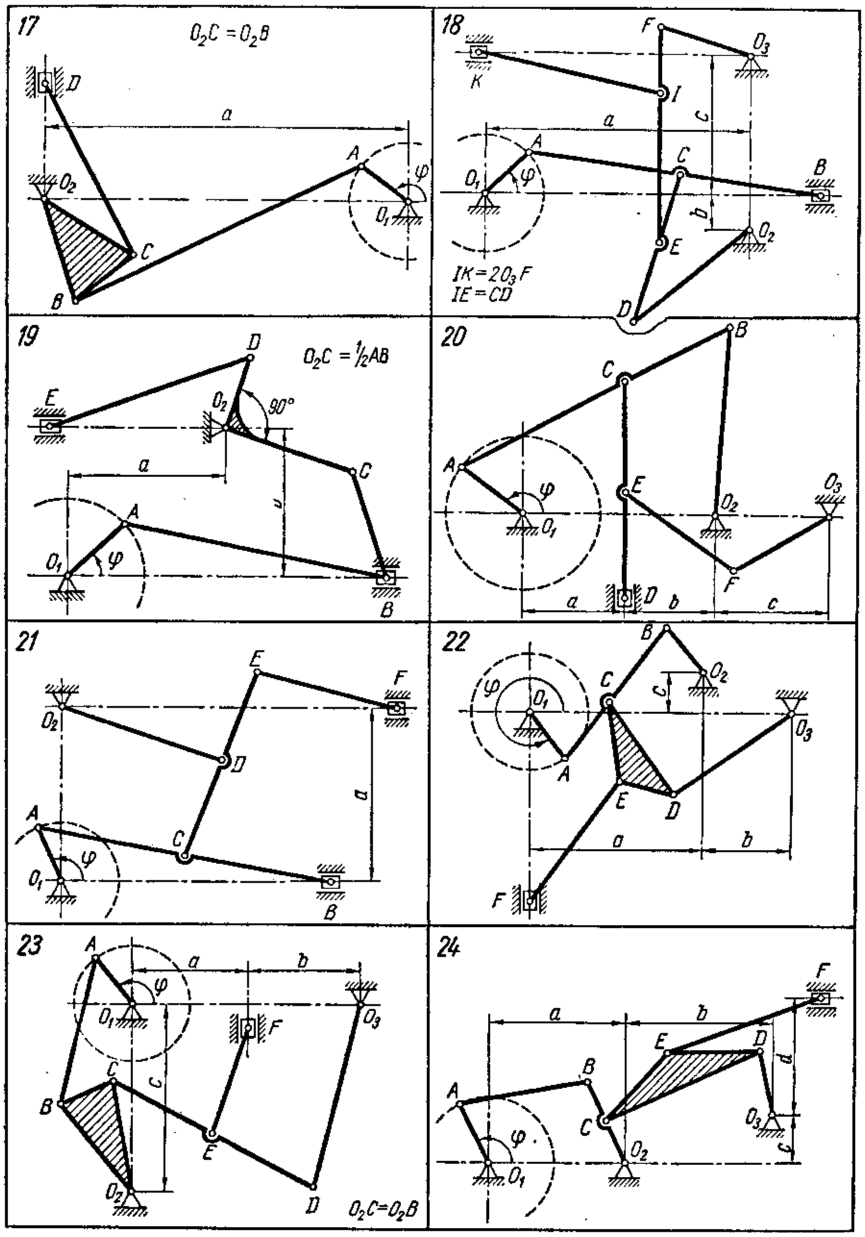
1) швидкості точок A, B, C, ... механізму і кутові швидкості всіх його ланок за допомогою плану швидкостей;
2) швидкості цих точок механізму і кутові швидкості ланок за допомогою миттєвого центру швидкостей;
3) прискорення точок A і B і кутове прискорення ланки AB;
4) положення миттєвого центру прискорень ланки AB;
5) прискорення точки M, яка ділить ланку AB по половині.

Номер варіанта	φ, град	Відстані, см				
		a	b	c	d	e
01	200	18	23	18	22	23
02	60	56	10	26	16	25
03	90	15	25	54	35	24
04	155	26	15	23	22	30
05	125	19	19	10	7	21
06	60	65	49	11	15	15
07	250	11	42	14	28	23
08	90	27	18	20	28	25
09	200	23	19	25	18	24
10	20	55	21	32	31	30
11	50	50	30	6	32	21
12	55	10	86	15	40	15
13	315	17	54	37	7	23
14	0	28	40	30	22	25
15	220	46	31	11	16	24
16	40	36	22	50	35	30
17	145	96	9	13	22	21
18	45	70	39	36	7	15
19	40	42	24	32	15	23
20	145	27	23	35	28	25

Номер варіанта	Довжини ланок, см										
	O_1A	O_2B	O_2D	O_3D	O_3F	AB	BC	CD	CE	DE	EF
01	14	28	19	28	20	21	21	48	38	38	42
02	21	25	24	58	41	54	52	69	35	45	32
03	15	28	40	24	25	42	21	47	26	11	31
04	15	65	40	23	30	51	22	38	23	17	22
05	12	29	39	25	19	55	19	23	21	37	39
06	15	34	20	55	20	50	25	32	60	22	49
07	16	29	45	15	41	25	25	42	22	17	29
08	14	31	30	20	25	55	32	15	35	40	12
09	21	29	19	38	30	65	62	31	17	57	49
10	15	31	19	50	19	70	35	33	19	15	50
11	14	20	24	17	20	45	54	34	29	25	50
12	21	20	40	50	41	60	30	19	52	48	37
13	15	28	40	15	25	50	35	40	22	45	57
14	15	50	39	75	30	50	25	70	30	26	35
15	15	15	20	28	19	45	15	31	25	38	38
16	15	30	45	58	20	45	20	24	35	45	40
17	15	23	30	24	41	84	20	51	35	11	30
18	16	40	19	23	25	78	38	41	20	17	44
19	20	30	19	25	30	71	30	58	38	37	51
20	20	16	24	55	19	80	32	26	35	22	29


1
2
AC = 1/3 CD
3
O4F = O1A
4
AE = AB
5
6
7
O3K = KL = 1/2 FK = O1A
8
O3C = O3D

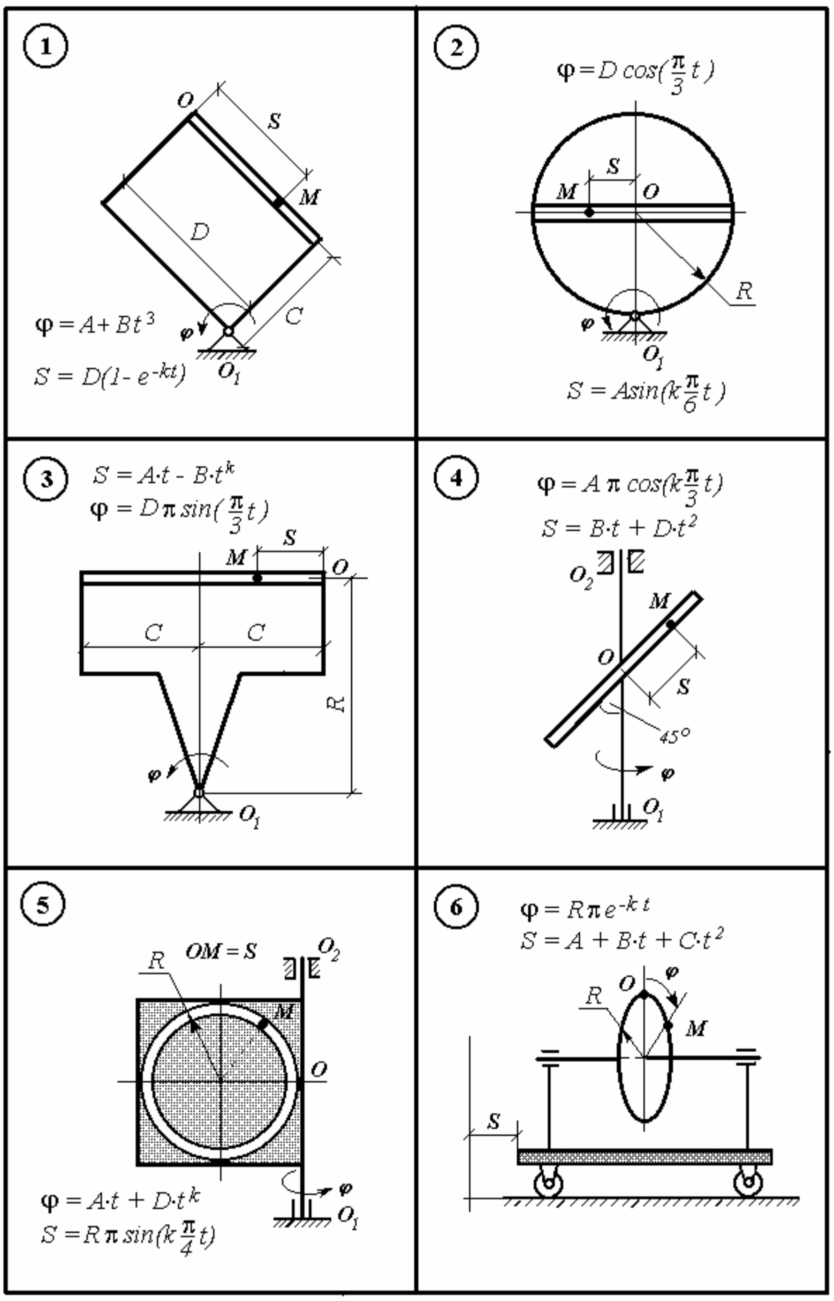

9
C
O_2
B
e
O_3
D
E
a
b
c
d
φ
O_1
A
F
$O_3E = O_1A$
10
A
C
B
O_1
φ
a
c
D
O_2
$O_2E = O_2D$
$FI = BC$
F
b
I
E
11
E
B
D
A
a
b
C
O_1
φ
O_2
12
E
O_3
F
a
b
d
O_2
D
A
c
$O_2F = 1/2 AB$
O_1
φ
C
B
13
O_2
a
B
b
D
C
E
F
O_1
φ
A
14
F
O_1
A
O_4
a
e
b
O_3
d
C
E
D
O_2
$O_4F = O_1A$
B
15
a
B
φ
O_1
C
O_2
A
E
b
D
O_3
F
16
A
O_1
φ
C
B
c
O_2
D
a
b
E


17
$O_2C = O_2B$
18
$IK = 2O_3F$
$IE = CD$
19
$O_2C = \frac{1}{2}AB$
90°
20
21
22
23
$O_2C = O_2B$
24

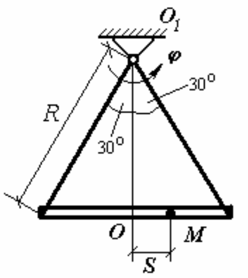
К.7. Визначення абсолютної швидкості і абсолютного прискорення точки при складному рухові

Точка M рухається відносно тіла D. По заданим рівнянням відносного руху точки M і руху тіла D визначити для моменту часу t абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M.

№	A	B	C	D	R	k	t
вар.	см						с
1	28	12	16	12	15	2	0.5
2	14	8	12	6	12	1.5	1
3	15	4	9	2	8	1	0.4
4	10	4	8	6	6	2	0.3
5	8	5	14	10	10	1.5	2
6	16	11	6	8	14	3	0.6
7	12	2	9	5	10	1	0.5
8	7	5	12	4	8	2	0.8
9	14	10	6	5	12	1.5	1
10	9	6	5	2	4	1	0.4
11	26	10	14	11	14	1.5	0.6
12	24	6	10	10	13	2	0.7
13	22	8	11	9	11	2.5	0.8
14	20	6	12	8	10	3	0.9
15	18	3	10	7	9	2.5	0.8
16	16	7	8	5	7	2	0.7
17	13	8	7	4	8	1.5	0.6
18	9	7	8	3	9	1	0.5
19	12	4	10	4	11	1.5	0.4
20	14	5	11	5	12	2	0.5


1
O
S
M
D
C
φ = A + Bt^3
φ
S = D(1 - e^-kt)
O1
2
φ = D cos(π/3 t)
S
M
O
R
φ
O1
S = Asin(k π/6 t)
3
S = A·t - B·t^k
φ = D π sin(π/3 t)
S
M
O
C
C
R
φ
O1
4
φ = A π cos(k π/3 t)
S = B·t + D·t^2
O2
M
O
S
45°
φ
O1
5
OM = S
R
O2
M
O
φ
O1
φ = A·t + D·t^k
S = R π sin(k π/4 t)
6
φ = R π e^-kt
S = A + B·t + C·t^2
R
O
φ
M
S

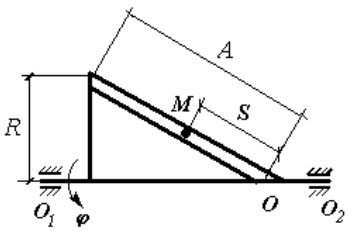
7



$S = D\pi \sin(\frac{\pi}{4}t)$ $\varphi = B + C \cdot t^k$

8

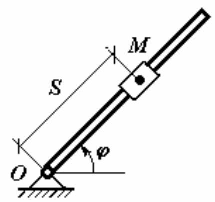
$\varphi = C - D\cos(\frac{\pi}{3}t)$



$S = B(2 - e^{-kt})$

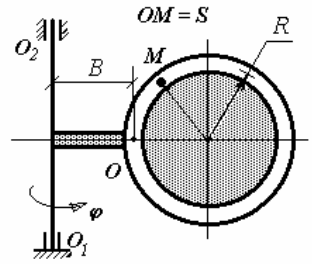
9

$\varphi = D\cos(\frac{\pi}{3}t)$



$S = A + Be^{kt}$

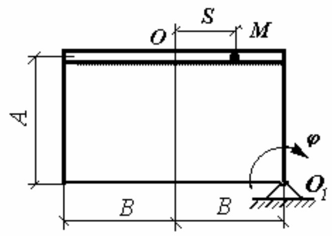
10



$S = R\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{6}t)$ $\varphi = C \cdot t + D \cdot t^k$

11

$\varphi = C - D \cdot e^{-kt}$

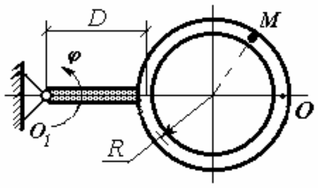


$S = B(1 - \cos(k\frac{\pi}{6}t)$

12

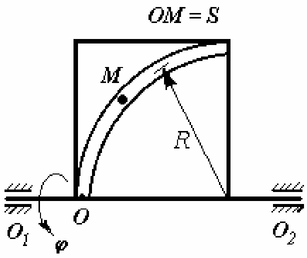
$S = R\pi t^k$

$\varphi = A \cdot t + C \cdot \sin(\frac{\pi}{3}t)$



$OM = S$

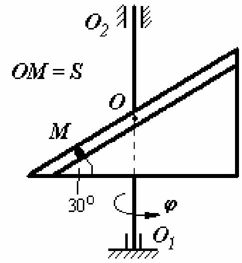
(13)



$S = R\pi(1 - e^{-kt}), \quad \varphi = D - At^3$

(14)

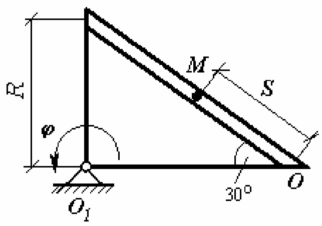
$S = B\cos(\frac{\pi}{6} t)$



$\varphi = At + Dt^k$

(15)

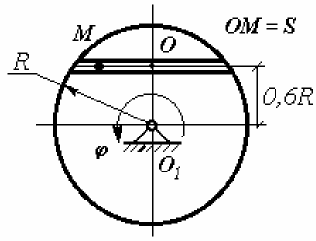
$S = A + k \cdot t^2$



$\varphi = B(1 - e^{-0,5t})$

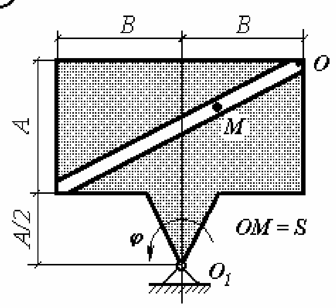
(16)

$S = B \cdot (1 - \sin \pi t)$



$\varphi = D\pi\cos(k\frac{\pi}{4} t)$

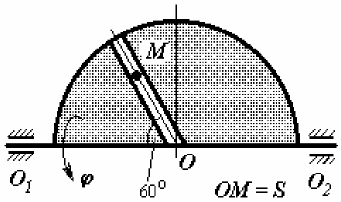
(17)



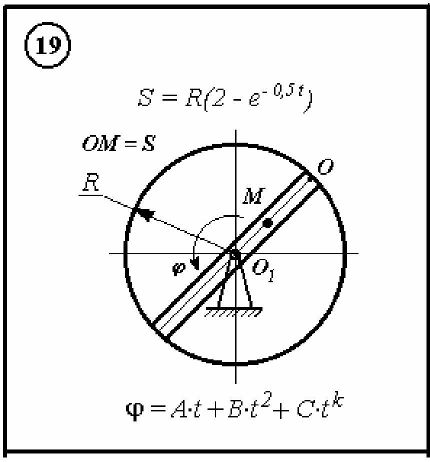
$\varphi = D \cdot t^3 - C, \quad S = 2B \cdot (1 - e^{-kt})$

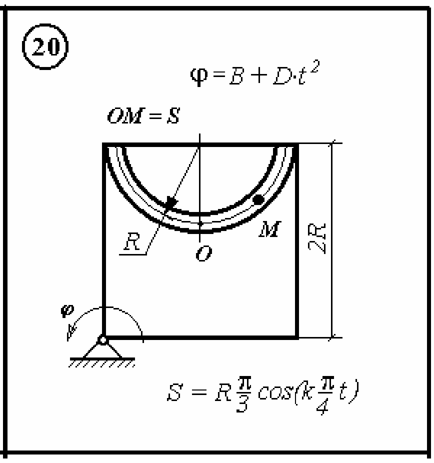
(18)

$\varphi = D \cdot \sin(\frac{\pi}{3} t),$



$S = A \cdot t + Be^{kt}$


19
$S = R(2 - e^{-0,5t})$
$OM = S$
R
M
O
φ
O_1
$\varphi = A \cdot t + B \cdot t^2 + C \cdot t^k$


20
$\varphi = B + D \cdot t^2$
$OM = S$
R
O
M
$2R$
φ
$S = R\frac{\pi}{3}\cos(k\frac{\pi}{4}t)$

Література

1. Приятельчук В.О., Риндюк В.І., Федотов В.О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання. Навчальний посібникю – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 108 с.
2. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики. В 2-х томах / Наука. -М: 1979. - т. 1: Статика и кинематика. - 272с.
3. Методичні вказівки до дослідження кінематичного руху точки / Укладач В.О. Приятельчук. - Вінниця: ВПІ, 1992. - 32с.
4. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. - К.: Техніка, 2002 - 512с.
5. Сборник заданий для курсових работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов/ А.А.Яблонский, С.С.Норейко, С.А.Вольфзон й др. / Под ред. А.А.Яблонского. - 4-е изд. Перераб. и доп. – М.: ВШ, 1985.-367с.
6. Федотов В.О., Грушко О.В. Збірник завдань для самостійної роботи з технічної механіки. Збірник завдань. - Вінниця: ВДТУ, 2002. - 111с.
7. Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки: Посібник. - К.: Вища школа.: Веселка, 1999. - 351с.