

Всеукраїнський науково-технічний журнал

Ukrainian Scientific & Technical Journal

ISSN 2306-8744

DOI: 10.37128/2306-8744-2020-4

# Вібрації в техніці та технологіях



**ВІБРАЦІЇ В  
ТЕХНІЦІ ТА  
ТЕХНОЛОГІЯХ**

Журнал науково-виробничого та навчального  
спрямування Видавець: Вінницький національний  
аграрний університет

Заснований у 1994 році під назвою "Вібрації в техніці та  
технологіях"

Свідоцтво про державну реєстрацію засобів масової  
інформації  
КВ № 16643-5115 ПР від 30.04.2010 р.

*Всеукраїнський науково-технічний журнал "Вібрації в техніці та  
технологіях" / Редколегія: Калетнік Г.М. (головний редактор) та інші. – Вінниця,  
2020. – 4 (99) – 113 с.*

*Друкується за рішенням Вченої ради Вінницького національного аграрного  
університету (протокол № від 18.12.2020 р.)*

*Періодичне видання включено до Переліку наукових фахових видань  
України з технічних наук (Категорія «Б» Наказ Міністерства освіти і науки  
України від 02.07.2020 р. № 886)*

**Головний редактор**

**Калетнік Г.М.** – д.е.н., професор,  
академік НААН, Вінницький національний  
аграрний університет

**Заступник головного  
редактора**

**Адамчук В.В.** – д.т.н., проф., акад. НААН,  
Національний науковий центр "Інститут  
механізації та електрифікації сільського  
господарства"

**Відповідальний секретар**

**Солона О.В.** – к.т.н., доц., Вінницький  
національний аграрний університет

**Члени редакційної колегії**

**Булгаков В.М.** – д.т.н., проф., акад. НААН,  
Національний університет біоресурсів і  
природокористування України

**Веселовська Н.Р.** – д.т.н., проф.,  
Вінницький національний аграрний  
університет

**Деревенько А.І.** – к.т.н., доцент,  
Національний університет «Львівська  
політехніка»

**Зінковський А.П.** – д.т.н., проф., Інститут  
проблем міцності імені Г. С. Писаренка  
НАН України

**Іскович-Лотоцький Р.Д.** – д.т.н., проф.,  
Вінницький національний технічний  
університет

**Купчук І.М.** – к.т.н., доцент, Вінницький  
національний аграрний університет

**Надуть В.П.** – д.т.н., проф., Інститут  
геотехнічної механіки імені М.С. Полякова  
НАН України

**Матвеев В.В.** – д.ф.-м.н., проф., академік  
НААН, Інститут проблем міцності імені Г.С.  
Писаренка НАН України

**Ольшанський В.П.** – д.ф.-м.н., проф.,  
Харківський національний технічний  
університет сільського господарства імені  
Петра Василенка

**Полєвода Ю.А.** – к.т.н., доцент, Вінницький  
національний аграрний університет

**Спірін А.В.** – к.т.н., доцент, Вінницький  
національний аграрний університет

**Твердохліб І.В.** – к.т.н., доцент, Вінницький  
національний аграрний університет

**Токарчук О.А.** – к.т.н., доцент, Вінницький  
національний аграрний університет

**Цуркан О.В.** – д.т.н. доц., Вінницький  
національний аграрний університет

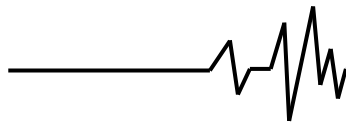
**Зарубіжні члени редакційної колегії**

**Джордан Тодоров Максимов** – д.т.н., проф., Технічний Університет Габрово (Болгарія)

Технічний редактор **Замрій М.А.**

Адреса редакції: 21008, Вінниця, вул. Сонячна 3, Вінницький національний аграрний  
університет, тел. 46 – 00– 03

Сайт журналу: <http://vibrojournal.vsau.org/> Електронна адреса: [vibration.vin@ukr.net](mailto:vibration.vin@ukr.net)

**Ольшанський В. П.**

д.ф.-м.н., проф.

**Сліпченко М. В.**

к.т.н., доцент

**Спольнік О. І.**

д.ф.-м.н., проф.

**Харківський національний  
технічний університет  
сільського господарства  
імені Петра Василенка****Токарчук О. А.**

к.т.н., доцент

**Вінницький національний  
аграрний університет****Olshanskiy V.****Slipchenko M.****Spolnik O.****Petro Vasilenko Kharkiv  
National Technical  
University of Agriculture****Tokarchuk O.****Vinnitsia National Agrarian  
University****УДК 534.1:539.3****DOI: 10.37128/2306-8744-2020-4-4****ПІСЛЯУДАРНІ КОЛИВАННЯ  
КВАДРАТИЧНОГО НЕЛІНІЙНОГО  
ДИСИПАТИВНОГО ОСЦИЛЯТОРА**

Осцилятор задемпфований в'язким лінійним опором, внаслідок миттєвого зростання його маси після удару, може стати дисипативною коливальною системою під дією сухого чи позиційного тертя. В наведеній роботі описано коливання дисипативного осцилятора з несиметричною квадратично нелінійною характеристикою пружності та сухим тертям Кулона, що виникають внаслідок непружного вертикального удару по ньому твердого тіла. В роботі використано модель Кокса, що не враховує місцеві деформації твердих тіл, підданих удару. В роботі встановлено залежності від швидкості удару та значень інших параметрів, при яких може проявлятися або не проявлятися ефект несиметрії пружної характеристики системи. Виведено умови, коли в системі проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики. Він полягає в тому, що максимальне переміщення осцилятора (розмах коливань) в напрямі дії ударного імпульсу менше, ніж протилежне за напрямом екстремальне переміщення (розмах) після ударних коливань. Встановлено існування такого критичного значення ударного імпульсу, перевищення якого призводить до втрати стійкості руху. Другий інтеграл рівняння коливань, що описує переміщення осцилятора у часі, виражено через еліптичні функції Якобі. Запропоновано наближену формулу для їх обчислення. Виведено також формули для визначення часу досягнення екстремальних відхилень системи від положення рівноваги. Цей час виражено через еліптичні інтеграли першого роду, що відносяться до затабульованих функцій. Розглянуто приклади розрахунків, де, крім використання виведених формул, проведено чисельне комп'ютерне інтегрування вихідного нелінійного диференціального рівняння руху. Проведено порівняння отриманих результатів значень переміщень квадратично нелінійного осцилятора з сухим тертям виражених через еліптичні функції Якобі та отриманих чисельним інтегруванням. Гарна узгодженість результатів розрахунку двома способами підтвердила адекватність одержаних аналітичних розв'язків нелінійної задачі Коші.

**Ключові слова:** непружний вертикальний удар, квадратично нелінійна пружність, сухе тертя, динамічний ефект несиметрії пружності, функції Якобі, еліптичні інтеграли першого роду.

**Вступ.** Коливальний рух широко застосовується в техніці та технологіях. При дослідженні коливального руху нехтують дисипативними силами, або навпаки визначають їх вплив на рух. В даній роботі будемо розглядати вертикальні післяударні коливання дисипативного осцилятора з

несиметричною квадратично нелінійною характеристикою пружності та сухим тертям Кулона, із застосуванням теорії Кокса, що не враховує місцеві деформації тіл підданих удару.

**Огляд останніх публікацій і постановка мети дослідження.** В останні роки



після ударні коливання дисипативних осциляторів моделювали в [1-3]. В [1] встановлено, що задемпфований в'язким лінійним опором осцилятор, внаслідок миттєвого зростання його маси після удару, може стати дисипативною коливальною системою. В [2] описано затухання після ударних коливань внаслідок дії сили сухого тертя, а в [3] – затухання внаслідок позиційного тертя, що виникає в пружних елементах ресорного типу. Тут, на відміну від згаданих публікацій, розглядаємо рух коливальної системи з несиметричною нелінійною характеристикою пружності. В системах такого типу при ударному навантаженні може проявитись ефект несиметрії силової характеристики, описаний в [4]. Умови його виникнення з'ясуємо в цій роботі. Для проведення дослідження аналітично обчислюємо обидва інтеграли рівняння руху, причому другий виражаємо через відомі спеціальні функції.

**Метою** статті є моделювання коливань квадратично нелінійного осцилятора з сухим тертям, які виникають внаслідок непружного вертикального удару по ньому твердого тіла.

**Викладення основного матеріалу.** Післяударні коливання нелінійного осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$M\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2x^2 + F_T \text{sign}(\dot{x}) = P = mg, \quad (1)$$

де:  $M = m_1 + m_2$ ;  $m_1$  – маса осцилятора до удару;  $m_2$ ,  $P$  – відповідно маса та вага тіла, що вдаряє;  $c_1$ ,  $c_2$  – коефіцієнти пружної характеристики;  $F_T$  – сила сухого тертя;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $x = x(t)$  – переміщення осцилятора у часі  $t$ ; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ .

Рівняння (1) розв'язуємо при початкових умовах:

$$x(0) = 0; \dot{x}(0) = v_0 \frac{m_1 v_1}{M}, \quad (2)$$

де  $v_1$  – швидкість удару.

Розглянемо рух осцилятора донизу на проміжку  $x \in [0; x_*]$ .

На цій ділянці руху  $\dot{x} \geq 0$ ,  $x_*$  – максимальне відхилення осцилятора в напрямі дії ударного імпульсу.

Уводячи позначення  $y(x) = \dot{x}^2$ , рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2c_1}{M}x + \frac{2c_2}{M}x^2 + \frac{2(F_T - P)}{M} = 0.$$

Проінтегрувавши його з урахуванням (2) отримуємо:

$$y(x) = v_0^2 - \frac{c_1}{M}x^2 - \frac{2}{3} \frac{c_2}{M}x^3 - \frac{2(F_T - P)}{M}x. \quad (3)$$

При  $x = x_*$ ,  $y(x_*) = 0$  і згідно з (3) має місце рівняння:

$$x_*^3 + ax_*^2 + bx_* + c = 0,$$

в якому:

$$\text{Увівши позначення: } \dot{x}^2 = y,$$

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dy}{dx}, \text{ рівнянню (1), при } \dot{x} > 0,$$

$$\text{надаємо вигляд: } a = \frac{3c_1}{2c_2}; \quad b = \frac{3(F_T - P)}{c_2};$$

$$c = -\frac{3Mv_0^2}{2c_2}.$$

Це кубічне рівняння має додатній корінь:

$$x_* = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{a}{3}, \quad (4)$$

$$\text{де } p = -\frac{\alpha^2}{3} + b; \quad q = 2\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c;$$

$$\alpha = \arccos \left( -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}} \right);$$

$$Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 < 0.$$

Якщо  $Q \geq 0$ , то за розв'язком Кардано [5, с. 43]:

$$x_* = \sqrt[3]{\sqrt{Q} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{Q} + \frac{q}{2}} - \frac{\alpha}{3}. \quad (5)$$



Отже максимальне переміщення осцилятора донизу, в залежності від знаку  $Q$  визначається формулами (4) або (5).

Щоб знайти час досягнення цього максимуму  $t_1$  і закон руху  $x = x(t)$  звернемося до другого інтегралу рівняння (1):

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{y(x)}} = \frac{\sqrt{3M}}{\sqrt{2c_2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x_* - x)(x^2 + 2Ax + B)}}, \quad (6)$$

$$\text{де } 2A = \frac{3c_1}{2c_2} + x_*; \quad B = x_*^2 + \frac{3c_1}{2c_2} x_* + \frac{3(F_T - P)}{c_2}.$$

При обчисленні (6) можливі два випадки. У першому з них  $A - B \geq 0$ . Тоді (6) зводиться до квадратури:

в якій  $x_{1,2} = -A \pm \sqrt{A^2 - B}$ ; ( $x_1 > x_2$ ).

Переходимо до нової змінної інтегрування  $u^2 = x_* - x$  виразу (7) надаємо вигляд:

$$t = \frac{\sqrt{3M}}{\sqrt{2c_2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x_* - x)(x - x_1)(x - x_2)}}, \quad (7)$$

$$t = \frac{\sqrt{6M}}{\sqrt{c_2}} \left[ \int_0^{\sqrt{x_*}} \frac{du}{\sqrt{(d_1^2 - u^2)(d_2^2 - u^2)}} - \int_0^{\sqrt{x_* - x}} \frac{du}{\sqrt{(d_1^2 - u^2)(d_2^2 - u^2)}} \right]$$

Тут  $d_{1,2}^2 = x_* - x_{1,2}$ , ( $d_2^2 > d_1^2$ ).

Далі врахуємо, що в [6,]:

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{(d_1^2 - u^2)(d_2^2 - u^2)}} = \frac{1}{d_2} F(\eta, \delta),$$

де  $\eta = \arcsin \frac{x}{d_1}$ ,  $\delta = \frac{d_1}{d_2}$ ,  $F(\eta, \delta)$  – неповний еліптичний інтеграл першого роду.

Тоді:

$$t = \frac{\sqrt{6M}}{d_2 \sqrt{c_2}} [F(\xi_*, \delta) - F(\xi, \delta)], \quad (8)$$

причому:  $\xi_* = \arcsin \frac{\sqrt{x_*}}{d_1}$ ;  $\xi = \arcsin \frac{\sqrt{x_* - x}}{d_1}$ .

Із (8) випливає формула:

$$t_1 = \frac{\sqrt{6M}}{d_2 \sqrt{c_2}} F(\xi_*, \delta),$$

для обчислення часу досягнення  $x = x_*$ .

Позначенням  $\tau = \frac{d_2 \sqrt{c_2}}{\sqrt{6M}} (t_1 - t)$

виразу (8) надаємо вигляд:

$$F(\xi, \delta) = \tau,$$

звідки отримуємо закон переміщення осцилятора в часі:

$$x(t) = x_* - d_1^2, \quad (9)$$

де  $\text{sn}(\tau, \delta)$  – еліптичний синус Якобі.

Його можна наближено обчислити за формулою:

$$\text{sn}(\tau, \delta) = \sin[\Theta(\tau, \delta)], \quad (10)$$

в якій:



$$\Theta(\tau, \delta) \approx \frac{\pi\tau}{2K} + 2 \left[ \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sin \frac{\pi\tau}{K}}{1 - \varepsilon \cos \frac{\pi\tau}{K}} - \frac{\varepsilon^3}{1 + \varepsilon^2} \sin \frac{\pi\tau}{K} - \frac{\varepsilon^6}{2(1 + \varepsilon^4)} \sin \frac{2\pi\tau}{K} \right], \quad (11)$$

$K = K(\delta)$ ;  $K' = K(\sqrt{1 - \delta^2})$ ;  $\varepsilon = \exp\left(-\pi \frac{K'}{K}\right)$ ;  $K(\delta)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду.

У другому випадку, коли  $A^2 - B < 0$  виразу (6) надаємо форму:

$$t = \frac{\sqrt{3M}}{\sqrt{2c_2}} \left[ \int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{(x_* - x)[(x + A)^2 + B - A^2]}} - \int_x^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{(x_* - x)[(x + A)^2 + B - A^2]}} \right]. \quad (12)$$

Тут теж інтеграли відносяться до еліптичних першого роду. В цьому переконають табличні результати в [6], де:

$$\int_u^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha - x)[(x + m)^2 + n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} F\left(2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha - u}}{\sqrt{\gamma}}; \frac{\sqrt{\gamma + m + \alpha}}{\sqrt{2\gamma}}\right),$$

$$\gamma = \sqrt{(m + \alpha)^2 + n^2}.$$

Тому замість (12) отримуємо співвідношення:

$$t = \frac{\sqrt{3M}}{\sqrt{2c_2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} [F(s_*, r) - F(s, r)], \quad (13)$$

де  $\gamma = \sqrt{x_*^2 + 2Ax_* + B}$ ;  $s_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x_*}}{\sqrt{\gamma}}$ ;

$$s = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x_* - x}}{\sqrt{\gamma}}; r = \sqrt{\frac{\gamma + A + x_*}{2\gamma}}.$$

Задавши  $x = x_*$ , із (13) отримуємо формулу тривалості руху осцилятора донизу:

$$t_1 = \frac{\sqrt{3M}}{\sqrt{2\gamma c_2}} F(s_*, r).$$

Інверсія останнього дає формулу переміщення:

$$x(t) = x_* - \gamma \frac{\operatorname{sn}^2(z, r)}{\operatorname{cn}^2(z, r)}, \quad (14)$$

де еліптичні синус і косинус виражаються через тригонометричні залежностями, аналогічними (10):

$$\operatorname{sn}(z, r) = \sin[0,5\Theta(z, r)];$$

$$\operatorname{cn}(z, r) = \sin[0,5\Theta(z, r)],$$

аргумент  $\Theta(z, r)$  в яких визначено в (11). Як і раніше, розрахунок пов'язаний з обчисленням повного еліптичного інтегралу першого роду, таблиці якого є в [7, с. 422; 8 с. 117] та інших публікаціях.

Розглянемо далі рух осцилятора в зворотному напрямі (вгору) на проміжку  $x \in [x_*, x^*]$ , де  $x^*$  – екстремальне

відхилення. На виділеній ділянці руху  $\dot{x} \leq 0$  і рівняння (1) має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2c_1}{M} x + \frac{2c_2}{M} x^2 - \frac{2(F_T + P)}{M} = 0.$$

Його розв'язком при  $y(x_*) = 0$  є:



$$y(x) = \frac{2c_2}{M}(x_* - x)(x^2 + 2Cx + D) \quad (15)$$

$$\text{Тут } 2C = \frac{3c_1}{2c_2} + x_*;$$

$$D = \left(x_* + \frac{3c_1}{2c_2}\right)x_* - \frac{3(F_T + P)}{c_2}.$$

Оскільки  $y(x^*) = 0$ , то із (15) випливає, що:

$$(x^*)^2 + 2Cx^* + D = 0. \quad (16)$$

Звідки виводимо формулу екстремального переміщення осцилятора вгору:

$$x^* = -C + \sqrt{C^2 - D}.$$

При  $|x^*| > x_*$  проявляється ефект несиметрії характеристики пружності. Виведемо умову його прояву. Задавши у рівнянні (16)  $x^* = -x_*$ , одержуємо

$$x_* = \sqrt{3(F_T + P) / c_2}.$$

Таким чином, динамічний ефект несиметрії характеристики пружності проявляється, коли:

$$x_{*k} = -\frac{1}{2} \left( \frac{3c_1}{2c_2} - |x_k| \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{3c_1}{2c_2} - |x_k| \right)^2 - (x_k)^2 + \frac{3c_1|x_k|}{2c_2} + \frac{3(F_T + P)}{c_2}}$$

У підсумку умова стійкості руху набуває вигляд:

$$v_0 < v_k = \sqrt{\frac{2c_2 x_{*k}}{3M} (x_{*k}^2 + ax_{*k} + b)},$$

що обмежує допустиму швидкість удару.

Щоб знайти час руху на виділеній ділянці та закон переміщення осцилятора вгору розглянемо другий інтеграл рівняння (1):

$$x_* > x_e = \sqrt{3(F_T + P) / c_2}. \quad (17)$$

З'ясуємо при яких  $v_0$  виконується нерівність (17). Для цього скористаємося рівнянням  $y(x_e) = 0$ , підставивши  $x = x_e$  в (3). Це призводить до нерівності:

$$v_0 > v_e = \sqrt{\frac{2c_2 x_e}{3M} (x_e^2 + ax_e + b)},$$

що є умовою прояву ефекту несиметрії.

Але швидкість  $v_0$  має бути обмеженою зверху, бо надмірне її збільшення сприяє втраті стійкості руху. Тому коливання проходять коли  $v_0 < v_k$ , де  $v_k$  деяке критичне значення початкової швидкості. Виведемо формулу його обчислення.

На межі стійкості:  $x^* = x_k$ , де

$$c_2(x_k)^2 - c_1|x_k| = F_T + P$$

або

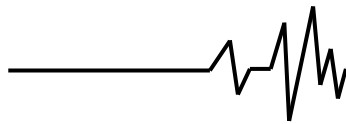
$$|x_k| = \frac{c_1}{2c_2} + \sqrt{\left(\frac{c_1}{2c_2}\right)^2 + \frac{F_T + P}{c_2}}.$$

Таке значення  $x^* = x_k$  маємо, коли  $x_* = x_{*k}$ , причому:

$$t - t_1 = \frac{\sqrt{3M}}{\sqrt{2c_2}} \int_x^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{(x_* - x)(x - x^*)(x - x_0)}}, \quad (18)$$

де  $x_0 = -C - \sqrt{C^2 - D} < x^*$ .

Заміною  $\omega^2 = x_* - x$  вираз (18) зводимо до квадратури:



$$t - t_1 = \frac{\sqrt{6M}}{\sqrt{c_2}} \int_0^{\sqrt{x_* - x}} \frac{d\omega}{\sqrt{(\lambda_1^2 - \omega^2)(\lambda_2^2 - \omega^2)}}, \quad (19)$$

в якій  $\lambda_1^2 = x_* - x^*$ ;  $\lambda_2^2 = x_* - x_0 > \lambda_1^2$ .

Інтеграл в (19) теж зводиться до еліптичних першого роду.

Згідно з [6]:

$$t - t_1 = \frac{\sqrt{6M}}{\lambda_2 \sqrt{c_2}} F \left( \arcsin \frac{\sqrt{x_* - x}}{\lambda_1}; \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right). \quad (20)$$

Задавши в (20)  $t = t_2$ ,  $x = x^*$ , одержуємо час  $t_2$  закінчення руху осцилятора вгору:

$$t_2 = t + \frac{\sqrt{6M}}{\lambda_2 \sqrt{c_2}} K \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right).$$

Процес руху вгору описується виразом:

$$x(t) = x_* - \lambda_1^2 \operatorname{sn}^2 \left( \varphi, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right), \quad (21)$$

$$\text{де } \varphi = \frac{\lambda_2 \sqrt{c_2}}{\sqrt{6M}} (t - t_1);$$

$$\operatorname{sn} \left( \varphi, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \sin \left[ \Theta \left( \varphi, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right].$$

Аргумент  $\Theta \left( \varphi, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)$  треба

обчислювати за формулою (11).

**Числові результати.** Для проведення розрахунків задаємо:  $m_1 = 4$  кг;  $m_2 = 1$  кг;  $c_1 = 6400$  Н/м;  $c_2 = 32000$  Н/м<sup>2</sup>;  $F_T = 6$  Н;  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>;  $P = 10$  Н. При таких числових даних:  $a = 0,3$  м;  $b = -0,000375$  м<sup>2</sup>;  $x_e = 0,038730$  м;  $v_e = 1,451179$  м/с;  $|x_k| = 0,202470$  м;  $x_{*k} = 0,104939$  м;

$v_k = 4,34262$  м/с. Розглянемо два варіанти швидкого удару. В першому:  $v_1 = 5$  м/с;  $v_0 = 1$  м/с  $< v_e$ ;  $c = -0,00023438$  м<sup>3</sup>;  $p = -0,030375$  м<sup>2</sup>;  $q = 0,001803$  м<sup>3</sup>;  $\alpha = 2,656984$  рад;  $x_* = 0,02734$  м;  $C = 0,163672$  м;  $D = 0,007451$  м<sup>2</sup>;  $x^* = -0,024603$  м;  $|x^*| < x_*$  і ефект несиметрії не проявляється. В другому варіанті удару  $v_1 = 15$  м/с;  $v_0 = 3$  м/с  $> v_e$ ;  $c = -0,0021094$  м<sup>3</sup>;  $p = -0,030375$  м<sup>2</sup>;  $q = -0,0000719$  м<sup>3</sup>;  $\alpha = 1,535503$  рад;  $x_* = 0,075456$  м;  $C = 0,187728$  м;  $D = 0,026830$  м<sup>2</sup>;  $x^* = -0,096013$  м;  $|x^*| > x_*$ . У другому варіанті удару проявляється ефект несиметрії характеристики пружності.

Обчислимо далі час досягнення екстремальних відхилень і переміщення осцилятора в різні моменти часу.

В першому варіанті удару:  $A = 0,163672$  м;  $B = 0,0085759$  м<sup>2</sup>;  $x_1 = -0,028718$  м;  $x_2 = -0,298626$  м;  $d_1^2 = 0,056062$  м;  $d_2^2 = 0,325970$  м;  $\xi_* = 0,773143(44,2978^\circ)$ ;  $\delta = 0,414711$ ;  $F(\xi_*, \delta) = 0,78540$ ;  $t_1 = 0,042120$  с;  $x_0 = -0,302731$  м;  $\lambda_1^2 = 0,051943$  м;  $\lambda_2^2 = 0,330071$  м;  $K(\lambda_1 / \lambda_2) = 1,63877$ ;  $t_2 = 0,12946$  с.

Обчислені переміщення при русі осцилятора донизу по формулі (9) записано в чисельниках в табл. 1. При цьому було враховано, що  $K(\delta) = 1,6458$ ;  $K' = 2,32635$ ;  $\varepsilon = 0,011788$ . у знаменниках вказано значення  $x(t)$ , одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері.





Таблиця 1. Переміщення осцилятора (прямий хід),  $v_0 = 1$  м/с

$100t$ , с	1	2	3	4
$100x(t)$ , м	$\frac{0,9821}{0,9822}$	$\frac{1,8411}{1,8411}$	$\frac{2,4533}{2,4531}$	$\frac{2,7252}{2,7250}$

Розраховані за формулою (21) переміщення вгору записано в чисельниках в табл. 2. При Розрахунках прийнято до уваги, що  $K(\lambda_1 / \lambda_2) = 2,3671$ ;  $K' = 2,32635$ ;

$\varepsilon = 0,010697$ . Значення  $x(t)$  в знаменниках отримаємо чисельним інтегруванням рівняння (1).

Таблиця 2. Переміщення осцилятора (зворотній хід),  $v_0 = 1$  м/с

$100t$ , с	6	8	10	12
$100x(t)$ , м	$\frac{2,1741}{2,1738}$	$\frac{0,5668}{0,5664}$	$\frac{-1,2168}{-1,2172}$	$\frac{-2,3224}{-2,3236}$

Розбіжності значень  $x(t)$ , обчислені двома методами, в табл. 1 і табл. 2 невеликі. Вони зумовлені наближеними обчисленнями функцій Якобі.

Графік післяударних затухаючих коливань зображено на рис. 1. Його одержано чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері.

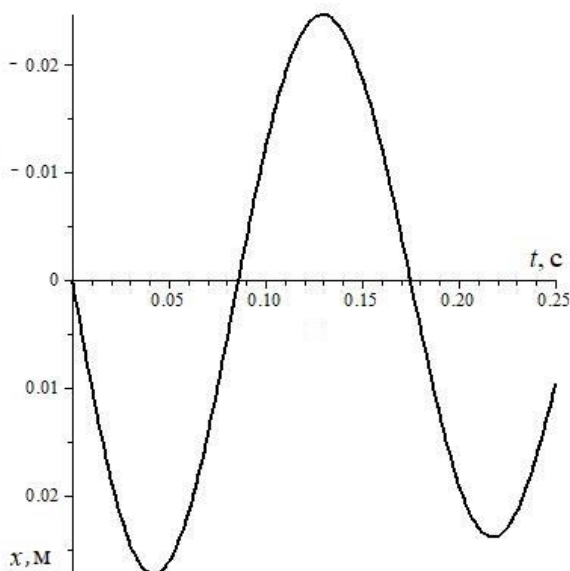


Рис. 1. Графік післяударних коливань при коливань  $v_1 = 5$  м/с

У другому варіанті удару:  $A = 0,187728$  м;  $B = 0,027955$  м<sup>2</sup>;

$x_1 = -0,102365$  м;  $x_2 = -0,273091$  м;

$d_1^2 = 0,177821$  м;  $d_2^2 = 0,348547$  м;

$\xi_* = 0,709443(40,6481^\circ)$ ;

$\delta = 0,714267$ ;  $F(\xi_*, \delta) = 0,74007$ ;

$t_1 = 0,038382$  с;  $x_0 = -0,279444$  м;

$\lambda_1^2 = 0,171469$  м;  $\lambda_2^2 = 0,354900$  м;

$K(\lambda_1 / \lambda_2) = 1,84009$ ;  $t_2 = 0,132955$  с.

Результати обчислень  $x(t)$  за формулою (9) записано в чисельниках в табл. 3. В знаменниках вказано  $x(t)$ , отримані чисельним інтегруванням рівняння (1). При використанні (11) було враховано, що:  $K(\delta) = 1,86284$ ;  $K' = 1,84564$ ;  $\varepsilon = 0,044486$ .

Таблиця 3. Переміщення осцилятора (прямий хід),  $v_0 = 3$  м/с

$100t$ , с	1	2	3	3,5
$100x(t)$ , м	$\frac{2,9360}{2,9357}$	$\frac{5,4463}{5,4461}$	$\frac{7,0872}{7,0871}$	$\frac{7,4702}{7,4701}$



Отримані за формулою (21) переміщення зворотного ходу записано в табл.

4. У розрахунках використано:  $K = 1,84009$ ;  $K' = 1,86859$ ;  $\varepsilon = 0,041162$ .

Таблиця 4. Переміщення осцилятора (зворотній хід),  $v_0 = 3$  м/с

$100t$ , с	4	7	10	13
$100x(t)$ , м	$\frac{7,5286}{7,5286}$	$\frac{2,1122}{2,1122}$	$\frac{-6,0049}{-6,0050}$	$\frac{-9,5720}{-9,5721}$

Як бачимо, і в другому варіанту удару формули (9), (10), (11), (21) дають високу точність розрахунку.

Графік коливань, що відповідає другому варіанту удару, подано на рис. 2, де видно ефект несиметрії пружної характеристики, якого не було на рис. 1.

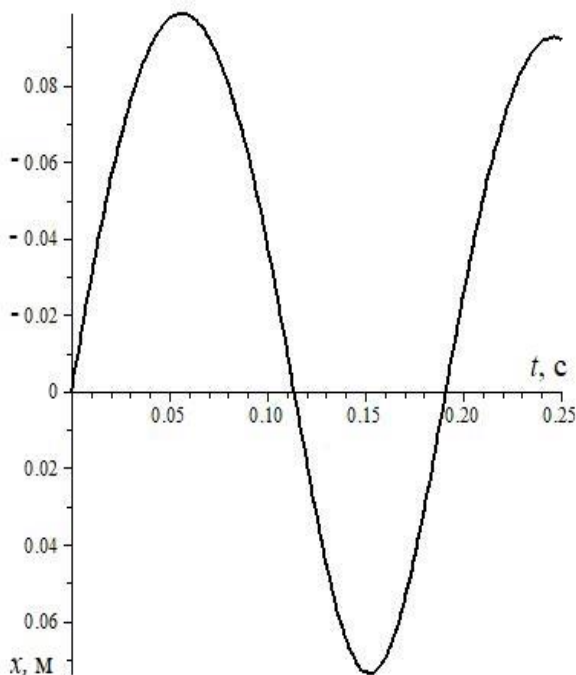


Рис. 2. Графік післяударних коливань при коливань  $v_1 = 15$  м/с

На рис. 3 нанесено графік руху осцилятора при  $v_1 = 22$  м/с. В цьому випадку  $v_0 = 4,4 > v_k$  і осцилятор втрачає стійкість коливального руху на зворотному ході.

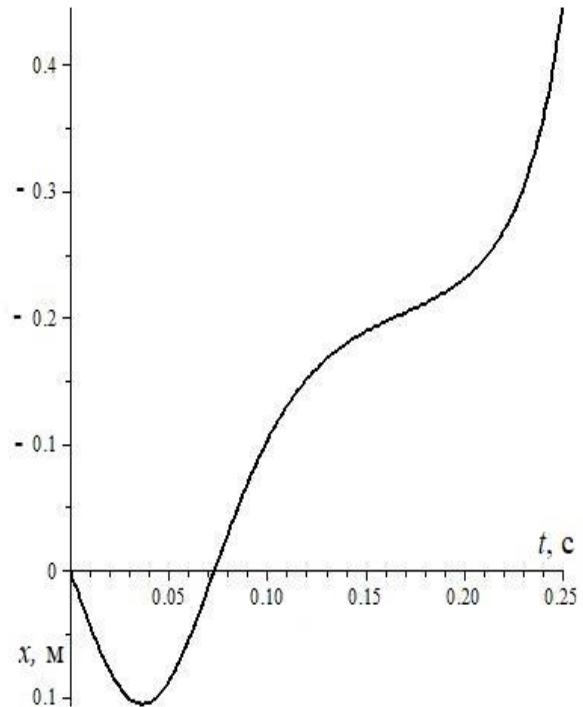


Рис. 3. Графік руху осцилятора при  $v_1 = 22$  м/с

**Висновки.** Післяударні переміщення квадратично нелінійного осцилятора з сухим тертям виражається через еліптичні функції Якобі. В залежності від швидкості удару та значень інших параметрів, може проявлятися або не проявлятися ефект несиметрії пружної характеристики системи. Якщо швидкість удару більша за критичне значення, то осцилятор втрачає стійкість коливального руху. Порівняння та збіжність результатів, одержаних з використанням аналітичних і чисельних комп'ютерних методів, підтвердили адекватність запропонованих аналітичних розв'язків нелінійної задачі Коші, виражених через еліптичні функції.

#### Список використаних джерел

1. Ольшанський В. П., Богомолів О. В., Богомолів О. О. Про перетворення ударом задемпфованої механічної системи в



осцилятор. *Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології процесів переробних і харчових виробництв*. Харків, 2018. Вип. 194. С. 18-30.

2. Ольшанський В. П., Бурлака В. В., Сліпченко М. В. Коливання пружної системи з сухим тертям при ударі. *Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів*. 2018. № 12. С. 230-33.

3. Olshansky V., Bogomolov O., Bogomolov O. and other. Oscillations with positional friction under mechanical shock. *TeKa. Quarterly journal of agro-food industry*. 2019. V.19, No 1. P. 49-58.

4. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2018. № 2 (89). С. 36-40.

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва : Наука, 1974. 832 с.

6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Наука, 1962. 1100 с.

7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва : Наука, 1979. 832 с.

8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Москва : Наука, 1977. 344 с.

#### Список джерел у транслітерації

1. Olshanskiy, V.P., Bogomolov, O.V., & Bogomolov, O.V. (2018) Pro peretvorennaya udarom zadempfovanoi mehanichnoyi systemy v oscylyator [About the transformation by a blow of a damped mechanical system into an oscillator]. *Visnyk KhNTUSG: Suchasni napryamky tekhnologii procesiv pererobnyh i harchovyh vyrobnyctv – Bulletin of KhNTUSG: Particularly in the process of processing and food processin*, 194, 18-30. [In Ukrainian].

2. Olshanskiy, V.P., Burlaka, V.V. & Slipchenko, M.V. (2018) Kolyvannya pruzhnoyi systemy z suhyam tertiyam pry udari [Oscillations of an elastic system with dry friction on impact]. *Tekhnichnyy servis agropromyslovogo, lisovogo ta transportnogo kompleksiv – Technical service of agro-industrial, forest and transport complexes*, 12, 230-33. [In Ukrainian].

3. Olshansky, V., Bogomolov, O., Bogomolov, O. et al. (2019) Oscillations with positional friction under mechanical shock. *TeKa. Quarterly journal of agro-food industry*. 19, 1, 49-58.

4. Olshanskiy, V.P., & Olshanskiy, S.V. (2018) Pro efekt nesymetriyi sylovyoi

harakterystyky kolyvalnoyi systemy pry mehanichnomu udari [On the effect of asymmetry of the force characteristic of an oscillating system during mechanical impact]. *Vibracyi v tehnicji ta tekhnologiyah – Vibrations in engineering and technology*, 2 (89), 36-40. [In Ukrainian].

5. Korn, G & Korn, T (1974) *Spravochnik po matematike (dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov)* [Mathematics handbook (for scientists and engineers)]. Moskva : Nauka. [In Russia].

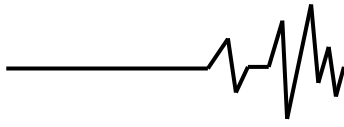
6. Gradshteyn, I.S., & Ryzhik, I.M. (1962) *Tablitsyi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moskva : Nauka. [In Russia].

7. Abramovitz, M., & Stegun, I. (1979). *Tablitsyi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Special functions reference (with formulas, graphs, and math tables)]. Moskva : Nauka. [In Russia].

8. Yanke, E., Emde, F., & Lesch, F. (1977) *Spetsialnyie funktsii* [Special functions]. Moskva : Nauka. [In Russia].

#### ПОСЛЕУДАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КВАДРАТИЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИССИПАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Осциллятор задемпфированный вязким линейным сопротивлением, вследствие мгновенного прироста его массы после удара, может стать диссипативной колебательной системой под действием сухого или позиционного трения. В приведенной работе описано колебания диссипативной осциллятора с несимметричной квадратично нелинейной характеристикой упругости и сухим трением Кулона, возникающих в результате неупругого вертикального удара по нему твердого тела. В работе использована модель Кокса, которая не учитывает местные деформации твердых тел, подвергнутых удару. В работе установлены зависимости от скорости удара и значений других параметров, при которых может проявляться либо не проявляться эффект несимметрии упругой характеристики системы. Выведены условия, когда в системе проявляется динамический эффект несимметрии силовой характеристики. Он заключается в том, что максимальное перемещение осциллятора (размах колебаний) в направлении действия ударного импульса меньше, чем противоположное по направлению экстремальное перемещения (размах) после ударных колебаний. Установлено существование такого критического значения ударного импульса, превышение которого приводит к потере устойчивости движения. Второй интеграл уравнения колебаний описывает перемещение осциллятора во времени, выражено через



эллиптические функции Якоби. Предложено приближенную формулу для их вычисления. Выведены также формулы для определения времени достижения экстремальных отклонений системы от положения равновесия. Это время выражено через эллиптические интегралы первого рода, которые относятся к затабулированным функциям. Рассмотрены примеры расчетов, где, кроме использования выведенных формул, проведено численное компьютерное интегрирование исходного нелинейного дифференциального уравнения движения. Проведено сравнение полученных результатов значений перемещений квадратично нелинейного осциллятора с сухим трением выраженных через эллиптические функции Якоби и полученных численным интегрированием. Хорошая согласованность результатов расчета двумя способами подтвердила адекватность полученных аналитических решений нелинейной задачи Коши.

**Ключевые слова:** неупругий вертикальный удар, квадратично нелинейная упругость, сухое трение, динамический эффект несимметрии упругости, функции Якоби, эллиптические интегралы первого рода.

#### POST-IMPACT VIBRATIONS OF A SQUARE NONLINEAR DISSIPATIVE OSCILLATOR

An oscillator damped by viscous linear resistance, due to the instantaneous increase in its mass after impact, can become a dissipative oscillatory system under the action of dry or positional friction. In the article describes the oscillations of a dissipative oscillator with an asymmetric quadratically nonlinear elastic characteristic and dry Coulomb friction, arising as a result of an inelastic vertical impact of a rigid body on it. In the article, the Cox model is used,

which does not take into account local deformations of solid bodies subjected to impact. The paper establishes the dependences on the impact velocity and the values of other parameters at which the effect of asymmetry of the elastic characteristic of the system may appear or may not appear. The conditions are derived when the dynamic effect of asymmetry of the power characteristic is manifested in the system. It consists in the fact that the maximum displacement of the oscillator (oscillation range) in the direction of the shock pulse is less than the opposite extreme displacement (range) after the shock oscillations. The existence of such a critical value of the shock impulse is established, the excess of which leads to the loss of motion stability. The second integral of the oscillation equation describes the movement of the oscillator in time, expressed in terms of Jacobi elliptic functions. An approximate formula for their calculation is proposed. Formulas are also derived to determine the time to reach extreme deviations of the system from the equilibrium position. This time is expressed in terms of elliptic integrals of the first kind, which refer to the tabulated functions. Examples of calculations are considered, where, in addition to using the derived formulas, numerical computer integration of the original nonlinear differential equation of motion is carried out. A comparison of the results obtained for the displacement values of a quadratically nonlinear oscillator with dry friction expressed in terms of Jacobi elliptic functions and obtained by numerical integration is carried out. Good consistency of the calculation results in two ways confirmed the adequacy of the obtained analytical solutions of the nonlinear Cauchy problem.

**Key words:** inelastic vertical impact, quadratically nonlinear elasticity, dry friction, dynamic effect of elasticity asymmetry, Jacobi functions, elliptic integrals of the first kind.

#### Відомості про авторів

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; [OlshanskiyVP@gmail.com](mailto:OlshanskiyVP@gmail.com) тел.: (066) 0100955

**Ольшанский Василий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики и теоретической механики Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевских, 44, г. Харьков, Украина, 61022; [OlshanskiyVP@gmail.com](mailto:OlshanskiyVP@gmail.com) тел.: (066) 0100955

**Olshanskiy Vasyl Pavlovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkov, Ukraine; 61022; [OlshanskiyVP@gmail.com](mailto:OlshanskiyVP@gmail.com) тел.: (066) 0100955



**Сліпченко Максим Володимирович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; [Slipchenko\\_M@ukr.net](mailto:Slipchenko_M@ukr.net), тел.: (066) 7120989

**Сліпченко Максим Владимирович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики и теоретической механики Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевських, 44, г. Харьков, Украина, 61022; [Slipchenko\\_M@ukr.net](mailto:Slipchenko_M@ukr.net), тел.: (066) 7120989

**Slipchenko Maksym Volodymyrovych** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor, Associate Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkov, Ukraine; 61022; [Slipchenko\\_M@ukr.net](mailto:Slipchenko_M@ukr.net), тел.: (066) 7120989

**Спольнік Олександр Іванович** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри кафедри фізики і теоретичної механіки Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Алчевських, 44, м. Харків, Україна, 61002; [alexspo@ukr.net](mailto:alexspo@ukr.net), (067) 764-84-64

**Спольник Александр Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры физики и теоретической механики Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко, ул. Алчевських, 44, г. Харьков, Украина, 61022; [alexspo@ukr.net](mailto:alexspo@ukr.net), (067) 764-84-64

**Spolnik Oleksandr Ivanovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Physics and Theoretical Mechanics Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, Alchevskikh str. 44, Kharkov, Ukraine; 61022; [alexspo@ukr.net](mailto:alexspo@ukr.net), (067) 764-84-64

**Токарчук Олексій Анатолійович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри технологічних процесів та обладнання переробних і харчових виробництв Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, e-mail: [tokarchyk@vsau.vin.ua](mailto:tokarchyk@vsau.vin.ua)).

**Токарчук Алексей Анатольевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры технологических процессов и оборудования перерабатывающих и пищевых производств Винницкого национального аграрного университета (ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008, e-mail: [tokarchyk@vsau.vin.ua](mailto:tokarchyk@vsau.vin.ua)).

**Tokarchuk Oleksii** – PhD, Associate Professor of the Department of «Technological Processes and Equipment for Processing and Food Productions» of the Vinnytsia National Agrarian University (St. Solnyshchnaya, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: [tokarchyk@vsau.vin.ua](mailto:tokarchyk@vsau.vin.ua)).