

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет  
"Львівська політехніка"

# ПРОГРАМА

XVII Міжнародної  
науково-технічної конференції  
**“Вібрації в техніці  
та технологіях”**

*конференція присвячена  
140-річчю випуску  
інженерів-механіків у  
Львівській політехніці*

11 – 12 ЖОВТНЯ

Львів – 2018

*Львівська політехніка  
Національний університет*





**13. Математична модель взаємодії сипкого матеріалу із віброуючим решетою.**

*Ельчин Алієв<sup>1</sup>, Віталій Яропуд<sup>2</sup>, <sup>1</sup>Інститут олійних культур Національної академії аграрних наук України, Запоріжжя, <sup>2</sup>Вінницький національний аграрний університет, Вінниця, Україна.*

**14. Динаміка руху виконавчих органів машини з приводом просторових коливань.**

*Олег Омелянов, Вінницький національний аграрний університет, Вінниця, Україна.*

**15. Демпфування коливань бензомоторної пили вібропоглинаючими елементами.**

*Ігор Бутитер<sup>1</sup>, Андрій Микита<sup>2</sup>, <sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, <sup>2</sup>Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Суботіна НАН України, Львів, Україна.*

**16. Вплив попередньо напруженого стану на частоти несучих конструкцій енергетичних машин.**

*Наталя Сметанкіна, Сергій Місюра, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна.*

**17. Розрахунок та оптимізація ДГК для висотних споруд.**

*Богдан Дівеєв, Михайло Котів, Роман Котів, Ярослав Яворський, Національний університет "Львівська Політехніка", Львів, Україна.*

**18. Моделювання робочих процесів гідроімпульсного привода віброударного пристрою для руйнування гірських порід.**

*Ростислав Іскович-Лотоцький, Іван Коц, Ярослав Іванчук, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.*

**19. Статика взаємодії абсолютно твердих тіл із сипким середовищем.**

*Олена Солона, Володимир Ковбаса, Вінницький національний аграрний університет, Вінниця, Україна.*

**20. Дослідження впливу конструктивних параметрів нелінійної системи підресорювання на плавність ходу транспортних засобів.**

*Олексій Водка, Олексій Ларін, Алла Демченко, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна.*

**21. Моделювання руху привідного мотор-колеса електромобіля.**

*Роман Зінько, Віталій Корендій, Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна.*

# ДОПОВІДЬ СТАТИКА ВЗАЄМОДІЇ АБСОЛЮТНО ТВЕРДИХ ТІЛ ІЗ СИПКИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

*О.В. Солона*

*Україна, м. Вінниця, Вінницький національний аграрний університет,  
завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін та охорони праці*

Дана частина статті є продовженням першої частини однойменної статті. У цій частині виведені рівняння граничних умов, у якості яких виступають прикладені до стінок контейнера переміщення. Отримано систему гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Вона дозволяє спільно з наведеними в частині 1 статичними рівняннями отримати значення компонент швидкостей переміщень сипучого середовища в контейнері, а також зміни її щільності в залежності від механічних властивостей середовища і кінематичних режимів прикладених переміщень .

Чисельне розв'язання даної системи рівнянь дозволяє послідовно вирішити виведені в статті рівняння щодо визначення компонент напружень як в пристінкових шарах, так і в умовах відсутності впливу стінок контейнера.

На підставі отриманих таким чином рішень наведені рівняння, які дозволяють визначити можливі лінійні і кутові переміщення конкрецій у пристінкових шарах при контактній взаємодії конкреції зі стінкою, а також в умовах відсутності контактних взаємодій з урахуванням динамічного впливу рухомої сипучого середовища. Ці функції отримані для найбільш загальних випадків, які передбачають врахування механічних властивостей сипучого середовища, геометричних розмірів, форм і механічних властивостей конкрецій і стінок контейнера, а також кінематичних режимів впливів, прикладених до стінок контейнера .

Отримані рівняння є вихідними для чисельного рішення задач про переміщення, зміни щільності сипучого середовища, а також можливих лінійних і кутових переміщеннях конкрецій, які знаходяться в середовищі.

Використовуючи методи кінцевих елементів (FEM) або кінцевих обсягів (DEM), можна отримати остаточні рішення отриманих рівнянь. Ці рівняння дозволяють визначити кінематичні режими додаткових кінематичних впливів з метою отримання необхідних змін щільності і можливих переміщень обсягів сипучого середовища, а також необхідних переміщень і швидкостей цих переміщень конкрецій, які знаходяться в рухомому сипучому середовищі .

**Постановка проблеми.** Актуальність даних досліджень наведена в першій частині цієї публікації. У зв'язку з обмеженнями за обсягом публікації, дана частина є продовженням першої частини статті, в якій отримані рівняння статички сипучого середовища, умови рівноваги в ньому конкрецій і умови можливих їх переміщень без прикладення будь-яких збурень до контейнера.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Основоположними в даному напрямку є результати досліджень І. І. Блехмана, в яких розглядаються умови переміщень конкрецій з урахуванням їх геометричних властивостей і механічних властивостей у середовищах, які моделюються з використанням законів гідромеханіки, що не може в повному обсязі відповідати реальній картині, оскільки механіка сипучих середовищ має суттєві відмінності від механіки рідини.

У дослідженнях інших авторів (Вайсберг Л. А., Демидов І. В., Іванов К. С.) наводяться загальні методи побудови рівнянь вібраційного руху сипучих середовищ і зміни їх агрегатного стану. Однак в статті відсутні кінцеві рівняння, які б дозволили скласти системи рівнянь для кінцевого чисельного рішення. Крім того, у наведеній публікації не розглядається рішення задачі про рух абсолютно твердих конкрецій у рухомому сипучому середовищі.

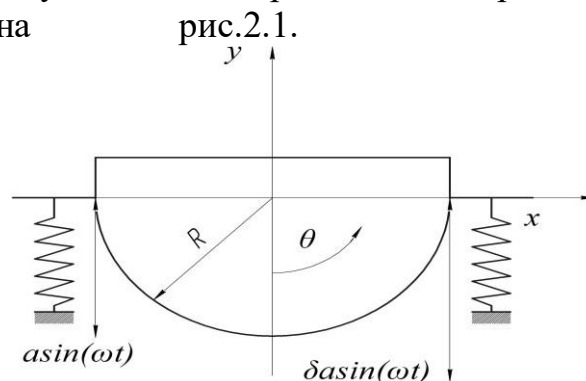
**Мета досліджень.** Виведення рівнянь

зв'язку збуджуючих коливальних навантажень зі змінами щільності сипучого середовища, компонентами швидкостей її переміщень, змін напружень у ній і дію цих величин на можливі переміщення конкрецій, що знаходяться у контейнері з сипучим середовищем. У зв'язку з цим необхідно вирішити такі завдання:

- вивести кінематичні рівняння збуджуючих впливів на контейнер;
- отримати рівняння для визначення компонент швидкостей переміщень елементарних обсягів сипучого середовища;
- отримати рівняння змін компонент напружень в елементарних обсягах сипучого середовища;

вивести рівняння можливих швидкостей переміщень конкрецій при різних їх початкових положеннях: у зоні контакту зі стінкою контейнера і в зонах, вільних від такого контакту.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Для розуміння найбільш загальних кінематичних умов на поверхні контейнера можна скористатися схемою, представленою на



**Рис. 2.1. Схематичне уявлення приведення контейнера в коливальний рух**

Контейнер із сипучим середовищем має форму циліндра радіуса  $R$ , вісь якого нахилена до горизонтальної осі  $x$  під кутом  $\theta$ . До периферійних зон циліндра прикладені зосереджені сили з переміщеннями, які викликають коливання. Для забезпечення повної свободи для найбільш загальних випадків

збуджуючі дії прикладені під кутом  $\alpha$  до вертикалі в площині  $xz$ . Ці переміщення представлені на схемі функціями зраховуванням нахилу  $\alpha$ ):

$$a \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha t; \quad a \sin^2 \alpha t \cos^2 \alpha, \quad (2.1)$$

де  $a$  – амплітуда коливань,  $\alpha$  – коефіцієнт, який враховує різницю амплітуд коливань двох протилежних країв контейнера,  $\omega$  – кутова частота коливань,  $t$  – час.

При різниці амплітуд коливань, пропорційної коефіцієнту  $\alpha$ , виникають кутові коливання контейнера (навколо осі симетрії):

$$\alpha = \arctg \left( \frac{2R}{\omega} \sin^2 \alpha t \cos^2 \alpha \right), \quad (2.2)$$

З метою отримання рівнянь компонент швидкостей переміщень сипучого середовища можна скористатися (1.1), (1.3), (1.6), які наведені в першій частині статті. При цьому, друга група геометричних рівнянь (1.3), підставляється у фізичні рівняння зв'язку компонент напружень зі швидкостями деформацій (1.6), а отримані величини компонент напружень підставляються у рівняння динаміки середовища (1.1). У кінцевому вигляді такі рівняння приймуть найбільш загальний вигляд:

$$\begin{aligned} & \rho(x, y, z, t) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \dot{w} \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) = \\ & -X + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2\eta(x, y, z)}{(-1+2\nu)} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \eta \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \right); \\ & \rho(x, y, z, t) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \dot{w} \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) = \\ & = Y + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2\eta(x, y, z)}{(-1+2\nu)} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) \right); \\ & \rho(x, y, z, t) \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} + \dot{u} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \dot{w} \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) = \\ & = Z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2\eta}{(-1+2\nu)} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \right) \right) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(x, y, z) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \eta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ці рівняння повинні бути доповнені рівнянням нерозривності, заснованим на (1.5), яке, у свою чергу, повинно бути перетворено з використанням рівнянь розподілу напружень у статичному стані (1.18), (1.19), на підставі яких вводиться функція розподілу щільності з (1.20).

Далі, при використанні граничних умов (2.1), (2.2) можна визначити компоненти швидкостей переміщень і змін щільності сипучого середовища при прикладенні збурених рухів до стінок контейнера. Рішення цих рівнянь може бути отримано лише з використанням чисельних методів кінцевих елементів (FEM) або кінцевих обсягів (DEM), оскільки ці рівняння відносяться до гіперболічного типу з геометричною і фізичною нелінійністю.

Для опису можливих рухів конкрецій, які знаходяться в сипучому середовищі, необхідно розглянути два випадки. Перший випадок відноситься до конкрецій, що знаходяться в контакті зі стінкою контейнера, а другий випадок – до конкрецій, що знаходяться в сипучому середовищі без контакту зі стінкою. При цьому перший випадок слід брати до уваги лише до можливого контактного навантаження стінкою, а далі розглядається лише другий випадок.

У разі контактної взаємодії (перший випадок) повинні бути використані рівняння типу (1.23), (1.24). При цьому в них повинні бути внесені доповнення у вигляді інерційних сил з боку рухомої поверхні контейнера і доповнення у вигляді сил опору середовища, що рухається з використанням рівнянь рівноваги на поверхні (1.2), в яких компоненти напружень повинні бути визначені з рівнянь (1.6).

Інерційні складові визначаються прискореннями (лінійними і кутовими) у проекціях на нормаль і дотичну до стінки контейнера у функціях обурення і координат стінки контейнера, і заходами інертності конкрецій у залежності від виду переміщень лінійних (маса) або кутових (момент інерції мас).

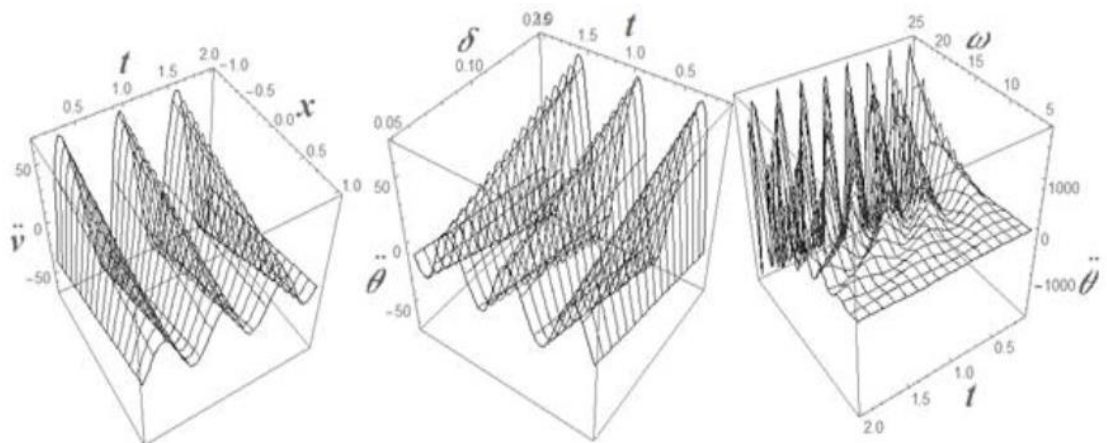
Рівняння можливих переміщень конкрецій, які знаходяться в контакті зі стінками контейнера при його русі, визначають умови руху конкрецій (ковзання, відрив від стінки або кочення по стінці).

Перша умова – умова ковзання конкреції по поверхні стінки при додатку динамічних дій до контейнера. При цьому сума проекцій всіх сил, спрямованих по дотичній до поверхні стінки контейнера, що діють на конкреції, з урахуванням інерційних, представиться у вигляді  $\int \dots$ , тобто сума проекцій всіх сил на дотичну до стінки перевищує силу тертя від дії всіх сил. Складові цих сил матимуть вигляд (інтегральні вираження являють собою поверхневі інтеграли першого роду):



$$S_{Fkd} = \sin[m_c] \left( \begin{array}{l} M_k \ddot{v} \pm M_k g \pm \\ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) + \\ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k-\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) \\ \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{xd}l_k + \tau_{xyd}m_k + \tau_{xzd}n_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \pm \\ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{zd}n_k + \tau_{xzd}l_k + \tau_{yzd}m_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \end{array} \right); \quad (2.8)$$

$$S_{TFd} = \operatorname{tg}[\varphi_2] \left( \begin{array}{l} M_k \ddot{v} m_c \pm M_k g m_c \pm \\ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) m_c + \\ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k-\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) m_c \\ \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{xd}l_k + \tau_{xyd}m_k + \tau_{xzd}n_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \pm \\ \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{zd}n_k + \tau_{xzd}l_k + \tau_{yzd}m_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)} d\zeta d\xi \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \end{array} \right); \quad (2.9)$$



**Рис. 2.2. Графіки віброприскорень збуджують динамічний вплив на контейнер**

Компоненти нормальних і дотичних напружень на поверхні конкреції визначаються з фізичних рівнянь, які засновані на (1.6) з урахуванням того, що при швидких рухах середовища величиною, яка характеризує опір руху, залишається в'язкий опір:

$$\sigma_{xd} = 3\mu_0 \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\mu}{(1+\nu)} (\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_0); \quad \sigma_{yd} = 3\mu_0 \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\mu}{(1+\nu)} (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_0);$$

$$\sigma_{zd} = 3\mu_0 \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\mu}{(1+\nu)} (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_0) \quad (2.10)$$

$$\tau_{xyd} = \eta \dot{\gamma}_{xy}; \quad \tau_{xzd} = \eta \dot{\gamma}_{xz}; \quad \tau_{yzd} = \eta \dot{\gamma}_{yz}.$$

Компоненти швидкостей деформацій, що входять в останні рівняння, визначаються шляхом диференціювання компонент швидкостей переміщень, отриманих у результаті рішення (2.3) відповідно до (1.3).

Друга умова – це умова кочення конкреції по стінці контейнера, яке виникає у разі, коли сумарний момент сил, з урахуванням динамічної складової  $SM_{kdf}$  (щодо миттєвого центру обертання)  $O_r$  перевищує момент сил відносно того ж центру, що діють в іншому напрямку  $SM_{kdh}$ . При цьому, необхідно дотримуватися додаткової умови відсутності ковзання:  $S_{TFd} > S_{Fkd}$ . У цьому випадку, крутний момент визначиться різницею  $SM_{kdh} - SM_{kdf}$ . Вирази для сумарних моментів візьмуть вигляд:

$$SM_{kdh} = \ddot{\theta} J_{kO_r} \pm r_k \left( \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \geq 0} d\zeta d\xi \right) m_c + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k-\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \geq 0} d\zeta d\xi \right) m_c \right) \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \geq 0} d\zeta d\xi \right) tg[\varphi_3] \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \geq 0} d\zeta d\xi \right) tg[\varphi_3] \right);$$

$$SM_{kdf} = \ddot{\theta} J_{kO_r} \pm r_k \left( \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \leq 0} d\zeta d\xi \right) m_c + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k-\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \leq 0} d\zeta d\xi \right) m_c \right) \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \leq 0} d\zeta d\xi \right) tg[\varphi_3] \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k-\delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k)_{|\eta=f_k(\xi,\zeta)/\eta \leq 0} d\zeta d\xi \right) tg[\varphi_3] \right); \quad (2.11)$$

У більш загальному випадку момент інерції маси конкреції щодо миттєвого центру обертання визначиться наступним чином:

$$J_{kO_r} = \iiint_{V_k} r \rho_k(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$



У тому випадку, якщо проекція на нормаль до стінки контейнера інерційних сил впливу стінки контейнера, і сил, що діють з боку рухомого сипучого середовища  $S_{Fnd}$ , перевищить проекцію на ту ж нормаль масових сил  $S_{Fnm}$ ,  $S_{Fnd} > S_{Fnm}$ , відбудеться відрив конкреції від стінки контейнера, і тоді можна розглядати поведінку конкреції в умовах безконтактного руху в сипучому середовищі. Вирази проекцій цих сил на нормаль мають вигляд:  $S_{Fnm} = M_k g m_c$ ;

Для випадку виконання умови, описаної вище, і якщо конкреція в статичному режимі перебувала у вільному від контактної взаємодії стані, необхідно розглянути умови можливих її переміщень на підставі аналізу сил, які будуть діяти на неї з боку рухомого сипучого середовища.

$$\begin{aligned}
S_{Fnd} = & \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\zeta d\xi \right) m_c + \\
& \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k - \delta_c} \sigma_{vd}|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\zeta d\xi \right) m_c \pm \\
& \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{r_k - \delta_c}^{\delta_c} (\sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k) \Big|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\zeta d\xi \right) tg[\varphi_3] \pm . (2.12) \\
& \pm \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k - \delta_c} (\sigma_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k) \Big|_{\eta=f_k(\xi, \zeta)} d\zeta d\xi \right) tg[\varphi_3]
\end{aligned}$$

Конкреція буде схильна до дії сил сухого тертя рухомого сипучого середовища і дії масових сил. У цьому випадку можливі напрямки переміщень конкрецій будуть визначатися співвідношенням величин  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ , для певного положення конкреції в ємності в системі координат хуз (рівняння рівноваги на поверхні контакту конкреції із середовищем):

$$\sigma_{xd} l_k + \tau_{xyd} m_k + \tau_{xzd} n_k = \bar{X}; \sigma_{yd} m_k + \tau_{yzd} n_k + \tau_{xyd} l_k = \bar{Y}; \sigma_{zd} n_k + \tau_{xzd} l_k + \tau_{yzd} m_k = \bar{Z}. (2.13)$$

З огляду на вищевикладене, можна скласти рівняння сил, що діють на конкреції з урахуванням сил тяжкості, в наступному вигляді для кожного з можливих напрямків:

– в напрямку осі ОХ рушійна сила визначиться наступним чином (інтегральні вислови є поверхневі інтеграли першого роду):

$$\begin{aligned}
FM_{dx} = & \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\xi \leq 0} d\eta d\zeta + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\xi \leq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\xi \leq 0} d\eta d\xi + M_k g \right) tg[\varphi_3] \right) - \\
& - \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\xi \geq 0} d\eta d\zeta + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\xi \geq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\xi \geq 0} d\eta d\xi + M_k g \right) tg[\varphi_3] \right)
\end{aligned} . (2.14)$$

в напрямку осі оу :

$$\begin{aligned}
FM_{dy} = & \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\eta \leq 0} d\xi d\zeta + M_k g + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\eta \leq 0} d\eta d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\eta \leq 0} d\eta d\xi \right) tg[\varphi_3] \right) - \\
& - \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y} \Big|_{\eta \geq 0} d\xi d\zeta + M_k g + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X} \Big|_{\eta \geq 0} d\eta d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z} \Big|_{\eta \geq 0} d\eta d\xi \right) tg[\varphi_3] \right)
\end{aligned} . (2.15)$$

в напрямку осі оз :

$$FM_{\pm} = \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z}|_{\zeta \leq 0} d\eta d\xi + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y}|_{\zeta \leq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X}|_{\zeta \leq 0} d\eta d\zeta + M_k g \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \right) - \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Z}|_{\zeta \geq 0} d\eta d\xi + \left( \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{Y}|_{\zeta \geq 0} d\xi d\zeta + \int_{-r_k}^{r_k} \int_{-r_k}^{r_k} \bar{X}|_{\zeta \geq 0} d\eta d\zeta + M_k g \right) \operatorname{tg}[\varphi_3] \right) \quad (2.16)$$

Таким чином, рівняння (2.14), (2.15), (2.16) з урахуванням (2.13) визначають можливі переміщення конкреції у сипучому середовищі, яка знаходиться у контейнері при додатку до контейнера збурень у вигляді кінематичних збурень, у залежності від режимів прикладених збурень, геометричних форм і розмірів контейнера, форми, розмірів і властивостей конкреції, а також механічних властивостей сипучого середовища.

**Висновки.** На підставі висновку рівнянь статички сипучого середовища та конкрецій, які в ній знаходяться, як функцій механічних властивостей конкреції і сипучого середовища, геометричних розмірів контейнера і конкреції, а також доданих до контейнера збурень у вигляді кінематичних величин як лінійних, так і кутових, отримані:

- рівняння для визначення компонентів швидкостей переміщень обсягів сипучого середовища для довільної точки обсягу контейнера;
- рівняння для визначення змін щільності сипучого середовища для довільної точки обсягу контейнера;
- рівняння для визначення можливих лінійних і кутових переміщень у довільних точках обсягу контейнера і у пристінкових шарах сипучого середовища, тобто при наявності початкової контактної взаємодії конкреція - стінка контейнера.

Отримані рівняння вимагають застосування чисельних методів їх вирішення із застосуванням методів кінцевих елементів (FEM) або кінцевих обсягів (DEM).