Стоцько З. А.

Топільницький В. Г.

Кусий Я. М.

Сокіл М. Б.

Національний університет “Львівська політехніка”

УДК 621.9.048.6

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ РОБОЧИХ СЕРЕДОВИЩ ВІБРАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Используя аппарат специальных периодических Ateb-функций в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики, разработаны нелинейные математические модели движения рабочей среды вибрационной системы, которая учитывают зависимости упругой и вязкой составляющих напряжений от характеристик деформационного состояния среды, её физико-механических свойств и особенностей взаимодействия среды с вибрационной системой.

Using the vehicle of the special periodic Ateb-functions in combination with the asymptotic methods of nonlinear mechanics, the nonlinear mathematical models of motion of working environment of the oscillation system, which dependences take into account resilient and viscid making tensions from descriptions of the deformation state of environment, her physical and mechanical properties and features of co-operation of environment with the oscillation system, are worked out.

Постановка проблеми. Теоретичний, адекватний фізичному процесу, опис руху робочого середовища вібраційних систем є досить складною задачею динаміки, яка до цього часу не вирішена. Враховуючи широке розповсюдження вібраційних технологій оброблення та транспортування необхідно шукати шляхи вирішення даної задачі шляхом моделювання, зокрема розроблення моделей руху середовища з максимальним наближенням їх до відображення реальних вібраційних процесів. Останнє є актуальною задачею при розробленні і впровадженні нових технологій віброоброблення та вібротранспортування виробів та конструкцій відповідних вібраційних систем. Відсутність адекватних моделей з відповідним математичним апаратом опису для робочого середовища створює великі труднощі при теоретичному дослідженні об‘ємного віброоброблення і таких технологічних процесів, як вібротранспортування сипких матеріалів, вібросепарація тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогоднішній час розроблено ряд моделей робочого середовища вібраційних систем, які певною мірою відображають фізику досліджуваного вібраційного процесу. Роботи з розрахунків динаміки вібраційних систем можна розділити на два основні види: 1) роботи, в яких середовище враховується приєднаною масою; 2) роботи, в яких взаємодія середовища і вібраційної системи визначається шляхом інших міркувань. В даних роботах є такі, в яких задачі динаміки робочого середовища розглядаються в одномірній, плоскій та просторовій постановці. При проведенні багатьох теоретичних досліджень руху робочого середовища вібраційної системи, їх автори намагались спростити, лінериазувати математичний апарат при розв‘язку даних динамічних задач. Дані представлення, з одного боку, дали можливість отримати прості залежності між деякими параметрами середовища, а з другого боку, не відображали такі властивості середовища, як пружність, в‘язкість, зміна густини, а також його особливості руху. Шляхів підходу до вирішення основних задач динаміки сипкого середовища вібраціних систем шляхом його моделювання є досить багато, але існуючі моделі досить обмежені для використання своїми припущеннями [1].

Формулювання мети дослідження. Побудова нелінійної математичної моделі руху робочого середовища вібраційних систем, які реалізують вібраційні технології сепарації, помолу, перемішування, ущільнення, транспортування, поверхневого оброблення виробів, технології регулювання вібровпливу на системи і механізми з метою їх подальшого дослідження для підвищення ефективності вібраційних машин, пристроїв і механізмів та відповідних технологічних процесів.

Виклад основного матеріалу. В останні роки для дослідження руху робочого середовища вібраційних систем знайшла застосування гіпотеза про його рух, як деякого суцільного середовища, матеріал якого задовольняє лінійному закону Фойгта [1, 2]. Такий вибір моделі в першу чергу зумовлено тим, що динамічні процеси у середовищі описуються лінійними диференціальним рівняннями з частинними похідними, методика дослідження яких розроблена достатньо добре. Останнє в багатьох випадках спонукало, при дослідженнях, лінеаризувати відповідні нелінійні пружні характеристики лінійним або зовсім нехтувати ними. Проте така "лінеаризація" в багатьох випадках не завжди відображає реальну картину процесів динамічної системи.

Представлення суміші деталей, які слід обробити, з оброблюваними тілами, як однорідного суцільного середовища – буде справедливим з достатньою точністю за невеликого розміру перших. Окрім того, припускаючи, що деталі, які слід обробити, і оброблювальні тіла, виготовленні з матеріалу одного виду (так, наприклад, при вібрнозміцненні чи знятті заусенців металічні деталі, які слід обробити, взаємодіють зі сталевими кульками), даній однорідній суміші можна надати таких властивостей суцільного матеріалу як пружність і в'язкість, використовуючи лінійний закон Фойгта. Напруження і деформації, які виникають в ньому у випадку одноосного напруженого стану пов'язані залежністю:

$$\sigma = E \cdot \zeta + k_0 \left(\frac{d\zeta}{dt} \right), \qquad (1)$$

де σ – нормальне напруження в моделі Фохта; ζ – відносна деформація моделі вздовж осі ξ; Е – модуль пружності матеріалу моделі; k_0 – стала, що характеризує в'язкі властивості моделі – коефіцієнт в'язкості матеріалу.

Використовуючи узагальнений закон Фойгта, який можна подати в нелінійній формі шляхом введення степеневого показника нелінійності (він залежатиме від фізико-механічних властивостей матеріалу середовища) у відповідні доданки, математичний апарат нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та метод відокремлення змінних Фур'є, побудовано модель руху робочого середовища вібраційної системи. Використання закону Фойгта в нелінійній постановці дало змогу побудувати на його основі нелінійні рівняння, а відповідно і їх розв'язки, руху середовища, які є найбільш адекватними по відображенню фізики його руху під час функціонування вібраційної системи порівняно з лінійними рівняннями з одного боку та нескладними за своєю формою – з другого.

Гіпотези побудови моделі руху робочого середовища вібраційної системи:

1. Матеріал середовища суцільний і однорідний, представлений як нашарування плоских пружно-пластичних балок, товщина яких значно менша довжини і які контактують з робочим органом вібраційної системи: а) як шарнірно закріплені балки, б) у виді жорсткого контакту, в) у виді пружного контакту. Такі види контакту дають змогу враховувати в математичній моделі різні форми взаємодії середовища з робочим органом вібраційної системи.

2. Середовище рухається пошарово і перебуває в складному русі (в площині руху контейнера): переносний рух шару середовища – це рух разом з контейнером вібраційної системи, відносний рух шару середовища - коливання відносно горизонтальної осі шару ξ.

3. Матеріал середовища задовольняє нелінійному закону Фойгта. Було розглянуто два випадки: а) нелінійність складової в'язких напружень закону Фойгта (2), б) нелінійність пружної складової напруження закону Фойгта (3), шляхом введення степеневого показника нелінійності ν у відповідні доданки:

$$\sigma = E\zeta + k_0 \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^{\nu+1}, \qquad (2)$$

$$\sigma = E(\zeta)^{\nu+1} + k_0 \frac{d\zeta}{dt}. \qquad (3)$$

де σ – нормальне напруження в шарі середовища, $\zeta = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ – відносна деформація шару середовища відносно повздовжньої осі шару ξ, $u = u(\xi, t)$ – переміщення вздовж осі ξ довільного поперечного січення моделі середовища за деякий момент часу t, E, k_0, ν – сталі, що характеризують в'язкі і пружні властивості середовища.

4. Сила внутрішнього тертя R в шарі середовища, а також між окремими його шарами визначається за законом Болотіна [3]:

$$R = u_t \left(B + B_0 u^2 \right), \qquad (4)$$

де B, B_0 – сталі, які визначаються видом матеріалу середовища; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Тоді рівняння повздовжніх нелінійних коливань – рівняння відносного руху поперечного перерізу шару середовища вібраційної системи матиме вигляд [1, 3]:

а) для напруження в шарі виду (2) –

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{\xi\xi} - \beta\left(u_{\xi\xi t}\right)^{\nu+1} = f(t) + u_t\left(\vartheta + \delta u^2\right), \quad (5)$$

б) для напруження в шарі виду (3) –

$$u_{tt} - \alpha^2\left(u_{\xi\xi}\right)^{\nu+1} - \beta u_{\xi\xi t} = f(t) + u_t\left(\vartheta + \delta u^2\right), \quad (6)$$

де $\alpha^2 = \dfrac{E}{\rho}$, $\beta = \dfrac{k_0}{\rho}$, $\vartheta = \dfrac{B_0}{\rho \cdot F}$, $\delta = \dfrac{B}{\rho \cdot F}$, F – площа поперечного січення шару моделі середовища, ρ – еквівалентна густина моделі середовища, $f(t)$ – інерційне навантаження, яке згідно [4] приймаємо гармонійного типу з амплітудою b_1 (амплітуда коливань вібраційної системи) і частотою μ (частота коливань приводу вібраційної системи $\mu = \dfrac{\pi n}{30}$, де n – кількість обертів за хвилину двигуна приводу вібраційної системи), тобто $f(t) = b_1 \sin \mu t$.

При розгляді рівняння (5) і (6) припущено, що сили в'язкого тертя є малими порівняно з нелінійно-пружною (відновлюючою) силою в цьому ж шарі, тобто $\beta, \vartheta, \delta << \alpha^2$.

Проведено окремі дослідження динаміки робочого середовища на основі рівнянь (5) та (6), причому: за допомогою рівняння (5) досліджено повздовжні нелінійні коливання шару середовища при його моделюванні однорідною пружно-пластичною балкою, довжина якої набагато перевищує товщину при шарнірному та пружному закріпленні кінців (відповідний контакт середовища з контейнером). Досліджено вплив параметрів, які характеризують нелінійно-пружні властивості середовища на динамічні характеристики шару середовища з метою максимального наближення моделі до відображення реальних вібраційних процесів, що відбуваються в середовищі, та з метою порівняння відповідних характеристик руху середовища (амплітудно-фазові характеристики) у квазілінійних і нелінійних постановках даної задачі.

Розроблення моделі руху шару середовища з нелінійною пружною складовою напружень.

Для побудови моделей в даному випадку було використано математичний апарат спеціальних Ateb-функцій, який включає в себе певний змінний показник, який для опису певних фізичних процесів можна трактувати як показник нелінійності (він залежить від фізико-механічних властивостей робочого середовища). Використовуючи Ateb-функцій можна описати нелінійно математично, а тому і найбільш адекватно, реальні фізичні вібраційні процеси.

Як приклад, розглянемо модель середовища вібраційної системи при його контакті з робочим органом вібраційної системи у виді жорстко закріплених балок. Використовуючи припущення 3 та 4 запропонованої гіпотези руху середовища рівняння з нелінійною пружною складовою напружень (6) трансформується в наступне:

$$u_{tt} - \alpha^2\left(u_{\xi\xi}\right)^{\nu+1} = \varepsilon G(u, u_t, \ldots u_{\xi\xi t}, \mu t), \quad (7)$$

де

$$G(u, u_t, \ldots u_{\xi\xi t}, \mu t) = \left[b_1 \sin \mu t - \vartheta u_t - \delta u_t u^2 + \beta u_{\xi\xi t}\right].$$

Диференціальне рівняння (7) є математичною моделлю руху шару середовища робочого контейнера. При жорсткому контакті середовища і контейнера справедливі крайові умови:

$$u(\xi, t)\big|_{\xi=0} = u(\xi, t)\big|_{\xi=l} = 0.$$

Розв'язок рівняння (7) дозволяє встановити закон руху шару середовища - $u(\xi, t)$.

Методика розв'язання. Як відомо, в реальних механічних системах з багатьма ступенями вільності, а також у системах з розподіленими параметрами наявність сил тертя (як зовнішніх, так і внутрішніх) призводить до швидкого згасання високочастотних коливань і встановлення динамічного процесу з якоюсь однією частотою. Через це у вказаних системах доцільно розглянути так звані одночастотні режими коливань з частотою рівною першій (головній частоті). Останнє значною мірою полегшує методику дослідження збуреного рівняння (7). Для нього побудуємо одночастотні розв'язки. Легко перевірити, що незбурене рівняння (воно описує з фізичної точки зору коливання середовища – при відсутності впливу зовнішніх сил на вібраційну систему, з математичної – права частина рівняння (7) рівна нулеві), яке відповідає (7), тобто рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2\left(u_{\xi\xi}\right)^{\nu+1} = 0, \quad (8)$$

допускає при знаходженні його розв'язку застосування методу відокремлення змінних Фур'є. Представляючи згідно вказаного методу функцію $u(\xi, t)$ у вигляді $u(\xi, t) = \Xi(\xi)T(t)$ для знаходження невідомих функцій $\Xi(\xi)$ і $T(t)$ отримуємо нелінійні диференціальні рівняння:

$$\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}\left(\frac{d\Xi}{d\xi}\right)^{\nu}+\lambda\Xi(\xi)=0,$$
$$\frac{d^2T}{dt^2}+\alpha^2(\nu+1)\lambda T^{\nu+1}(t)=0, \tag{9}$$

де λ - невідомий параметр, який буде визначений нижче.

Виходячи із (8), функція $\Xi(\xi)$ в (9) повинна задовольняти крайові умови:

$$\Xi(0)=\Xi(l)=0. \tag{10}$$

Лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння для функції $\Xi(\xi)$ визначаються за допомогою спеціальних періодичних Ateb-функцій [5] у вигляді:

$$\Xi(\xi)=\Xi_0\left\{\begin{array}{l} sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\left(\lambda\frac{\nu+2}{2\Xi_0}\nu\right)^{\frac{1}{\nu+2}}\xi\right) \\ ca\left(1,\frac{1}{\nu+1},\left(\lambda\frac{\nu+2}{2\Xi_0}\nu\right)^{\frac{1}{\nu+2}}\xi\right)\end{array}\right., \tag{11}$$

де Ξ_0 - стала інтегрування.

В (7) і нижче параметр $\nu+1$ задовольняє умові: $\nu+1=\frac{2n+1}{2m+1}$, де $m,n=0,1,2,.....,$ тобто $\nu>-1$ (при $\nu=0$ нелінійна модель коливань шару середовища перетворюється в лінійну). Останнє не звужує значно множину значень параметра ν, бо завжди з достатньою точністю його можна замінити вказаною раціональною залежністю.

Враховуючи (11) та крайові умови (10), знаходимо λ і розв'язок крайової задачі для функції $\Xi(\xi)$ у вигляді:

$$\lambda=\frac{2\Xi_0^{\nu}}{\nu+2}\left(\Pi_{\xi}\frac{1}{l}\right)^{\nu+2}, \tag{12}$$

$$\Xi(\xi)=\Xi_0 sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\Pi_{\xi}\frac{1}{l}\xi\right), \tag{13}$$

де $2\Pi_{\xi}$ - період використаних спеціальних Ateb-функцій, тобто $2\Pi_{\xi}=2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}$,

$\Pi_{\xi}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}$, $\Gamma(...)$ - гама-функція відповідного аргументу.

Аналогічно розв'язок рівняння для функції $T(t)$, з врахуванням (12), приймає вигляд:

$$T(t)=T_0 ca(\nu+1,1,\omega^*(a)t), \tag{14}$$

де $\omega^{*2}(a)=\alpha^2 a^{\nu}\left(\frac{\Pi_{\xi}}{l}\right)^{\nu+2}$, T_0 - стала, $a=\Xi_0 T_0$.

Таким чином, із (12) і (13) отримуємо власні коливання шару моделі у випадку $G=0$ (одночастотний розв'язок крайової задачі для незбуреного рівняння (8)), який можна записати у вигляді:

$$u(\xi,t)=a\cdot sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\Pi_{\xi}\frac{\xi}{l}\right)ca(\nu+1,1,\psi), \tag{15}$$

де $\psi=\omega^*(a)t+\theta$, а θ - стала.

Розв'язок збуреного рівняння (7) також будемо шукати у вигляді (15), тільки для вказаного випадку згідно методу усереднення [6] a і θ будуть вже функціями параметру t, тобто $a=a(t)$ і $\theta=\theta(t)$. Враховуючи останнє, для визначення $a(t)$ і $\theta(t)$ отримуємо [7], для нерезонансного випадку $\left(\omega(a)\neq\frac{\Pi_T}{\pi}\mu\right)$, систему диференціальних рівнянь руху шару моделі середовища:

$$\dot{a}=\frac{\varepsilon}{\omega^*(a)p}\int_0^l\left(\begin{array}{l}sa(1,\nu+1,\psi)\times\\ \times sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{\Pi_{\xi}}{l}\xi\right)\times\end{array}F_1(a,\xi,\psi,\gamma)\right)dx,$$

$$\dot{\theta}=\frac{\varepsilon(\nu+2)}{2a\omega^*(a)p}\times\int_0^l\left(\begin{array}{l}ca(\nu+1,1,\psi)\times\\ \times sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{\Pi_{\xi}}{l}\xi\right)F_1(a,\xi,\psi,\gamma)\end{array}\right)dx, \tag{16}$$

де

$$P=\Xi_0^2\int_0^l\Xi_0^2(\xi)d\xi=\int_0^l sa^2\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{\Pi_{\xi}}{l}\xi\right)d\xi=$$
$$=\frac{l\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)},$$

$$F_1(a,\xi,\psi,\gamma)=F(u,u_t,...\gamma)\Big|_{u=a\cdot ca(\nu+1,1,\psi)sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{\Pi_{\xi}}{l}\xi\right)},$$

$\gamma=\mu t$.

З врахуванням того, що праві частини диференціального рівняння (16) є періодичними функціями параметрів ψ, γ, а амплітуда і фаза коливань θ за період змінюється на незначну величину, їх можна для нерезонансного випадку записати у вигляді:

$$\dot{a}=\frac{\varepsilon}{4\Pi_T P\omega^*(a)\pi}\int_0^l\int_0^{2\Pi_T}\int_0^{2\pi}\left(sa(1,\nu+1,\psi)\times\right.$$

$$\times sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{\Pi_{\xi}}{l}\xi\right)F_1(a,\xi,\psi,\gamma)\Big)d\gamma d\psi dx = A(a)\,,(17)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon(\nu+2)}{8\Pi_T Pa\omega^*(a)\pi}\int_0^l\int_0^{2\Pi_T}\int_0^{2\pi}\Big(ca(\nu+1,1,\psi)\times$$

$$\times sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\frac{\Pi_{\xi}}{l}\xi\right)F_1(a,\xi,\psi,\gamma)\Big)d\gamma d\psi dx\,.$$

Приймаючи до уваги прийняті гіпотези руху середовища, система диференціальних рівнянь (17) для визначення його АФХ (амплітудно-фазова характеристика) приймає вигляд:

$$\dot{a} = \frac{2\varepsilon\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{l\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{8a\pi\Gamma^2\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{(\nu+2)^2 l\Gamma^2\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)} - \frac{4\vartheta_1\sqrt{\pi}apl\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{(\nu+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{3\delta_1\pi a^3\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{8\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}\times\frac{l}{\Pi_{\xi}}\right\},$$

$\dot{\theta} = 0$.

Із отриманих співвідношень випливає, що у першому наближенні для амплітуди коливань існують два стаціонарні усталені значення, які відповідно рівні:

$a_1 = 0$,

$$a_2 = \sqrt{\frac{\left\{\frac{8\pi\Gamma^2\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{(\nu+2)^2 l\Gamma^2\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)} - \frac{4\vartheta_1\sqrt{\pi}pl\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{(\nu+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)}\right\}}{\left(\frac{3\delta_1\pi\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{8\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}\cdot\frac{l}{\Pi_{\xi}}\right)}}\,.$$

Перше стаціонарне значення відповідає відносному спокою середовища, друге – усталеному динамічному процесу, який стійкий при $A'(a_2) < 0$ і нестійкий у протилежному випадку.

Висновки. Побудована на основі закону Фойгта пружнов'язка модель руху робочого середовища вібраційної системи, яке представлено як суцільне та однорідне у вигляді нашарування плоских пружно-пластичних балок, товщина яких значно менша їх ширини. Побудовано розв'язки отриманих рівнянь руху шару робочого середовища для стаціонарного (усталеного) режиму його руху. З метою опису фізико-механічних властивостей різних типів сипких середовищ у моделі, запропоновано степеневий закон (або близький до нього) зв'язку між деформацією шару середовища і напруженням у ньому. Відповідно введено показник нелінійності ν: а) у пружну складову напружень у законі Фойгта, б) у в'язку складову напружень у законі Фойгта. Побудовані нелінійні рівняння опису коливань довільного шару середовища вібраційної системи. Використовуючи асимптотичні методи нелінійної механіки та спеціальні Ateb-функції, отримані розв'язки даних рівнянь.

Нелінійна модель опису динаміки робочого середовища вібраційних систем з крайовими умовами жорсткого контакту шару середовища з вібраційною системою є більш гнучкою, так як показник нелінійності моделі, який залежить від виду робочого середовища, суттєво впливає на результати коливного процесу середовища, дозволяє врахувати вид середовища, а відповідно збільшувати рівень адекватності самої аналітичної моделі фізиці досліджуваного вібраційного процесу.

Література

1. Субач А.П. Динамика процессов и машин объемной обработки. – Рига: Зинатне, 1991. – 240 с. 4.
2. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с
3. 3.Болотин В.В. "Динамическая устойчивость упругих систем". М., - Гостехиздат. 1956. – 600 с.
4. Стоцько З.А., Топільницький В.Г., Кусий Я.М., Велика О.Т., «Математична модель опису динаміки технологічних середовищ нелінійних механічних систем оброблення та транспортування», Автоматизація виробничих процесів в машинобудуванні та приладобудуванні. Міжгалузевий збірник наукових праць. – 2011, вип. 45, С. 122-128.
5. Сокіл Б.І. Періодичні Ateb-функції в дослідженні одночастотних розв'язків деяких хвильових рівнянь // Праці наукового товариства ім. Шевченка. – 1997. – Т. 1. – С. 588-592.
6. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с.
7. Сокіл Б.І. Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння // Укр.мат.журн. – 1994. – № 6. – С. 782-785.