

Завгородний А. И.  
Хессро Монтасер

Харьковский  
национальный  
технический  
университет  
сельского  
хозяйства имени  
Петра Василенко

УДК 631.362

## ПЕРИОДИЧЕСКИЙ ВИБРОУДАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ ШАРА ПО ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ

Приведені теоретичні дослідження періодичного віброударного руху сферичної частинки по поверхні малогабаритної деки сепаратора, яка виконана у вигляді жолоба з круговим профілем і оснащена відбивачем в нижній його частині.

Theoretical researches of periodic vibration motion of spherical particle are resulted on the surface of small sounding board of separator, which is executed as a chamfer with a circular type and equipped a reflector in his lower part.

**Постановка проблемы.** Одним из направлений повышения производительности безрешетных вибрационных сепараторов [1, 2] является использование малогабаритных дек. Технологические особенности движения частиц обрабатываемого материала, когда в качестве рабочих поверхностей дек использовалась плоскость, изучены в работах [2-7]. Выполнение поверхностей дек в виде желоба с криволинейным профилем даст дополнительное преимущество – возможность влияния на процесс центробежной силой, которая управляется формой профиля. Это вызывает необходимость изучения технологического процесса сепарирования на базе математической модели движения семян по криволинейным поверхностям.

**Анализ последних исследований.** Снабжение малогабаритной деки отражателем [2] и ее периодические колебания дают возможность использовать для сортирования семенных смесей периодический виброударный режим движения, обладающий высокой устойчивостью [3]. Движение семян плоской формы в этом режиме в случае прямолинейного профиля деки изучено в работах [2-4]. Под плоскими подразумевают частицы, которые перемещаются по деке без опрокидывания – не перекатываются. Это стебли растений, мертвые насекомые, комочки грунта, а также семена многих культурных растений, таких как огурцы, арбузы, дыни, тыква, кабачки, патиссоны и др. Движение этих частиц достаточно точно аппроксимируется материальной точкой [1]. Изучалось также

движение округлых (сферических) семян для аналогичного сочетания режима и формы деки [5-7] – это семена рапса, гороха, проса, мака, капусты и др.

**Цель работы.** Движение округлых семян в периодическом виброударном режиме по рабочим поверхностям дек, имеющих криволинейный профиль, до настоящего времени не изучалось. В предлагаемой работе исследуется случай, когда указанный профиль выполнен в виде наиболее распространенной кривой – дуги окружности.

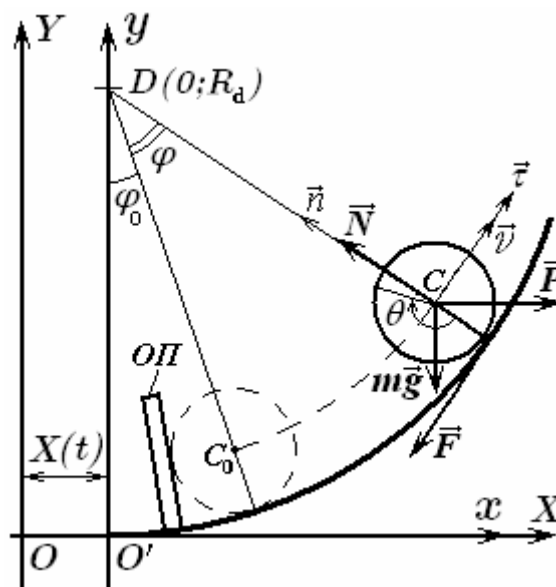


Рис. 1. Расчетная схема движения сферической частицы



**Основное содержание работы.**

Расчетная схема вибрационного перемещения сферической частицы представлена на рис.1. Движение деки отсчитывается от неподвижной системы координат  $XOY$ . Относительная система координат  $xO'y$  жестко связана с декой и движется вместе с ней по гармоническому закону  $X(t) = A \sin \omega t$ . Указанное движение осуществляется в горизонтальной плоскости вдоль оси  $OX$ . В поперечном сечении дека имеет форму дуги окружности радиусом  $R_d$  с центром в точке  $D(0; R_d)$ . В нижней части деки закреплена отражательная пластина – ОП, положение которой в относительной системе координат определяется углом  $\varphi_0$ . Положение самой частицы во время движения будем определять углом  $\varphi$ , который отсчитывается от радиуса окружности, проведенного через центр частицы в момент контакта с пластиной. Таким образом, при  $\varphi = 0$  происходит соударение частицы с пластиной затем отскок частицы и ее качение по деке до тех пор, пока угол  $\varphi$  снова не станет равным нулю. В этот момент опять происходит соударение и т. д. Причем, при периодическом движении промежуток времени между двумя последовательными соударениями равняется периоду колебаний деки:  $T = 2\pi/\omega$ .

На частицу, движущуюся в контакте с декой, в относительной системе координат действуют следующие силы. Сила тяжести  $m\vec{g}$  (направлена противоположно оси  $O'y$ ), нормальная реакция  $\vec{N}$  (направлена вдоль радиуса деки к центру  $D$ ), сила инерции  $\vec{P}$  (направлена вдоль оси  $Ox$ ) и сила трения  $\vec{F}$  (направлена по касательной к профилю деки). С учетом этого дифференциальные уравнения движения частицы в естественных координатах  $\vec{n}, \vec{\tau}$  запишутся так (рис.1):

$$m \frac{V^2}{R_d - r} = N - mg \cos(\varphi + \varphi_0) - P \sin(\varphi + \varphi_0); \quad (1)$$

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos(\varphi + \varphi_0) - mg \sin(\varphi + \varphi_0) - F; \quad (2)$$

$$I\ddot{\theta} = Fr. \quad (3)$$

Рассматривается движение частицы без проскальзывания. В этом случае можно записать следующие уравнения связи:

$$S = \varphi(R_d - r); \quad (4)$$

$$\theta = \frac{\varphi R_d}{r} - \varphi = \varphi \left( \frac{R_d - r}{r} \right). \quad (5)$$

Здесь  $S$  – путь центра тяжести частицы  $C_0C$  (рис.1 – пунктирная).

Далее обозначим:

$$I = m\rho^2 = m\mu r^2; \quad \mu = (\rho/r)^2, \quad (6)$$

где  $\rho$  – радиус инерции частицы,  $0 < \mu < 2/3$  [8].

Совместим начало отсчета времени с моментом соударения частицы с пластиной. Тогда для силы инерции имеем выражение  $P = mA\omega^2 \sin \omega(t + t_y)$ . Величина  $t_y$  характеризует момент соударения частицы с отражательной пластиной (далее – фаза удара).

Из уравнений связи (4), (5) получаем:

$$\frac{dV}{dt} = (R_d - r)\ddot{\varphi}; \quad \ddot{\theta} = \left( \frac{R_d - r}{r} \right) \ddot{\varphi}. \quad (7)$$

Подставив эти соотношения соответственно в уравнения (2), (3), получим систему, из которой можно исключить силу трения и записать дифференциальное уравнение относительно угла  $\varphi$ :

$$(R_d - r)(1 + \mu) \frac{\ddot{\varphi}}{g} = K \cos(\varphi + \varphi_0) \sin \omega(t + t_y) - \sin(\varphi + \varphi_0). \quad (8)$$

Из той же системы находим выражение для силы трения в долях силы тяжести:

$$F^* = \frac{F}{mg} = \frac{\mu}{1 + \mu} \left[ K \cos(\varphi + \varphi_0) \sin \omega(t + t_y) - \sin(\varphi + \varphi_0) \right]. \quad (9)$$

Для нормальной реакции, учитывая что  $V = \dot{S} = \dot{\varphi}(R_d - r)$  (4), из уравнения (1) найдем:

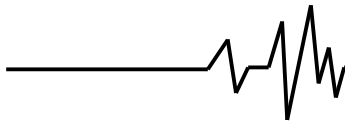
$$N^* = \frac{N}{mg} = (R_d - r) \frac{\dot{\varphi}^2}{g} + \cos(\varphi + \varphi_0) + K \sin(\varphi + \varphi_0) \sin \omega(t + t_y). \quad (10)$$

В соотношениях (8)-(10)  $K = A\omega^2/g$  – коэффициент кинематического режима, характеризующий интенсивность колебаний деки.

Численный анализ движения частицы по уравнениям (8)-(10) удобно проводить, если записать их в безразмерном виде. Введем для этого безразмерное время (в долях периода колебаний деки) и относительную амплитуду колебаний по формулам:

$$\tau = \frac{t}{T}; \quad \varepsilon = \frac{A}{R_d - r}. \quad (11)$$

Тогда  $dt = Td\tau$  и для введения производных по безразмерному времени будем иметь:



$$\dot{\varphi} = \frac{1}{T} \cdot \frac{d\varphi}{d\tau}; \quad \ddot{\varphi} = \frac{1}{T^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}. \quad (12)$$

С учетом этого для уравнений (8) и (10) получим:

$$(R_d - r)(1 + \mu) \frac{\ddot{\varphi}}{g} = \frac{(1 + \mu)}{4\pi^2} \cdot \frac{(R_d - r)}{A} \cdot \frac{A\omega^2}{g} \cdot \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = (1 + \mu) \frac{K}{4\pi^2 \varepsilon} \cdot \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \quad (13)$$

$$(R_d - r) \frac{\dot{\varphi}^2}{g} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{R_d - r}{A} \cdot \frac{A\omega^2}{g} \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{K}{4\pi^2 \varepsilon} \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \quad (14)$$

Отметим еще, что из обозначений (11) вытекает:  $\omega t = 2\pi\tau$ . Теперь, с учетом соотношений (11)-(14) уравнения (8)-(10) запишутся так:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{4\pi^2 \varepsilon}{1 + \mu} \left[ \cos(\varphi + \varphi_0) \sin 2\pi(\tau + \tau_y) - \frac{1}{K} \sin(\varphi + \varphi_0) \right]; \quad (15)$$

$$F^* = \frac{\mu}{1 + \mu} \left[ K \cos(\varphi + \varphi_0) \sin 2\pi(\tau + \tau_y) - \sin(\varphi + \varphi_0) \right]; \quad (16)$$

$$N^* = K \left[ \frac{1}{4\pi^2 \varepsilon} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \sin(\varphi + \varphi_0) \sin 2\pi(\tau + \tau_y) \right] + \cos(\varphi + \varphi_0). \quad (17)$$

Очевидно, что выражения (16), (17) для определения сил могут быть использованы только совместно с уравнением (15), откуда определяется необходимая зависимость  $\varphi = \varphi(t)$ . Указанное уравнение нелинейное, поэтому его решение целесообразно находить численным путем. Особенность численного решения состояла в том, что определялся технологически оправданный периодический режим движения частиц. Это значит, что один цикл движения частицы (от соударения до следующего соударения) происходит в течение одного периода колебаний деки.

Для решения поставленной задачи в среде «Mathcad» была записана программа для функции, которая по значениям  $\tau_y, \Omega_n$ , соответственно, фазы удара –  $\tau_y$  и начальной угловой скорости –  $\Omega_n$  определяла значения  $\varphi_k, \Omega_k$  угла отклонения частицы и угловой скорости в конце периода. Результатом вычисления этой функции был вектор-столбец значений  $\varphi_k, \Omega_k$ :

$$\Phi(\tau_y, \Omega_n) = (\varphi_k, \Omega_k)^T, \quad (18)$$

где T – оператор транспонирования вектора.

В теле программы методом Рунге-Кутты решалось дифференциальное уравнение (15) на интервале, равном безразмерному периоду  $T^* = 1$  с начальными условиями:  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = \Omega_n$  при  $\tau = 0$ . Для определения неизвестных  $\tau_y, \Omega_n$ , задающих периодическое движение, использовался блок «Given – Find». В качестве уравнений, решаемых в этом блоке, были записаны условия периодичности движения:

$$\Phi(\tau_y, \Omega_n)_0 = 0; \quad \Omega_n = -R\Phi(\tau_y, \Omega_n)_1. \quad (19)$$

Они обозначают, что в конце периода движения угол отклонения частицы от пластины должен быть равным нулю (первое уравнение), а угловая скорость после удара о пластину должна равняться начальной угловой скорости (второе уравнение).

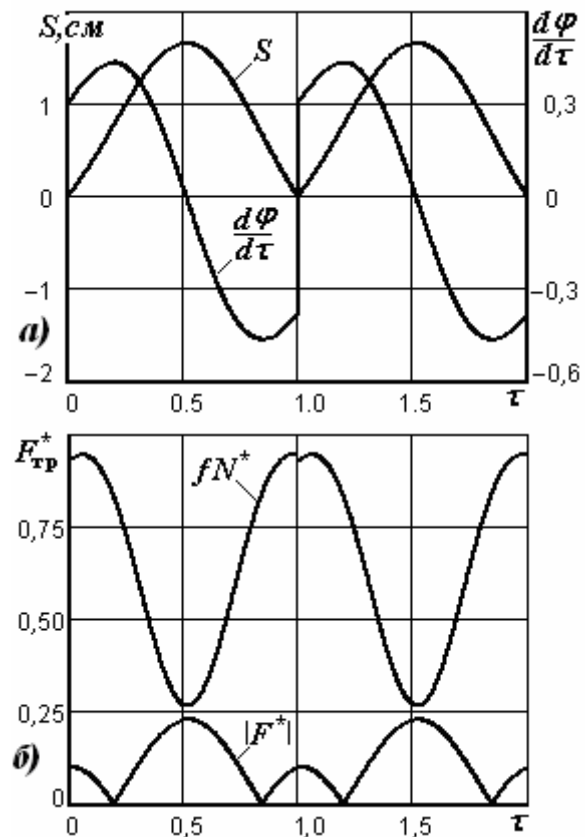
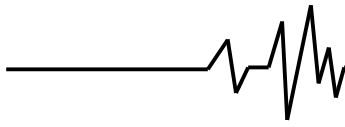


Рис. 2. Характеристики движения сферической частицы при:  $R_d - r = 0,1m$ ,

$$\varphi_0 = 20^\circ, \varepsilon = 0,05, K = 1, f = 0,7, R = 0,8, \mu = 0,2$$

В соотношениях (19) нижние индексы (0 и 1) указывают на обращения к соответствующим компонентам вектора (18) (системная переменная «ORIGIN» в этом случае имеет нулевое значение), а буквой R обозначен коэффициент восстановления скорости при ударе ( $0 \leq R \leq 1$ ).



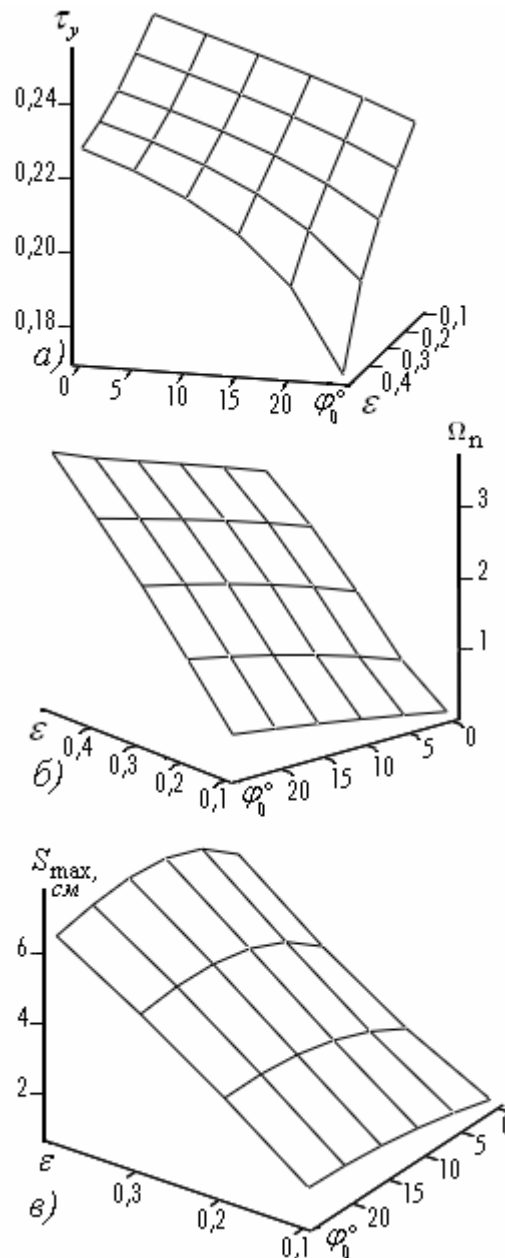
При известных значениях параметров  $\tau_y, \Omega_n$ , найденных из системы (19), реализуется периодическое движение частицы. Пример такого движения (путь  $S$ , пройденный вдоль дуги окружности, угловая скорость, соотношение сил) на протяжении двух периодов показан на рис.2. Для нахождения решения  $\varphi = \varphi(\tau)$  уравнения (15), непрерывно зависящего от времени  $\tau$ , в среде «Mathcad» имеется блок «Given – Odesolve», который и был использован для построения графиков (рис.2). Это дало возможность определять угловую скорость движения частицы дифференцированием (рис.2 а), а также вычислять силы трения и нормальной реакции непосредственно по выражениям (16), (17) (рис.2 б).

Движение частицы по деке будет безотрывным, если нормальная реакция деки будет сохранять неотрицательное значение ( $N^* \geq 0$ ). При этом, если возникающая сила трения по абсолютной величине не будет превосходить максимально возможную ( $F^* \leq F_{\max}^* = f N^*$ ), то будет наблюдаться движение частицы без проскальзывания ( $f$  – коэффициент трения). Как видим, для принятых значений параметров (рис.2 б), указанные условия выполняются и, следовательно, частица перемещается по деке в периодическом безотрывном режиме без проскальзывания.

Наиболее «опасной» областью движения, в которой может произойти проскальзывание и даже отрыв частицы от поверхности деки, является область максимального удаления частицы от отражательной пластины (вблизи полупериода), где частица изменяет направление движения, а реакция  $N^*$  принимает наименьшее значение. Это объясняется тем, что в указанной области скорость частицы близка к нулю (рис.2 а) и центробежная сила инерции, прижимающая частицу к поверхности деки, практически не действует. Этим же эффектом объясняется и то, что наибольшие значения реакции  $N^*$  наблюдаются там, где скорости движения частицы принимают также наибольшие значения.

В момент удара (в конце каждого периода движения) нормальная реакция  $N^*$  имеет некоторый скачок, что объясняется разностью скоростей движения частицы до и после удара, определяемой коэффициентом восстановления  $R$  (при  $R=1$  указанные скорости по абсолютному значению равны и скачок реакции  $N^*$  отсутствует).

Для упрощения восприятия рисунка вместо графика изменения угловой координаты  $\varphi$  приведен график отклонения ( $S, \text{см}$ ) центра тяжести частицы от отражательной пластины в сантиметрах. Указанное отклонение достигает максимального значения ( $S_{\max}$ ) примерно к середине периода движения. В конце каждого периода график перемещения  $S$  имеет излом, а скорость изменения угла  $\varphi$  – скачок, что есть следствием эффекта соударения.

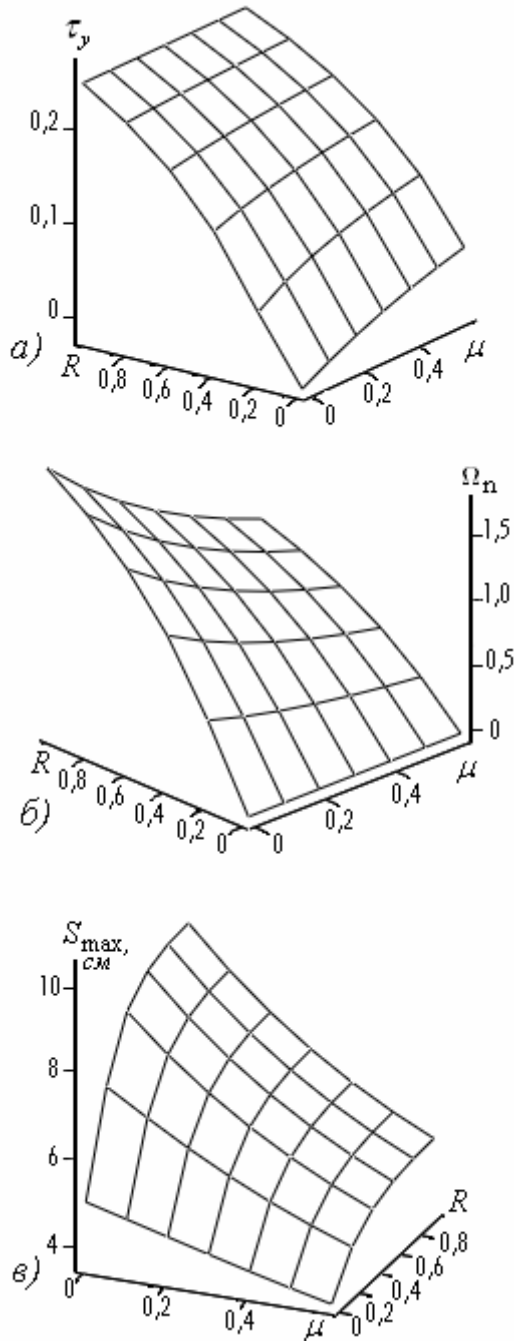


**Рис. 3. Зависимость фазы удара, начальной угловой скорости и размаха качаний частицы от параметров  $\varepsilon, \varphi_0^\circ$**   
при:  $R_d - r = 0,1 \text{ см}$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $R = 0,8$ ,  $K = 1,2$

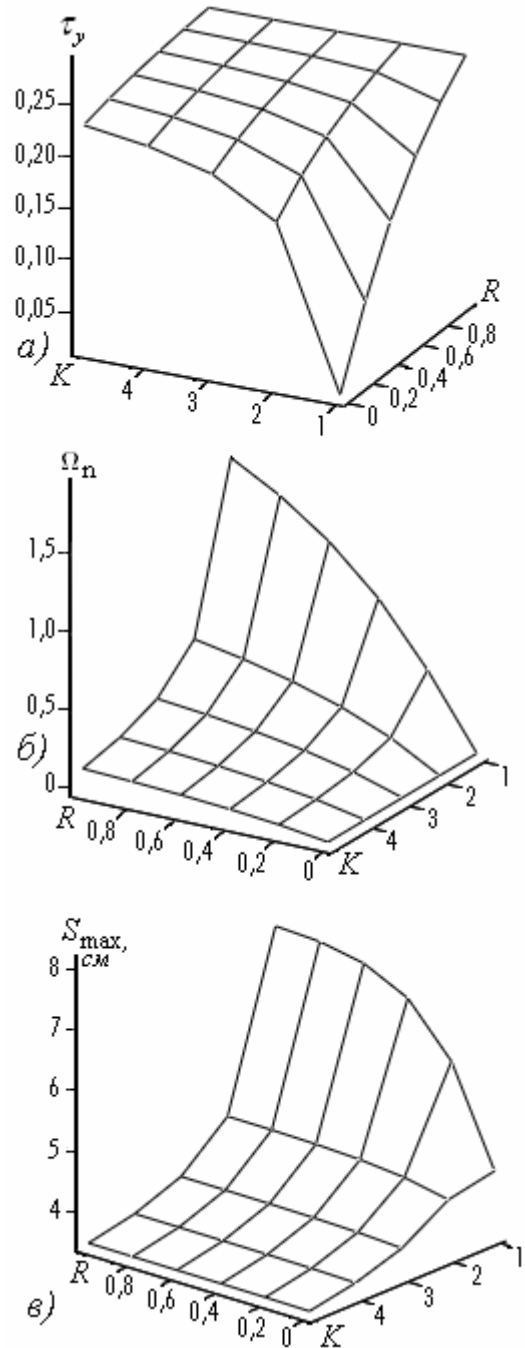


На рис. 3-5 на основани расчета построены графики изменения фазы удара –  $\tau_y$ , начальной угловой скорости –  $\Omega_n$  и размаха качаний частицы по деке –  $S_{max}$  в зависимости от: угла установки отражательной пластины –  $\varphi_0$

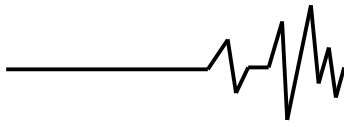
и относительной амплитуды колебаний –  $\varepsilon$  (рис.3); коэффициента восстановления скорости –  $R$  и показателя инертности вращения частицы –  $\mu$  (рис.4); коэффициентов –  $R$  и  $K$  (рис. 5).



**Рис. 4. Зависимость фазы удара, начальной угловой скорости и размаха качаний частицы от параметров  $R, \mu$  при:  $R_d - r = 0,1\text{см}$ ,  $\varepsilon = 0,2$ ,  $\varphi_0 = 10^\circ$ ,  $K = 1$**



**Рис. 5. Зависимость фазы удара, начальной угловой скорости и размаха качаний частицы от параметров  $R, K$  при:  $R_d - r = 0,1\text{см}$ ,  $\varepsilon = 0,2$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $\varphi_0 = 10^\circ$**



Отметим, что основным технологическим параметром, по которому происходит разделение смеси на малогабаритных деках, является размах качаний частицы по деке в относительном движении (максимальное удаление  $-S_{\max}$  от отражательной пластины).

При постоянной величине  $R_d - r$  изменение показателя  $\varepsilon$  можно трактовать как изменение амплитуды колебаний деки (11). С ростом указанной амплитуды размах  $S_{\max}$  увеличивается, что и следовало ожидать. Движение с большим размахом требует большего значения угловой скорости  $\Omega_n$  (рис.3 б), что достигается при увеличении скорости отражательной пластины ( $A\omega \cos 2\pi\tau_y$ ) с увеличением фазы удара  $\tau_y$  (рис.3 а).

С ростом угла  $\varphi_0$  установки отражательной пластины частица движется по более "крутой" траектории, что требует большей угловой скорости (рис.3 б) и, следовательно, большей интенсивности взаимодействия с отражательной пластиной при меньшей фазе удара (рис.3 а). Однако размах  $S_{\max}$  при изменении угла  $\varphi_0$  имеет экстремум (рис.3 в). При нулевом положении пластины ( $\varphi_0 = 0$ ) ее взаимодействие с частицей происходит с минимально возможной относительной скоростью, которая затем растет с увеличением угла  $\varphi_0$ . Вместе с тем начинают проявляться в большей степени упругие свойства частицы, что и приводит к росту размаха  $S_{\max}$ . Но при этом касательная составляющая силы инерции ( $P \cos \varphi_0$ ), способствующая раскачиванию частицы, уменьшается и, как следствие, последующее падение размаха  $S_{\max}$ . Величину угла установки отражательной пластины, при которой наблюдается наибольший размах качаний частицы, следует считать оптимальной.

Величина  $\mu$  (6) характеризует инертность вращения частицы. С ее увеличением угловая скорость  $\Omega_n$  и размах  $S_{\max}$  падают, а фаза удара  $\tau_y$  незначительно возрастает (рис. 4). При неупругом ударе ( $R = 0$ ) угловая скорость  $\Omega_n$  частицы после удара независимо от значения  $\mu$  становится равной нулю (рис.4 б). При абсолютно упругом ударе ( $R = 1$ ) фаза равна четверти периода ( $\tau_y = 0,25$ , рис.4 а), то есть удар происходит в момент, когда отражательная пластина становится

неподвижной ( $\dot{X}(\tau_y) = A\omega \cos 2\pi\tau_y = A\omega \cos 0,5\pi = 0$ ). Это и понятно, так как при  $R = 1$  отсутствуют потери на удар и скорости частицы до и после удара по абсолютной величине равны.

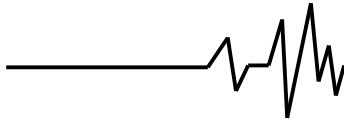
С увеличением упругости ( $R$ ) фаза удара  $\tau_y$ , угловая скорость  $\Omega_n$  и размах  $S_{\max}$  возрастают (рис.4-5). Это связано с повышением интенсивности взаимодействия частицы с отражательной пластиной (снижением затрат на удар). Соответствующая компенсация повышения указанного взаимодействия происходит за счет снижения скорости движения пластины с увеличением фазы удара  $\tau_y$ .

Увеличение интенсивности колебаний ( $K$ ) приводит к снижению угловой скорости  $\Omega_n$  (рис.5 б), размаха  $S_{\max}$  (рис.5 в) и увеличению фазы удара  $\tau_y$  (рис.5 а) вплоть до четверти периода. Все это объясняется тем, что при быстрых движениях деки частица в абсолютном движении остается практически неподвижной. При этом ее взаимодействие с отражательной пластиной происходит при скорости пластины, близкой к нулю ( $\tau_y \rightarrow 0,25$ ), а размах  $S_{\max}$  приближается к некоторому постоянному значению, не зависящему от упругости ( $R$ ) частицы. Напротив, при невысокой интенсивности колебаний деки (например, при  $K = 1$ , рис.5 в) размах  $S_{\max}$  существенно зависит от упругости частицы, возрастая более, чем в 3 раза при изменении коэффициента  $R$  от нуля до единицы.

### Выводы

1. На основе полученного дифференциального уравнения и выражений для действующих сил в среде «Mathcad» разработана программа, описывающая безотрывный периодический виброударный режим движения округлой частицы без скольжения по колеблющейся деке в форме цилиндрического желоба, снабженного отражательной пластиной. Показано, что нарушение указанного режима наиболее возможно в области максимального удаления частиц от отражательной пластины, где нормальная реакция принимает минимальное значение.

2. Критерием разделения смесей малогабаритными деками является размах колебательного движения частиц по деке. Упругие частицы имеют больший размах, чем неупругие, что говорит о возможности разделения частиц по их физико-механическим



свойствам на малогабаритных деках с криволинейным профилем. Среди регулируемых параметров наибольшее влияние на указанный размах оказывает амплитуда колебаний деки, причем рост размаха с увеличением амплитуды близок к линейному.

3. Существует оптимальный угол установки отражательной пластины, при котором достигается наибольший размах колебательного движения частиц при фиксированных значениях остальных параметров. Например, при  $\varepsilon = 0,3$  и данных, указанных на рис.3 в, этот угол равен  $\varphi_0 \approx 15^\circ$ . Указанный угол может быть найден как результат решения задачи на экстремум.

4. Наилучший эффект разделения смеси для рассмотренного режима движения частиц может достигаться при значении коэффициента кинематического режима близком к минимально допустимому. При высоких значениях этого коэффициента частицы с различными свойствами будут перемещаться по близким траекториям, что делает разделение смеси практически невозможным.

#### Литература

1. Заика П.М., Мазнев Г.Е. Сепарация семян по комплексу физико-механических свойств.– М.: Колос, 1978.– 240с.
2. Завгородний А.И., Обыхвост А.В. Периодический режим движения частиц по деке вибросепаратора // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал.– Харків. ХНТУСГ, 2003.– Вип.6.– С.43.
3. Завгородний А.И., Обыхвост А.В. Устойчивость периодического режима

движения частиц по деке вибросепаратора // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал.– Полтава. ПНТУ ім. Юрія Кондратюка, 2006. – Вип.1.– С.37.

4. Завгородній О.І., Обихвіст О.В. Періодичний рух частинок в процесі вібросепарації з упрощенням зміни напрямку коливань деки // Науковий вісник НАУ, №92, Ч.1, 2005.– С.228-238.

5. Завгородний А.И., Обыхвост А.В., Тарасенко Д.В. Уравнения периодического виброударного движения сферической частицы по деке вибросепаратора. “Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробки та харчових виробництв”: Вісник ХНТУСГ імені Петра Василенка, Вип.88.– Харків, 2009.– С.62-70.

6. Завгородний А.И., Романюк Г.С., Шептур А.А., Обыхвост А.В. Обеспечение технологического режима движения сферической частицы по деке вибросепаратора. “Механізація сільськогосподарського виробництва”: Вісник ХНТУСГ імені Петра Василенка, Т.1, Вип.93.– Харків, 2010.– С.205-214.

7. Завгородний А.И., Романюк Г.С., Обыхвост А.В. О разделяющей способности вибросепаратора с малогабаритными деками. “Механізація сільськогосподарського виробництва та переробки сільськогосподарської продукції”: Вісник ХНТУСГ імені Петра Василенка, Вип.103.– Харків, 2010.– С.338-344.

8. Завгородний А.И., Обыхвост А.В. К исследованию движения частиц округлой формы по рабочим поверхностям машин. “Галузеве машинобудування, Будівництво”: Зб. наук. праць ПНТУ імені Юрія Кондратюка, Вип. 3(25), Т. 1, Полтава, 2009.– С.119-125.