І. ТЕОРІЯ ПРОЦЕСІВ ТА МАШИН

Булгаков В. М.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Зотов А. М.

Скориков М. А.

Національний інститут винограду і вина "Магарач" НААН України

Купчук І. М.

Вінницький національний аграрний університет

УДК 534.1

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ СУЦІЛЬНО–ПРУЖНОГО ТІЛА З ОДНИМ ЗАКРІПЛЕНИМ КІНЦЕМ

Представлена теория колебаний сплошного упругого тела, один конец которого закреплён. Применён принцип стационарного действия Остроградского-Гамильтона. С помощью метода Ритца получено уравнение частот Ритца для рассматриваемого колебательного процесса. В частности, получены аналитические выражения для нахождения первой и второй собственных частот колебания тела и амплитуды вынужденных колебаний его произвольного поперечного сечения.
Ключевые слова: *колебания, сплошное упругое тело, принцип стационарного действия, уравнение Ритца, частота, амплитуда.*

The theory of oscillations of the solidelastic body which one end is fixed is presented. The Ostrogradskiy-Hamiltonprinciple of stationary action is applied. By means of Ritzmethod the Ritzequation of frequencies for considered oscillating process is gained. In particular, the analytical forms for determination of the first and second fundamental frequencies of body and amplitude oscillationof forced oscillations of its arbitrary cross-section are gained.
Keywords: *oscillations, solidelastic body, principleof stationary action, Ritzequation, frequency, amplitude.*

Вступ. Дослідження коливань суцільно-пружних тіл мають значний науковий інтерес, оскільки можуть бути успішно використаними у багатьох технологічних процесах, зокрема у сільському господарстві при вібраційному викопуванні коренеплодів цукрових буряків. На базі представленої в [1] загальної теорії коливань прямих стержнів змінного поперечного перерізу нами розглянуті коливання суцільно-пружного тіла з одним закріпленим кінцем. Прикладом такого тіла може бути розташований у ґрунті коренеплід цукрового буряка, причому, що дуже істотно оточуючий коренеплід грунт також є пружним середовищем.

Мета дослідження. Розробити основні принципи теорії коливань суцільно-пружного тіла з одним закріпленим кінцем.

Основний зміст дослідження. Розглянемо випадок, коли коливальні рухи до вказаного суцільно-пружного тіла будуть надаватись безпосередньо в повздовжньо-вертикальній площині (цьому положенню буде відповідати приклад, коли коренеплоду, що знаходиться у незруйнованому ґрунті будуть надаватись зусилля від вібраційного викопуючого робочого органу при його вилученні з ґрунту).

Для дослідження коливань голономних систем з нескінченним числом степенів вільності, як правило, застосовують принцип стаціонарної дії Остроградського-Гамільтона [1]. В теорії повздовжніх, крутильних і поперечних коливань прямих стержнів застосовуються функціонали Остроградського-Гамільтона, які в найбільш загальній формі мають такий вигляд [1]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{l} L\left(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx\,dt. \quad (1)$$

де $L = T - П$ – функція Лагранжа; T – кінетична енергія системи; $П$ – потенціальна енергія системи.

Застосуємо принцип Остроградського-Гамільтона для дослідження повздовжніх коливань суцільно-пружного тіла, які відбуваються під дією вертикальної збурюючої сили, яка змінюється за гармонійним законом такого вигляду:

$$Q_{зб.}(t) = H \sin \omega t, \quad (2)$$

де H – амплітуда вимушених коливань; ω – частота вимушених коливань.

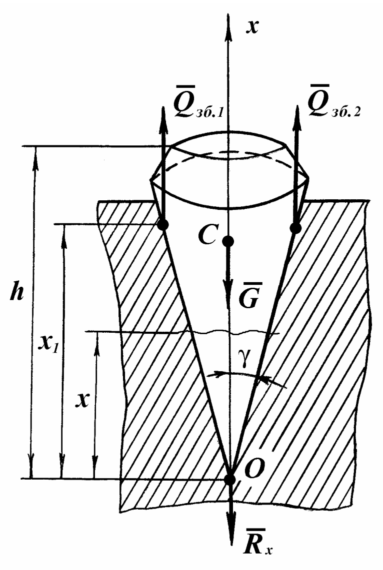

Рис. 1. Схема сил, які діють на суцільно-пружне тіло (коренеплід) в момент прикладання вертикальної збурюючої сили з двох його боків

Як бачимо зі складеної схеми (рис. 1), суцільно-пружне тіло – коренеплід, який має конусоподібне тіло (кут при вершині якого дорівнює 2γ, а верхня частина знаходиться дещо вище рівня поверхні ґрунту), моделюється як стержень змінного поперечного перерізу з закріпленим нижнім кінцем (точка O). В центрі ваги, що позначений точкою C, прикладена сила $\overline{G}$ – вага тіла. Загальна його довжина – h. Зв'язок тіла з ґрунтом визначається загальною реакцією ґрунту $\overline{R}_x$, яка розташована вздовж осі x.

Зазначена вище збурююча сила $\overline{Q}_{зб.}$ прикладається до тіла відразу від двох його боків, а тому на схемі вона представлена двома складовими $\overline{Q}_{зб.1}$ та $\overline{Q}_{зб.2}$. Дані сили прикладені на відстані x_1 від початку координат (точки O) і саме вони викликають коливання тіла (коренеплоду) в повздовжньо-вертикальній площині, які руйнують його зв'язки з ґрунтом і створюють для останнього умови вилучення.

Складемо функціонал S Остроградського-Гамільтона для вібраційного процесу, який розглядається. З цією метою введемо такі необхідні позначення:

$F(x)$ – площа поперечного перерізу тіла в будь-якій точці, що знаходиться на відстані x від нижнього кінця, $(м^2)$; E – модуль Юнга для матеріалу тіла, $\left(\frac{H}{м^2}\right)$; $y(x,t)$ – повздовжнє зміщення будь-якого поперечного перерізу тіла в момент часу t, $(м)$; $Q(x,t)$ – інтенсивність повздовжнього зовнішнього навантаження, напрямленого вздовж осі тіла, $\left(\frac{H}{м}\right)$; $\mu(x)$ – погонна маса тіла, $\left(\frac{кг}{м}\right)$.

Згідно [1] функціонал Остроградського-Гамільтона для повздовжніх коливань прямих стержнів має вигляд:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left[\mu(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - EF(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + Q(x,t)\,y\right] dx\,dt. \quad (3)$$

Знайдемо далі вирази всіх величин, які входять у функціонал (3). Враховуючи, що тіло має форму конуса, знаходимо, що площа його поперечного перерізу $F(x)$ в точці, яка знаходиться на довільній відстані x від точки O, буде дорівнювати

$$F(x) = \pi x^2 tg^2\gamma . \qquad (4)$$

Очевидно, що погонну масу тіла можна визначити за допомогою такого виразу

$$\mu(x) = \rho \cdot \pi x^2 tg^2\gamma , \qquad (5)$$

де ρ – густина тіла $\left(\frac{кг}{м^3}\right)$.

Оскільки величина $Q(x,t)$, що входить у функціонал (3), є інтенсивністю розподіленого навантаження, яке вимірюється в $\left(\frac{H}{м}\right)$, то збурююче зусилля повинне мати розмірність інтенсивності навантаження. За допомогою імпульсивної функції першого порядку $\sigma_1(x)$ [1] можна визначати інтенсивність зосередженого навантаження і таким чином включати в склад розподіленого по довжині навантаження зосереджені сили.

Отже, якщо $Q_{зб.}(t)$ – зосереджена збурююча сила, яка прикладена в точці x_1 і вимірюється в ньютонах, то функція

$$Q_{зб.}(x,t) = Q_{зб.}(t) \cdot \sigma_1(x - x_1) \qquad (6)$$

має розмірність $\left(\frac{H}{м}\right)$ і виражає інтенсивність зосередженого навантаження в точці x_1.

Функція $\sigma_1(x - x_1)$ дорівнює нулю для всіх x, крім $x = x_1$, де вона перетворюється в нескінченність.

Нехай збурююча сила, що діє за законом (2), прикладена до тіла на відстані x_1 від початку відліку (точка O на рис. 1). Тоді згідно (6) можна написати такий вираз:

$$Q_{зб.}(x,t) = H \sin\omega t \cdot \sigma_1(x - x_1). \qquad (7)$$

Оскільки суцільно-пружне тіло зв'язане з ґрунтом, який також є пружним середовищем, то при дії на нього збурюючої сили (2) виникає сила опору ґрунту переміщенню тіла при його коливаннях. Ця сила також впливає на процес власних коливань тіла в ґрунті, особливо на початку коливального процесу, поки його зв'язки з ґрунтом ще непорушені.

Очевидно, що сила опору ґрунту (для усього тіла) є розподіленим навантаженням по площі контакту тіла з ґрунтом, а тому визначимо її інтенсивність як силу опору ґрунту переміщенню одиниці довжини тіла.

Нехай c – коефіцієнт пружної деформації ґрунту, віднесений до площі контакту, який вимірюється в $\left(\frac{H}{м^2}\right)$. Будемо вважати, що оточуючий тіло ґрунт, під дією збурюючої сили $H \sin\omega t$, здійснює вимушені коливання за тим же само гармонійним законом з амплітудою, яка визначається пружними властивостями ґрунту. Тоді інтенсивність $P(x,t)$ опору ґрунту переміщенню тіла в точці x буде дорівнювати:

$$P(x,t) = 2\pi cx \cdot tg\gamma \cdot \sin\omega t, \quad \left(\frac{H}{м}\right). \qquad (8)$$

Таким чином, будемо мати таке співвідношення для повздовжнього зовнішнього навантаження:

$$Q(x,t) = Q_{зб.}(x,t) - P(x,t).$$

Враховуючи вирази (4), (5), (7) і (8), функціонал Остроградського-Гамільтона (3) набуде такого вигляду:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left\{\rho \cdot \pi x^2 tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - E\pi x^2 \cdot tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left[H\sin\omega t \cdot \sigma_1(x - x_1) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\pi cx \cdot tg\gamma \cdot \sin\omega t\right] y(x,t)\right\} dx\,dt. \qquad (9)$$

Для знаходження власних форм і частот повздовжніх коливань тіла в ґрунті застосуємо метод Рітца [1]. Згідно даного методу, ми будемо шукати гармонійні повздовжні коливання коренеплоду у такому вигляді:

$$y(x,t)=\varphi(x)\sin(pt+\alpha), \qquad (10)$$

де $\varphi(x)$ – власна форма головних коливань; p – власна частота головних коливань.

Оскільки власні форми і власні частоти зв'язані з вільними коливаннями системи, необхідно у функціоналі (9) виділити ту частину, яка описує саме вільні коливання системи. Очевидно, що це буде функціонал такого вигляду

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left[\rho\pi x^2tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-E\pi x^2tg^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dxdt. \qquad (11)$$

Підставимо вираз (10) у функціонал (11), отримаємо:

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\Big\{\rho\cdot\pi x^2\cdot tg^2\gamma\cdot\varphi^2(x)\cdot p^2\cdot\cos^2(pt+\alpha)-$$
$$-E\pi x^2\cdot tg^2\gamma[\varphi'(x)]^2\sin^2(pt+\alpha)\Big\}dx\,dt. \qquad (12)$$

Проінтегруємо вираз (12) по t в межах одного періоду $T=\dfrac{2\pi}{p}$, матимемо:

$$S_2=\frac{\pi}{2p}\int_{o}^{h}\Big\{\rho\pi x^2tg^2\gamma\varphi^2(x)p^2-$$
$$-E\pi x^2tg^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2\Big\}dx. \qquad (13)$$

Згідно методу Рітца значення функціоналу (13) розглядаються на сукупності лінійних комбінацій функцій, тобто виразів, що мають наступний вигляд:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\psi_i(x), \qquad (14)$$

де α_i – параметри, варіаціями яких ми отримуємо потрібний клас допустимих функцій; $\psi_i(x)$ – базисні функції, які спеціально вибираються і є відомими функціями, що задовольняють геометричним граничним умовам задачі.

Таким чином, підставляємо вираз (14) у вираз (13), після відповідних перетворень отримаємо:

$$S_2=\frac{\pi}{2p}\int_{0}^{h}\Bigg[\rho\cdot\pi x^2\cdot tg^2\gamma\cdot p^2\sum_{i,k=1}^{n}\psi_i(x)\cdot\psi_k(x)\,\alpha_i\cdot\alpha_k-$$
$$-E\pi x^2\cdot tg^2\gamma\sum_{i,k=1}^{n}\psi_i'(x)\cdot\psi_k'(x)\alpha_i\cdot\alpha_k\Bigg]dx. \qquad (15)$$

Введемо далі такі позначення:

$$\int_{o}^{h}\rho\cdot\pi x^2\cdot tg^2\gamma\cdot\psi_i(x)\cdot\psi_k(x)\,dx=T_{ik},$$
$$\int_{o}^{h}E\pi x^2\cdot tg^2\gamma\cdot\psi_i'(x)\cdot\psi_k'(x)\,dx=U_{ik}, \qquad (16)$$
$$(i,k=1,2,\dots,n).$$

Підставимо (16) в (15), отримаємо функціонал у вигляді функції від параметрів $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$:

$$S_2(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\frac{\pi}{2p}p^2\sum_{i,k=1}^{n}T_{ik}\alpha_i\alpha_k-$$
$$-\frac{\pi}{2p}\sum_{i,k=1}^{n}U_{ik}\alpha_i\alpha_k. \qquad (17)$$

Дослідимо на екстремум функціонал (17). Для цього продиференціюємо вираз (17) по параметрах α_i, $(i = 1,2,...,n)$ та прирівняємо до нуля отримані частинні похідні. В результаті отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, з якої, в свою чергу, знаходимо рівняння частот Рітца для повздовжніх коливань суцільно-пружного тіла, закріпленого в ґрунті:

$$\begin{vmatrix} U_{11} - p^2T_{11} & U_{12} - p^2T_{12} & ... & U_{1n} - p^2T_{1n} \\ U_{21} - p^2T_{21} & U_{22} - p^2T_{22} & ... & U_{2n} - p^2T_{2n} \\ ...... & ...... & ...... & ...... \\ U_{n1} - p^2T_{n1} & U_{n2} - p^2T_{n2} & ... & U_{nn} - p^2T_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

На практиці, як правило, визначають лише нижчі частоти, найчастіше першу і другу, які найбільш істотно впливають на технологічний процес, що розглядається.

Тому визначимо першу і другу частоти власних коливань.

Для визначення першої та другої частоти рівняння (18) набуде такого вигляду:

$$\begin{vmatrix} U_{11} - p^2T_{11} & U_{12} - p^2T_{12} \\ U_{21} - p^2T_{21} & U_{22} - p^2T_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

В результаті розв'язування даного рівняння отримуємо вирази для знаходження значення першої (основної) частоти:

$$p_1 = \frac{0,662422}{h}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (20)$$

та другої частоти:

$$p_2 = \frac{27,931592}{h}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (21)$$

Обчислимо значення першої і другої частоти для суцільно-пружного тіла, прикладом якого може бути коренеплід цукрового буряка з наступними параметрами [2]: $h = 250$ [*мм*]; $E = 18,4 \cdot 10^6$ [*Н/м*^{2}]; $\rho = 1300$ [*кг/м*^{3}]. В результаті обчислень отримаємо:

$$p_1 = \frac{0,662422}{250 \cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{18,4 \cdot 10^6}{1300}} = 315 \quad \left(c^{-1}\right),$$

$$p_2 = \frac{27,931592}{250 \cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{18,4 \cdot 10^6}{1300}} = 13292 \quad \left(c^{-1}\right).$$

Перейдемо далі до дослідження вимушених коливань суцільно-пружного тіла. Чисто вимушені коливання будуть відбуватися згідно закону

$$y(x,t) = \varphi(x) \sin \omega t, \quad (22)$$

де $\varphi(x)$ – форма вимушених коливань.

Для визначення форми вимушених коливань тіла підставимо вираз (22) у функціонал (9), отримаємо наступний функціонал:

$$S_3 = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\Big\{\rho\pi\, x^2tg^2\gamma\omega^2\varphi^2(x)\cos^2\omega t - E\pi\, x^2tg^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2\sin^2\omega t + \left[H\sigma_1(x - x_1) - 2\pi cxtg\gamma\right]\, \varphi(x)\sin^2\omega t\Big\}dx\,dt. \quad (23)$$

Проінтегруємо вираз (23) по t в межах одного періоду $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, матимемо:

$$S_4 = \frac{\pi}{2\omega}\int_{o}^{h}\Big\{\rho\pi x^2tg^2\gamma\varphi^2(x)\omega^2 - E\pi x^2tg^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2 + H\sigma_1(x - x_1)\varphi(x) - 2\pi cxtg\gamma\varphi(x)\Big\}dx. \quad (24)$$

Згідно методу Рітца розглянемо значення функціоналу (24) на сукупності лінійних комбінацій наступного вигляду

$$\varphi(x) = \alpha\, \psi(x), \quad (25)$$

де α – параметр, варіюванням якого ми отримуємо клас допустимих функцій; $\psi(x)$ – базисна функція.

Підставимо вираз (25) у функціонал (24), отримаємо:

$$S_4 = \frac{\pi}{2\omega}\int_o^h \Big\{ \rho\pi x^2 tg^2\gamma\alpha^2\psi^2(x)\omega^2 - E\pi x^2 tg^2\gamma\alpha^2 \left[\psi'(x)\right]^2 + \\ + H\sigma_1(x-x_1)\alpha\psi(x) - 2\pi c\, x tg\gamma\,\alpha\,\psi(x)\Big\} dx. \tag{26}$$

Введемо такі позначення:

$$\int_0^h \rho\,\pi\, x^2 \cdot tg^2\gamma \cdot \psi^2(x)\, dx = T\,, \tag{27}$$

$$\int_0^h E\,\pi\, x^2 \cdot tg^2\gamma \cdot \left[\psi'(x)\right]^2 dx = U\,, \tag{28}$$

$$\int_0^h \left[H\sigma_1(x-x_1)\cdot\psi(x) - 2\,\pi\, c\, x \cdot tg\gamma \cdot \psi(x) \right] dx = L\,. \tag{29}$$

Підставимо вирази (27), (28), (29) у (26), матимемо

$$S_4(\alpha) = \frac{\pi}{2\,\omega}\left(\omega^2 T\alpha^2 - U\alpha^2 + L\,\alpha\right) \tag{30}$$

Отже, на сукупності функцій (25) функціонал (26) перетворюється у функцію від незалежної змінної α, що має вигляд (30).

Необхідною умовою стаціонарності функціоналу (30) (тобто існування екстремуму) є рівність нулю його першої варіації, а саме:

$$\frac{\partial S_4}{\partial\alpha}\cdot\delta\alpha = 0\,, \tag{31}$$

звідки отримуємо наступне рівняння:

$$2\omega^2 T\alpha - 2U\alpha + L = 0\,, \tag{32}$$

з якого знаходимо необхідне значення параметра α. Воно буде дорівнювати:

$$\alpha = \frac{L}{2\left(U - \omega^2 T\right)}. \tag{33}$$

Приймемо за базисну функцію $\psi(t)$ форму вимушених повздовжніх коливань стержня постійного поперечного перерізу з одним жорстко закріпленим кінцем, що виникають під дією повздовжньої гармонійної сили частоти ω, прикладеної в точці $x = x_1$.

Згідно [1] форма вимушених коливань згаданого стержня має такий вигляд:

$$\psi(x) = D_1 \sin ax \quad \text{при} \quad x \le x_1, \tag{34}$$

$$\psi(x) = D_2 \cos a\,(h-x) \quad \text{при} \quad x > x_1, \tag{35}$$

де

$$D_1 = -\frac{1}{a\,EF}\cdot\frac{\cos a\,(h - x_1)}{\cos a h}, \tag{36}$$

$$D_2 = -\frac{1}{aEF}\cdot\frac{\sin a x_1}{\cos a h}, \tag{37}$$

$$a = \omega\sqrt{\frac{\mu}{EF}}\,, \tag{38}$$

μ – погонна маса стержня; F – площа поперечного перерізу стержня; E – модуль Юнга для матеріалу стержня; h – довжина стержня; ω – частота вимушених коливань стержня.

Обчисливши параметри T, U і L згідно виразів (27), (28) і (29), отримаємо необхідне значення параметра α згідно виразу (33), при якому функціонал (26) матиме стаціонарне значення,

$$\alpha = \frac{-HD_1 \sin ax_1 + HD_2\left[\cos a\left(h-x_1\right)-1\right] - 2D_1\pi c\cdot tg\gamma\left(\frac{\sin ax_1}{a^2}-\frac{x_1\cos ax_1}{a}\right) - 2D_2\pi c\cdot tg\gamma\left[\frac{x_1}{a}\sin a\left(h-x_1\right)-\frac{1}{a^2}\cos a\left(h-x_1\right)+\frac{1}{a^2}\right]}{\begin{gathered}2E\pi\, tg^2\gamma\left[D_1^2\left(\frac{a^2x_1^3}{6}+\frac{x_1^2 a\cdot\sin 2ax_1}{4}+\frac{x_1\cos 2ax_1}{4}-\frac{\sin 2ax_1}{8a}\right)-D_2^2\left(\frac{a^2\left(x_1^3-h^3\right)}{6}+\frac{x_1^2 a\sin\left(2ah-2ax_1\right)}{4}+\frac{h}{4}-\right.\right.\\ \left.\left.-\frac{x_1\cos\left(2ah-2ax_1\right)}{4}-\frac{\sin\left(2ah-2ax_1\right)}{8a}\right)\right]-2\omega^2\rho\pi\, tg^2\gamma\left[D_1^2\left(\frac{x_1^3}{6}-\frac{x_1^2\sin 2ax_1}{4a}-\frac{x_1\cos 2ax_1}{4a^2}+\frac{\sin 2ax_1}{8a^3}\right)+D_2^2\left(\frac{h^3-x_1^3}{6}+\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{x_1^2\sin\left(2ah-2ax_1\right)}{4a}+\frac{h}{4a^2}-\frac{x_1\cos\left(2ah-2ax_1\right)}{4a^2}-\frac{\sin\left(2ah-2ax_1\right)}{8a^3}\right)\right]\end{gathered}}. \tag{39}$$

Враховуючи вирази (25), (34) і (35), отримаємо вирази для форми вимушених коливань коренеплоду, закріпленого в ґрунті. Вони мають такий вигляд:

$\varphi\left(x\right)=\alpha\cdot D_1\sin ax$, при $x\le x_1$,

$\varphi\left(x\right)=\alpha\cdot D_2\cos a\left(h-x\right)$,

при $x > x_1$, (40)

де α визначається згідно (39).

Підставивши вирази (40) у (22), остаточно отримаємо закон вимушених коливань суцільно-пружного тіла, закріпленого в ґрунті:

$y\left(x,t\right)=D_1\alpha\sin ax\cdot\sin\omega t$, при $x\le x_1$,

$y\left(x,t\right)=D_2\,\alpha\,\cos a\left(h-x\right)\cdot\sin\omega t$,

при $x > x_1$. (41)

За результатами теоретичних досліджень вимушених коливань закріпленого в ґрунті суцільно-пружного тіла проведено конкретний розрахунок амплітуди зазначених коливань [3-8].

Використаємо для прикладу коренеплід цукрового буряку з такими його значеннями параметрів: h, кут його конусності γ, модуль Юнга E для тіла коренеплоду, густину ρ коренеплоду, коефіцієнт пружної деформації ґрунту c приймемо, згідно [2], рівними:

$$h=250\cdot10^{-3}\ \ (м);\ \gamma=14^{o};$$

$$E=18{,}4\cdot10^{6}\ \left(\frac{Н}{м^2}\right);\ \rho=1300\ \left(\frac{кг}{м^3}\right);$$

$$c=1\cdot10^{5}\left(\frac{Н}{м^2}\right).$$

Амплітуду H збурюючої сили $Q_{зб.}\left(t\right)$ вибираємо в межах 100...600 [*Н*]. Частоту ω збурюючої сили $Q_{зб.}\left(t\right)$, згідно [2], приймемо рівною $\omega=20{,}00\ \ (Гц)$.

Розрахунок проведений за допомогою програми MathCAD з метою визначення залежності амплітуди вимушених повздовжніх коливань тіла коренеплоду від зміни збуруючої сили у діапазоні 100...600 H для різних поперечних перерізів тіла.

Результатом даного розрахунку є графік, приведений на рис. 2.

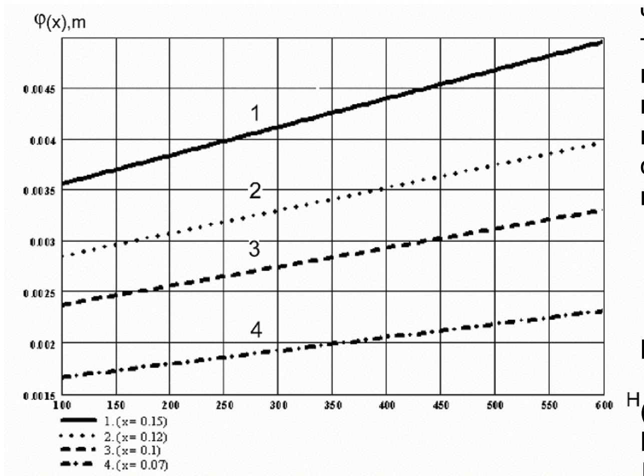

Рис. 2. Залежність амплітуди вимушених повздовжніх коливань суцільно-пружного тіла від величини збуруючої сили

Як бачимо з наведених графіків, із збільшенням величини збуруючої сили $Q_{зб.}(t)$ амплітуда $\varphi(x)$ повздовжніх вимушених коливань суцільно-пружного тіла зростає за лінійним законом.

Причому, з віддаленням площі поперечного перерізу коренеплоду від початку координат O, амплітуда також зростає. Так, при $x = 0{,}07\ м$ амплітуда знаходиться в межах $1{,}7...2{,}3\ мм$, при $x = 0{,}1\ м$ – в межах $2{,}3...3{,}5\ мм$, при $x = 0{,}12\ м$ – в межах $2{,}8...3{,}9\ мм$, при $x = 0{,}15\ м$ (точка захвату) – в межах $3{,}2...4{,}8\ мм$.

Висновок

Створено теорію власних поздовжніх коливань суцільно-пружного тіла в ґрунті як у пружному середовищі. Застосовано варіаційний принцип стаціонарної дії Остроградського-Гамільтона для власних поздовжніх коливань з урахуванням фізико-механічних властивостей стержня як пружного тіла та оточуючого середовища. За допомогою прямого варіаційного методу Рітца отримано рівняння частот Рітца, з якого визначаються будь-які частоти власних поздовжніх коливань пружного тіла. Зокрема, отримано аналітичний вираз для підрахунку першої власної частоти в залежності від фізико-механічних властивостей тіла та пружності оточуючого ґрунту, яка відіграє основну роль у руйнуванні зв’язків стержня з ґрунтом.

Література

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
2. Свеклоуборочные машины (конструирование и расчет) / Л. В. Погорелый, Н. В. Татьянко, В. В. Брей и др.; Под общ. ред. Л. В. Погорелого. – К.: Техніка, 1983. – 168 с.
3. Василенко П. М. Введение в земледельческую механику / П. М. Василенко. – К. : Сільгоспосвіта, 1996. – 252 с.
4. Василенко П. М. Вибрационный способ уборки корнеплодов / П. М. Василенко, Л. В. Погорелый, В. В. Брей // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1970. – № 2. – С. 9–13.
5. Брей В. В. Исследование и разработка механизированного процесса извлечения из почвы корней сахарной свеклы : дис. … канд. техн. наук. : спец. 05.20.01 / Брей Владимир Владимирович. – К., 1972. – 196 с.
6. Булгаков В. М. Теорія викопуючих робочих органів бурякозбиральних машин : монографія / В. М. Булгаков, І. В. Головач. – Кіровоград : КОД, 2009. – 202 с.
7. Булгаков В. М. Теорія вібраційного викопування коренеплодів / В. М. Булгаков, І. В. Головач // Механізація с.-г. виробництва : зб. наук. праць Нац. аграр. ун-ту. – 2003. – Т. XV. – С. 45–85.
8. Булгаков В. М. Теорія поперечних коливань коренеплоду при вібраційному викопуванні / В. М. Булгаков, І. В. Головач // Праці Таврійської держ. агротехн. акад. : зб. наук. пр. – 2004. – Вип. 21. – С. 33–48.