Гель П. В.

Вінницький національний аграрний університет

Бурдейна О. В.

Бурдейний В. М.

Вінницький національний технічний університет

УДК 534.12+517.927.2

АПРОБАЦІЯ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

В данной работе представлено апробацию применения метода конформних отображений для решения проблемы частотного спектра двумерных систем. С этой целью, как тестовые, рассматриваются два канонических случая с известными точными решениями. Результаты, полученные с применением метода конформних преобразований совпадают с тестовим, чем подтверждается эффективность метода.

In this work the conform mapping method for treating twodimensional eugenvalues's problem has been approbated by applying it to resolve the wave equation related to the systems with well known exact frequency's spectrum. Coincidence of obtained results with its canonical counterparties confirms well promising perspectives of using the discussed method.

Закономірності поширення хвиль, зокрема акустичних, так само як особливості вібраційного спектру двомірних чи квазі двомірних систем давно стали об'єктом не тільки академічних, але і суто прикладних досліджень. Такий стан речей не викликає здивування, оскільки системи такого типу часто виконують функції сенсорів, резонаторів, хвилеводів і т. п. Двомірні чи квазідвомірні елементи часто виконують не тільки допоміжні, але і основні функції, наприклад в електронних приладах, побудованих на основі планарної та інтегральної технологій. При цьому у багатьох випадках редукція просторової розмірності з трьох до двох у поєднанні з фактором геометричної форми двомірної системи стає визначальним щодо її властивостей, зокрема таких як, власні частоти, їх дисперсія і спектральний розподіл.

Формулювання задачі.

Загальновідомо[1-3], що частотний спектр встановлюється як власні значенняхвильового рівняння, розв'язки якого задовольняють певним краєвим умовам. Якщо відсутнє переплутування поперечних і поздовжніх коливань, то проблема зводиться до розв'язання рівняння Гельмгольца для зміщення ς , тобто

$$\nabla^2\varsigma + \frac{\omega^2}{c^2}\varsigma = 0 \qquad (1)$$

Тут ω —частота, c –швидкість поширення хвиль.

Що до краєвих умов то, вважаючи границі двомірної системи закріпленими, матимемо умови Діріхле[3], а саме:

$$\varsigma\big|_{\vec{r}\in\Gamma} = 0 \qquad (2)$$

де Γ позначає контур, яким обмежена система.

Стандартний метод розв'язання проблеми (1)-(2) полягає у розділенні змінних. Стосовно оператора Белтрамі-Лапласа ∇^2 , то його явна форма допускає такий підхід у декартових, полярних, параболічних та інших канонічних координатних системах. Проте розділення змінних у рівнянні (1) буде результативним, якщо відсутнє переплутування координат на контурі Γ , що матиме місце, коли границя області утворена лініями сітки відповідної координатної системи. Оскільки геометрія граничного контуру визначається функціональним призначенням системи та технологією її виробництва, то контур може бути далеким від одного з канонічних, в зв'язку з чим виникає необхідність розробки альтернативних підходів. Один з таких підходів ґрунтується на методі конформних відображень.

Оскільки основні ідеї згаданого методу знайшли відображення у багатьох оригінальних роботах[4-9], в тому числі і в одній із робіт авторів[10], де досліджується вібраційний спектр мембрани з нерегулярним контуром, ми виділимо лише ті деталі, які суттєві для даної роботи. Як відомо [11-12], при не сильно обтяжуючих обмеженнях, широкий клас областей, з якими асоціюється досліджувана двомірна система, комплексної площини шляхом конформного перетворення відображаються в одну з канонічних, як правило, круг чи верхню комплексну півплощину. Цим досягаються дві цілі. По перше, при краєвих умовах Діріхле стає можливим розділення змінних на граничному контурі. По друге модифікація оператора Белтрамі-Лапласа задана співвідношенням:

$$\nabla_z^2 = g^{\frac{1}{2}}\partial_i(g^{\frac{1}{2}}g_{ij}^{-1}\partial_j), \quad (3)$$

де g_{ij} – метричний тензор, а g – його детермінант, приводить до зміни густини функції Лагранжа[13], що в свою чергу, дозволяє ввести фактори геометричної форми безпосередньо у хвильове рівняння. Остання обставина забезпечує, по крайній мірі в принципі, застосування пертурбативних методів.

Зазначимо, що у більшості з досліджуваних систем модифікація хвильового рівняння має настільки нетривіальну форму, що теорія збурень стає чи не єдиним, якщо виключити чисельні методи, конструктивним підходом, який дозволяє отримати конкретні аналітичні результати. В зв’язку з цим не останньою є проблема апробації методу, застосуванням його до спектральної задачі (1-2) з відомими точними розв’язками. Саме цьому присвячена дана робота.

Основна частина: розв'язання задачі, результати.

Нами розглядають власні моди і відповідні частоти, які збуджуються у тонкій двомірній необмеженій вздовж осі x пластинці шириною a. Нормовані власні моди такої системи є добре відомими і описуються співвідношенням

$$\varsigma_{n,k}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\exp(ikx)\cdot Sin(\frac{\pi n y}{a}). \quad (4)$$

Загальновідомим є і результат

$$\omega_n^2(k) = c^2\left(k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}\right) \quad (5)$$

який стосується власних частот.

Легко переконатися, що функція

$$w = \exp(\frac{\pi \cdot z}{a}) \quad (6)$$

з $w = u + iv$ і $z = x + iy$ здійснює відображення описаної вище смуги комплексної площини z у верхню комплексну півплощину w з наступною відповідністю точок:

$$\infty + i\cdot a \to -\infty; i\cdot a \to -1;$$
$$-\infty \to 0; 0 \to 1; \infty \to \infty$$

Метричний тензор та його детермінант знаходимо шляхом відділенням дійсної і уявної частин перетворення (6) з подальшим обчисленням відповідних похідних, що дає

$$g_{ij} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2\left(u^2+v^2\right)^{-1}\delta_{ij};$$
$$g = \left(\frac{a}{\pi}\right)^4\left(u^2+v^2\right)^{-2} \quad (7)$$

Поєднуючи (7), (3) і (1), дістаємо модифіковане хвильове рівняння

$$\nabla_w^2\varsigma(u,v) + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\frac{1}{u^2+v^2}\varsigma(u,v) = 0, \quad (8)$$

розв'язки якого мають бути обмеженими у верхній комплексній півплощині w і підлягають краєвим умовам Діріхле, тобто:

$$\varsigma(u,v)\big|_{v=0} = 0 \quad (9)$$

Як бачимо, внаслідок конформного відображення (6) граничний контур зазнав суттєвого спрощення і зведений до дійсної осі півплощини w. Ще суттєвішим чином модифікувалося рівняння Гельмгольца (1). Одержане рівняння (8) можна інтерпретувати як хвильове рівняння з хвильовим вектором залежним від координат, що відповідає поширенню хвиль у регулярно неоднорідному середовищі.

Рівняння (8) має структуру, яка дозволяє застосувати розділення змінних у полярних координатах, які введемо очевидними співвідношеннями, а саме: $u = wCos\varphi$ і $v = wSin\varphi$. Отже, подамо розв'язок рівняння

(8) у вигляді добутку радіальної $W(w)$ і азимутальної $\Phi(\varphi)$ функцій:

$$\varsigma(u,v) = \Phi(\varphi)\cdot W(w) \tag{10}$$

Азимутальну функцію можна вибрати у вигляді лінійної комбінації тригонометричних функцій

$$\Phi(\varphi) = A_v Cos v\varphi + B_v Sin v\varphi$$

Очевидно, що для забезпечення виконання умови (9) повинні покласти рівними нулю значення коефіцієнтів A_v. На півосі $(-\infty, 0]$ полярний кут дорівнює π. Для того, щоб задовольнити умову Діріхле на від'ємній півосі слід встановити для v цілі значення, тобто

$$v = n \text{ з } n \in N.$$

З врахуванням вищенаведених міркувань для $\varsigma(u,v)$ маємо

$$\varsigma(u,v) = W(w) Sin(n\varphi) \tag{11}$$

Комбінуючи (11) з (9), попередньо записаним у полярних координатах, можна одержати рівняння

$$W'' + \frac{1}{w}W' + \frac{\kappa^2}{w^2}W = 0 \tag{12}$$

яке описує радіальну компоненту $\varsigma(u,v)$. Зауважимо, що κ в (12) визначено співвідношенням:

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 - n^2 \tag{13}$$

Для розв'язання рівняння (12) введемо нову невідому функцію $F(w)$, визначивши її так

$$W(w) = w^{\gamma} F(w) \tag{14}$$

де γ – вільний параметр, який буде встановлено в подальшому викладі.

Підстановка (14) в (12) дає

$$F'' + \frac{2\gamma+1}{w}F' + (\gamma^2+\kappa^2)\frac{1}{w^2}F = 0 \tag{15}$$

Тепер стає очевидний якнайзручніший вибір параметру γ. Дійсно, поклавши

$$\gamma^2 + \kappa^2 = 0 \tag{16}$$

приходимо до рівняння

$$F'' + \frac{2\gamma+1}{w}F' = 0 \tag{17}$$

яке інтегрується в квадратурах і має загальний розв'язок поданий так:

$$F = C\cdot w^{-2\gamma} + B \tag{18}$$

Тут B і C - константи, які можна встановити з умови нормування власних мод.

Прийнявши до уваги (14) і (18), для радіальної компоненти $W(w)$ отримуємо:

$$W(w) = C\cdot w^{-\gamma} + B\cdot w^{\gamma} \tag{19}$$

Визначений рівністю (16) параметр γ поки що не обтяжений якими б то не було обмежуючими вимогами. Проте, при довільних його значеннях з'являються додаткові моди, «духи», які випадають з відомого точного спектру (4). На можливість цього ефекту, який має своєю причиною не унітарність перетворення (6), вказується в різних джерелах, наприклад в [Кощта]. Виключивши стандартну вимогу, за якою $\omega^2 > 0$, авторам, на жаль, не відомі загальні принципи, які б дозволили відбір саме фізичних розв'язків. У досліджуваному нами випадку в основу цього відбору покладемо обмеженість розв'язків у околах критичних точок. Рівняння (12) має дві особливі точки, а саме $w = 0$, яка з'являється як наслідок конформного відображення (6) і нескінченно віддалена точка, наявність якої обумовлена специфікою моделі. Приймемо як гіпотезу, що $\mathrm{Re}\gamma \neq 0$. Легко бачити, що не існує набір коефіцієнтів B і C, при якому розв'язок (19) був би обмежений в обох критичних точках. Це означає, що параметр γ має бути чисто уявною величиною. Покладемо

$$\gamma = i\frac{a}{\pi}k \tag{20}$$

де k – довільна величина. Комбінуючи (20) і (13) , одержуємо спектр частот, який співпадає з точним законом дисперсії (5).

Застосовуючи перетворення (6) до прямокутної пластинки

$$d_1 \le x \le d_2 \;,\; 0 \le y \le a \tag{21}$$

можна переконатися, що вона відображається у півкільце

$$\exp\frac{\pi d_1}{a} \le w \le \exp\frac{\pi d_2}{a} \;,\; 0 \le \varphi \le \pi \tag{22}$$

верхньої комплексної півплощини. Умова Діріхле на граничному контурі буде виконана, якщо коефіцієнти B і C задовольняють системі рівнянь:

$$C + B\exp\frac{2\pi\gamma d_1}{a} = 0$$

$$C + B\exp\frac{2\pi\gamma d_2}{a} = 0$$

яка, як і в попередньому випадку, має нетривіальні розв'язки лише при уявних значеннях параметра γ. Поклавши, $d = d_2 - d_1$, для спектру отримуємо:

$$\omega_{nl}^2 = \pi^2 c^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{l^2}{d^2}\right) \quad (23)$$

що, як і у попередньому випадку, співпадає із добре відомим[1] точним результатом.

Висновки

Таким чином, показано, що метод конформних відображень дає можливість одержувати точні результати, які стосуються власних мод і відповідних їм власних частот. Цим підтверджується ефективність методу в застосуванні до проблем дослідження спектру двомірних систем з нетривіальною геометричною формою граничного контуру. Показано, що відбір обмежених у особливих точках розв'язків хвильового рівняння дозволяє виключити зі спектру власних значень нефізичні паразитні частоти. Одержані власні функції можуть бути використані як базис для застосування теорії збурень для хвильового рівняння поданого у півплощині.

Література

1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, ИЛ, т 1,1958, 942с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, Наука, 1988, 206 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, Наука. 1977, 680 с.
4. Prosen T., Robnik M. Survey of the eigenfunctions of a billiard system between integrability and chaos, Journal of Physics A: Mathematical and General. 1993. T. 26. № 20. C. 5365-5373.
5. Murthy G., Shankar R., Mathur H. Ballistic chaotic quantum dots with interaction: A numerical study of he Robnik-Berry billiard, Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics, 2005, T72, № 7.
6. Gregor Tanner, Niels Sondergaard, Wave chaos in acustics and elasticity, J. Phys A 40R443-510.
7. Veble G., T Prosen and M Robnik, Expanded boundary integral method and chaotic time-reversal doublets in quantum billiard**s,** New Journal of Physics 9 (2007) 15.
8. Karl-Fredrik Berggren, Dmitrii N. Maksimov, Almas F. Sadreev, Quantum stress in chaotic Billiards.
9. Paolo Amore, Spectroscopy of drums and quantum billiards: perturbative and non-perturbative results, arXiv09,0910.4798V1,2009.
10. Бурдейна О.В., Гель П.В., Бурдейний В.М., Модифікація вібраційного спектру мембрани з нерегулярним хаотичним контуром, Вібрації в техніці та технологіях, 2011, № 1 (61), стр.9-14.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексной переменной, «Наука», 1987, 688с.
12. Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформних от ображений, «Мир», 1963, стр. 407.
13. Гель П. В., Бурдейна О. В., Бурдейний В. М., Поєднання методу функцій Гріна з технікою конформних перетворень для дослідження вібраційного спектру двомірних систем, Вібрації в техніці та технологіях, 2012, № 3 (67), стр. 13-16.