

УДК 517.958

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРИ НЕНУЛЬОВИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ

Найко Д. А

Вінницький національний аграрний університет

Красевський В. О

Олексина Т. М

Вінницький національний технічний університет

Постановка задачі

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (0 < x < l, 0 < t < \infty), \quad (1)$$

що задовольняє крайові умови

$$\text{(КУ)} \quad \begin{cases} u(0, t) = g_1(t), \\ u(l, t) = g_2(t), \end{cases} \quad (0 < t < \infty) \quad (2)$$

і початкову умову

$$\text{(ПУ)} \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 < x < l). \quad (3)$$

Основна частина

Розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x, t) = v(x, t) + g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t)) \frac{x}{l}. \quad (4)$$

Тоді диференціальне рівняння (1) набуде вигляду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) - g_1'(t) + (g_1'(t) - g_2'(t)) \frac{x}{l},$$

При $f_1(x, t) = f(x, t) - g_1'(t) + (g_1'(t) - g_2'(t)) \frac{x}{l}$ отримаємо

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t) \quad (5)$$

$$\text{(КУ)} \quad \begin{cases} u(0, t) = v(0, t) + g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t)) \frac{0}{l} = g_1(t) \Rightarrow v(0, t) = 0; \\ u(l, t) = v(l, t) + g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t)) \frac{l}{l} = g_2(t) \Rightarrow v(l, t) = 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) + g_1(0) + (g_2(0) - g_1(0)) \frac{x}{l} = \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x, 0) = \varphi(x) - g_1(0) + (g_1(0) - g_2(0)) \frac{x}{l}.$$

При $\varphi_1(x) = \varphi(x) - g_1(0) + (g_1(0) - g_2(0)) \frac{x}{l}$ отримаємо

$$(ПУ) v(x, 0) = \varphi_1(x) \quad (7)$$

Ми звели вихідну задачу до розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (5) з нульовими крайовими умовами (6). Розв'язок цієї задачі знаходиться у вигляді

$$v(x, t) = s(x, t) + w(x, t), \quad (8)$$

де $s(x, t)$ є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності із нульовими крайовими умовами

$$(ДРЧП) \frac{\partial s}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, (0 < x < l, 0 < t < \infty), \quad (9)$$

$$(КУ) \begin{cases} s(0, t) = 0, \\ s(l, t) = 0, \end{cases} (0 < t < \infty); \quad (10)$$

$$(ПУ) s(x, 0) = \varphi_1(x), (0 < x < l). \quad (11)$$

$w(x, t)$ знайдемо розв'язавши задачу:

$$(ДРЧП) \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(x, t), (0 < x < l, 0 < t < \infty), \quad (12)$$

$$(КУ) \begin{cases} w(0, t) = 0, \\ w(l, t) = 0, \end{cases} (0 < t < \infty); \quad (13)$$

$$(ПУ) w(x, 0) = 0, (0 < x < l). \quad (14)$$

Перша з цих задач розв'язується методом відокремлення змінних [1]

$$s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (15)$$

де

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx. \quad (16)$$

Розв'язок задач (12)-(14) знаходиться у вигляді [2]:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (17)$$

де

$$T_n(t) = \int_0^t h_n(\tau) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau, \quad h_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx.$$

Після знаходження $s(x, t)$ та $w(x, t)$ шукана функція $u(x, t)$ матиме вигляд

$$u(x, t) = s(x, t) + w(x, t) + g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t)) \frac{x}{l}. \quad (18)$$

Використаємо запропонований алгоритм для знаходження розв'язку однорідного

диференціального рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, із ненульовими крайовими умовами

$$\begin{cases} u(0, t) = 2; \\ u(4, t) = 2t + 18 \end{cases} \text{ та початковою умовою } u(x, 0) = x^2 + 2.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді (4). Згідно з умовою задачі

$$g_1(t) = 2; \quad g_2(t) = 2t + 18; \quad \varphi(x) = x^2 + 2; \quad a = 3; \quad l = 4.$$

Враховуючи, що

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - g_1(0) + (g_1(0) - g_2(0)) \frac{x}{l} = x^2 + 2 - 2 + (2 - 0 - 18) \frac{x}{4} = x^2 - 4x,$$

$s(x, t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 4, 0 < t < \infty),$$

$$\text{(КУ)} \quad \begin{cases} s(0, t) = 0, \\ s(4, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{(ПУ)} \quad s(x, 0) = x^2 - 4x, \quad (0 < x < 4).$$

Відносно функції $s(x, t)$ отримали однорідне рівняння теплопровідності із нульовими крайовими умовами. Згідно з (15) отримаємо

$$s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

де

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (x^2 - 4x) \sin\left(\frac{\pi n}{4} x\right) dx.$$

Для знаходження інтегралів, що входять в структуру розв'язку поставленої задачі, використаємо математичний додаток Maple. Тоді

> int((x^2-4*x)*sin(Pi*n*x/4),x=0..4);

$$\frac{64(-2 + \pi n \sin(\pi n) + 2 \cos(\pi n))}{\pi^3 n^3}$$

$$\text{Отже, } B_n = \frac{-64 + 32\pi n \sin(\pi n) + 64 \cos(\pi n)}{\pi^3 n^3}.$$

Враховуючи, що n натуральне число

$$B_n = \frac{64}{\pi^3 n^3} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ -\frac{128}{\pi^3 (2k-1)^3}, n = 2k-1 \end{cases}$$

В результаті отримаємо

$$s(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{128}{\pi^3 (2k-1)^3} \cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4} x\right).$$

Знайдемо $f_1(x, t)$

$$f_1(x, t) = f(x, t) - g_1'(t) + \left(g_1'(t) - g_2'(t) \right) \frac{x}{l} = -\frac{x}{2}.$$

Тоді $w(x, t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{x}{2}, \quad (0 < x < 4, 0 < t < \infty),$$

$$\text{(КУ)} \quad \begin{cases} w(0, t) = 0, \\ w(l, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{(ПУ)} \quad w(x, 0) = 0, \quad (0 < x < 4).$$

Розв'язок останньої задачі знаходиться у вигляді (17), де

$$h_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x, t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = -\frac{1}{4} \int_0^4 x \sin\left(\frac{\pi n}{4} x\right) dx,$$

> int(x*sin(Pi*n*x/4), x=0..4);

$$-\frac{16(-\sin(\pi n) + \cos(\pi n) \pi n)}{\pi^2 n^2}$$

$$h_n(t) = \frac{-4\sin(\pi n) + 4\pi n \cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} = \frac{4(-1)^n}{\pi n};$$

$$T_n(t) = \int_0^t h_n(\tau) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau = \int_0^t \frac{4(-1)^n}{\pi n} e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2 (t-\tau)} d\tau;$$

> int(4*(-1)^n/Pi/n*exp(-((3*Pi*n/4)^2)*(t-tau)), tau=0..t);

$$\frac{64(-1)^{(1+n)} \left(e^{-\frac{9t\pi^2 n^2}{16}} - 1 \right)}{9\pi^3 n^3}$$

$$T_n(t) = \frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3} \left(1 - e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}} \right).$$

Отримаємо

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3} \left(1 - e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}} \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4} x\right).$$

Тоді шукана функція набуде вигляду (рис. 1)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{128}{\pi^3 (2k-1)^3} \cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4}x\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3} \left(1 - e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right) + 2 + \frac{x(t+8)}{2}.$$

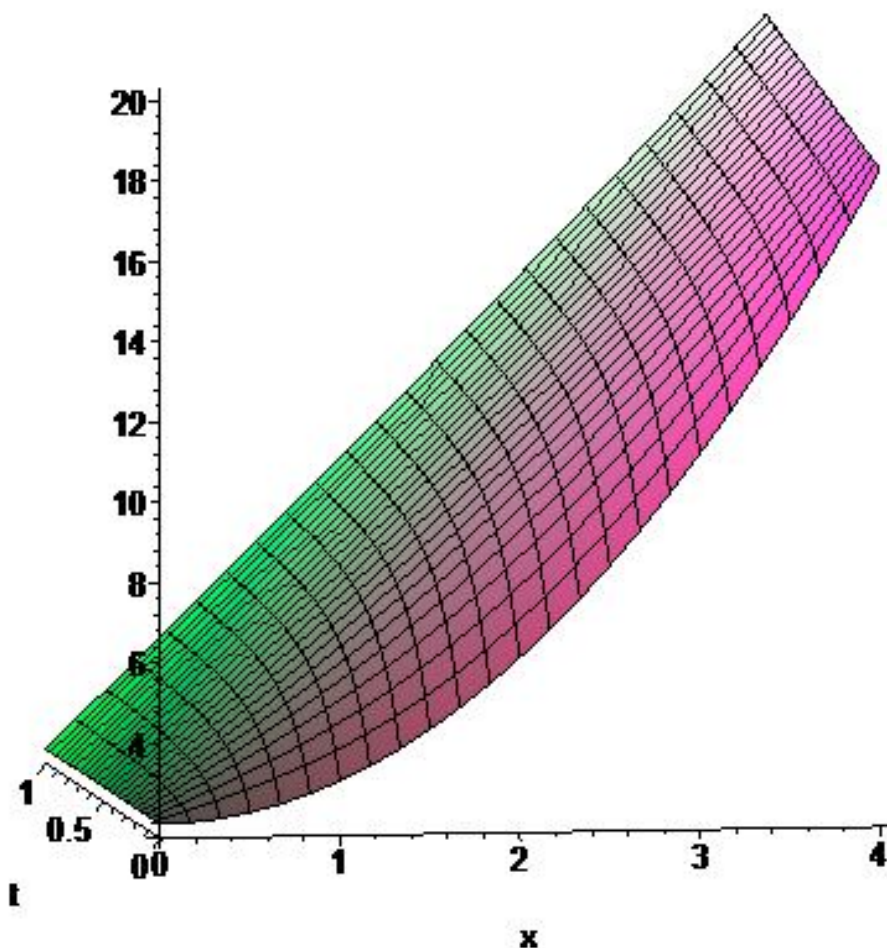


Рис. 1 Графік функції $u(x,t)$

Розглянемо у динаміці змодельоване явище поширення тепла у стержні, використавши оператор `animate` (рис. 2)

```
> with(plots):
```

```
> animate(plot,[sum(-128/(Pi^3*(2*k-1)^3)*  
exp(-(3*Pi*(2*k-1)/4)^2*t)*sin(Pi*(2*k-1)/4*x),  
k=1..infinity)+sum(64*(-1)^n/(9*Pi^3*n^3)*  
(1-exp(-9*Pi^2*n^2*t/16))*sin(Pi*n*x/4),  
n=1..infinity)+2+x*(t+8)/2,x=0..4],t=0..1);
```

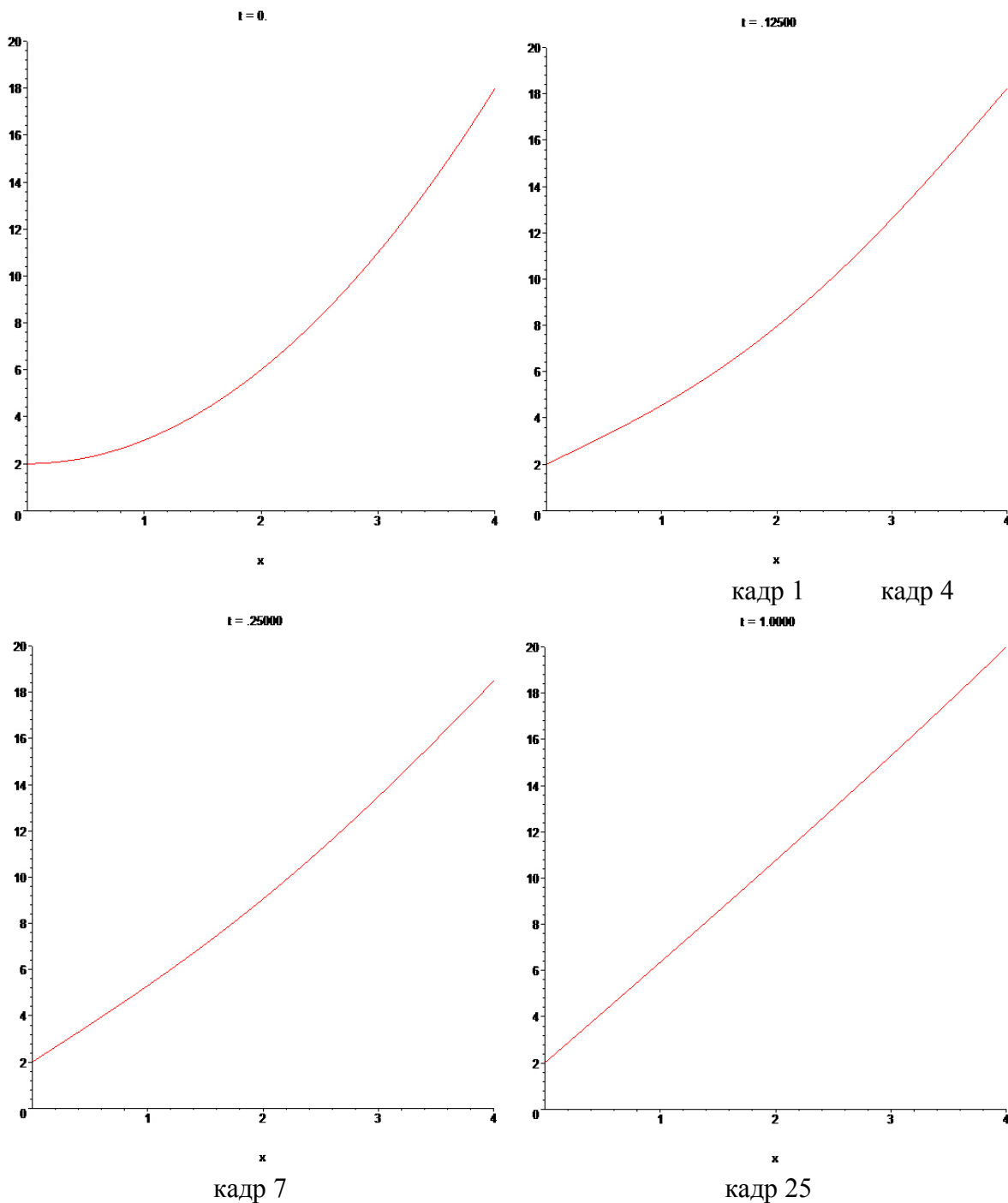


Рис. 2 Динаміка зміни температури у стержні

Для чисельного знаходження розв'язку диференціального рівняння із частинними похідними із заданими крайовими та початковими умовами в Maple можна використовувати оператор pdsolve, що входить у додаткову бібліотеку PDEtools

```
> pds:=pdsolve(diff(u(x,t),t)=9*diff(u(x,t),x,x),
{u(0,t)=2,u(4,t)=2*t+18,u(x,0)=x^2+2},numeric,time=t, range=0..1);
```

Результат використання оператора pdsolve, що виведено за допомогою оператора plot, представлено на рис. 3.

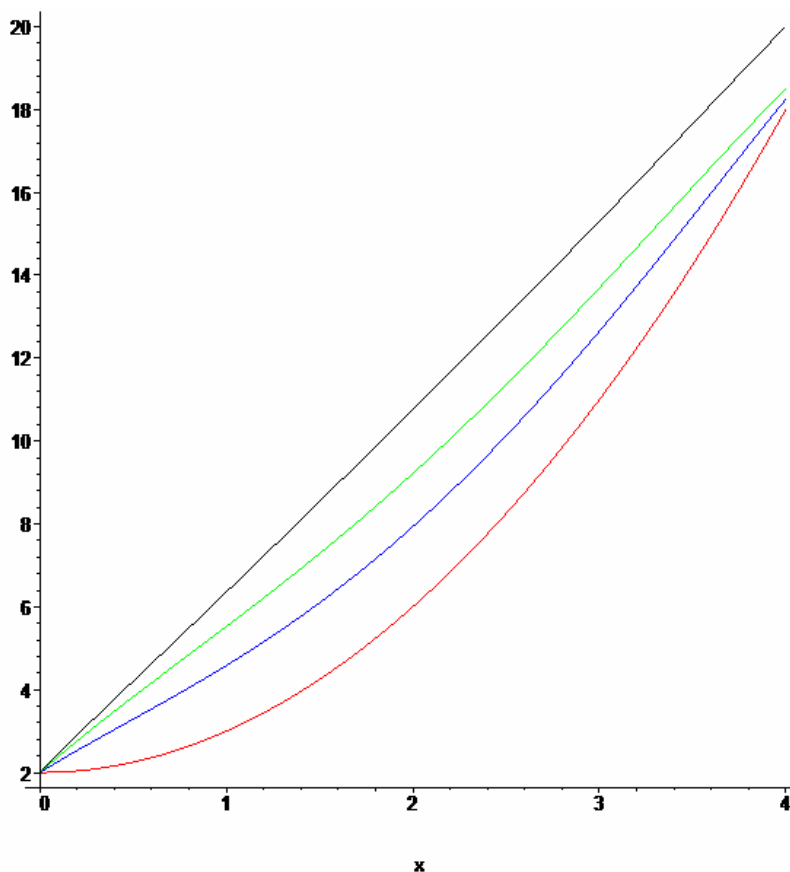


Рис. 3 Чисельний розв'язок за допомогою оператора pdsolve

Висновки

Запропоновано алгоритм, що дозволяє визначити розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності із ненульовими крайовими умовами у вигляді аналітичної функції. Крім того розглянута можливість чисельного знаходження розв'язку поставленої задачі та його візуалізація із можливістю аналізу за допомогою математичного додатка Maple.

Література

1. Вища математика: Підручник: У 2-х кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран та ін. – 368 с.
2. Краєвський В. О. Спецкурс математичного аналізу: навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 178 с.